ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ

13 Σεπτέμβρη 2019

Απαντήστε με προσοχή, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.

ΜΕΡΟΣ Ι

Απαντήστε οπωσδήποτε σε τουλάχιστον 5 από τα ακόλουθα 8 ερωτήματα προκειμένου να πάρετε προβιβάσιμο βαθμό. Αν απαντήσετε στα 8 θα πάρετε βαθμό 6. Συνεχίστε μετά με τα επόμενα 2 προβλήματα.

1. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή ενός σωματιδίου μάζας m που κινείται στην ευθεία υπό την επίδραση δύναμης $F = -k\,x$ (με σταθερά $k > 0$).
2. Γράψτε τη Χαμιλτονιανή του παραπάνω σωματιδίου και σχεδιάστε στον χώρο των φάσεων τις δυνατές τροχιές.
3. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή στο σύστημα κέντρου μάζας ενός συστήματος δύο μαζών που κινούνται σε μια ευθεία και αλληλεπιδρούν βαρυτικά.
4. Ένα σωματίδιο κινείται στο βαρυτικό πεδίο μιας άπειρης ομογενούς λεπτής πλάκας η οποία καταλαμβάνει το επίπεδο $z = 0$. Εξηγήστε ποιές φυσικές ποσότητες διατηρούνται κατά την κίνηση του σωματιδίου και γράψτε από ποιες συμμετρίες προκύπτει η διατήρηση αυτών.
5. Ένα σωματίδιο μάζας m και φορτίου Q κινείται στο μαγνητικό πεδίο που περιγράφεται από ανυσματικό δυναμικό της μορφής $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}} f(y)$. Γράψτε τις συνιστώσες της γενικευμένης ορμής του σωματιδίου και διερευνήστε ποιές από αυτές διατηρούνται.
6. Ο πίνακας της δυναμικής ενέργειας ενός συστήματος με 2 βαθμούς ελευθερίας έχει τη μορφή
$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
Αφού συμμετροποιήσετε τον πίνακα αυτό, υπολογίστε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος στη θέση $(q_1, q_2) = (1, 1)$. Πόσο διαφορετική θα ήταν η δυναμική ενέργεια, αν χρησιμοποιούσατε τον μη συμμετροποιημένο πίνακα;
7. Η κινητική ενέργεια συστήματος 2 βαθμών ελευθερίας με συντεταγμένες θ, ϕ είναι $T = 2\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} + 5\dot{\phi}^2$ και η δυναμική $V = \theta^2 + 4\phi^2$. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος.
8. Προσδιορίστε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του προηγούμενου συστήματος.

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α Ένα σωματίδιο μάζας $m = 1$ κινείται σε μία διάσταση εντός πηγαδιού (όχι κατ' ανάγκη τετραγωνικού) δυναμικού $V(x)$.

1. Αφού γραφεί η Λαγκρανζιανή και η εξίσωση κίνησης που διέπεται από αυτή, να αποδείξετε ότι η ενέργεια (κινητική+δυναμική) του σωματιδίου παραμένει σταθερή κατά την κίνηση του σωματιδίου.

2. Να γραφεί σε τυπική μορφή η δράση του σωματιδίου όταν αυτό μεταβαίνει από το σημείο x_1 στο σημείο x_2 ακολουθώντας τη φυσική κίνηση. [Χρησιμοποιήστε τη διατήρηση της ενέργειας και μετατρέψτε το ολοκλήρωμα της δράσης από ολοκλήρωμα στο χρόνο, σε ολοκλήρωμα ως προς τη θέση x του σωματιδίου.]
3. Έστω δυναμικό της μορφής $V(x) = \sqrt{|x|}$. Το σωματίδιο μεταβαίνει από τη θέση $x_1 = -a$ στη θέση $x_2 = a$ σε κάποιο χρόνο T, όπου a κάποια θετική σταθερά. Εξηγήστε μέσω της δράσης, την οποία να θεωρήσετε ως πρωταρχική φυσική έννοια, γιατί η ενέργεια δεν μπορεί να πάρει τιμή μικρότερη της $E_{\text{min}} = \sqrt{a}$ για την εν λόγω κίνηση.
4. Θεωρήστε την ενέργεια ίση με $k\sqrt{a}$ με $k \geq 1$ και υπολογίστε τη δράση που αντιστοιχεί στην κίνηση συναρτήσει των k, a και των ακόλουθων ολοκληρωμάτων:

   $$I_3(\phi_0) = \int_0^{\phi_0} \sin^3 \phi \, d\phi \quad , \quad I_5(\phi_0) = \int_0^{\phi_0} \sin^5 \phi \, d\phi.$$

   [Είναι βολικός ο μετασχηματισμός $x = k^2 a \sin^4 \phi$ για την ολοκλήρωση στο διάστημα από $x = 0$ έως $x = a$. Τι προτείνετε για την αντιμετώπιση του υπολογισμού της δράσης κατά το πρώτο μισό της κίνησης: από το $-a$ στο 0; Θα χρειαστεί επίσης να προσδιορίσετε το ϕ_0.]
5. Η δράση της φυσικής κίνησης σε κάθε πρόβλημα εξαρτάται από την αρχική και την τελική θέση καθώς και από το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί. Στο παραπάνω πρόβλημα φαίνεται να έχει χαθεί η εξάρτηση από το χρόνο T. Πού υπάρχει αυτή; Αφού εντοπίσετε την εξάρτηση από το χρόνο, ξαναγράψτε τη δράση λαμβάνοντας υπόψη το χρόνο αυτό. [Θα χρειαστεί να υπολογίσετε και το χρόνο T, χρησιμοποιώντας τον παραπάνω μετασχηματισμό.]

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β Χαμιλτονιανό σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας έχει Χαμιλτονιανή $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ με συντεταγμένες θέσεων $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ και συντεταγμένες ορμών $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$. Ένα άλλο Χαμιλτονιανό σύστημα διέπεται απο τη Χαμιλτονιανή $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Ούτε η H ούτε η G έχουν άμεση εξάρτηση από τον χρόνο.

1. Γράψτε σε πρώτη τάξη ως προς τον χρόνο (δηλαδή για μικρούς χρόνους) την εξέλιξη των θέσεων και των ορμών που επάγει η δυναμική με την Χαμιλτονιανή G.
2. Δείξτε ότι η συνθήκη, η H να παραμένει αναλλοίωτη σε αυτόν το μετασχηματισμό των θέσεων και των ορμών, είναι ισοδύναμη με το να είναι η αγκύλη Poisson $\{H, G\}$ μηδενική. Δείξτε ότι τότε η G είναι διατηρούμενη ποσότητα της δυναμικής που παράγεται από την H.
3. Υπολογίστε την πλήρη χρονική εξέλιξη των θέσεων και των ορμών υπό τη δυναμική $G = \alpha(p_1 + p_2 + p_3)$. Ποια ποσότητα διατηρείται τώρα στη δυναμική που παράγεται από την H, αν η H είναι αναλλοίωτη σε αυτό το μετασχηματισμό; [α κάποια σταθερή ποσότητα.]
4. Εάν η H είναι συνάρτηση μόνο των $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ και $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, υπολογίστε την αγκύλη Poisson $\{H, L_i\}$ όπου $L_i = (\mathbf{q} \times \mathbf{p})_i = \varepsilon_{ijk} q_j p_k$.

Καλή επιτυχία

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Ι

Τα κυριότερα προβλήματα στις απαντήσεις εμφανίστηκαν στο ερώτημα 2 που πολλοί από σας δεν σχεδίασαν σωστά τις τροχιές (που είναι οι καμπύλες σταθερής τιμής της Χαμιλτονιανής) και στο ερώτημα 6 που λίγοι γνωρίζαν να κατασκευάσουν το συμμετρικό τμήμα ενός πίνακα. Οπότε προσοχή σε αυτά τα δύο πράγματα). Επίσης πολλοί λίγοι ξέραν να γράψουν τη Λαγκραντζιανή στο σύστημα ΚΜ.

1. $L = m\dot{x}^2/2 - kx^2/2$

2. Είναι $p = m\dot{x}$ οπότε

$$H = \frac{p^2}{2m} + k\frac{x^2}{2} .$$

Οι τροχιές είναι οι ελλείψεις $H(x, p) = E$.

3. Εάν x_1 , x_2 οι θέσεις των σωματιδίων, $M = m_1 + m_2$ η ολική μάζα του συστήματος, $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ η ανηγμένη μάζα, $X = (m_1 x_1 + m_2 x_2)/M$ η θέση του κέντρου μάζας του συστήματος και $x = x_1 - x_2$ η σχετική θέση των σωματιδίων, η Λαγκραντζιανή είναι η:

$$L = \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{x}^2 + \frac{Gm_1 m_2}{|x|} .$$

4. Έστω οτι πλάκα ορίζει το επίπεδο $z = 0$. Το βαρυτικό δυναμικό στο σημείο (x, y, z) εξαρτάται μόνο από απο την κάθετη απόσταση από την πλάκα z. Συνεπώς η Λαγκραντζιανή σωματιδίου που κινείται σε αυτό το δυναμικό θα είναι της μορφής:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(z) .$$

Τότε επειδή η Λαγκραντζιανή είναι αναλλοίωτη
α) στις μεταθέσεις στο x, διατηρείται η ορμή $p_x = m\dot{x}$
β) στις μεταθέσεις στο y, διατηρείται η ορμή $p_y = m\dot{y}$
γ) στις στροφές περί τον άξονα z, διατηρείται η στροφορμή $L_z = xp_y - yp_x$
δ) στις μεταθέσεις στον χρόνο, διατηρείται η ενέργεια $E = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2 + V(z)$.

5. Η Λαγκραντζιανή είναι:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + Qf(y)\dot{x} .$$

Οι συνιστώσες των ορμών είναι:

$$p_x = m\dot{x} + Qf(y) \ , \ \ p_y = m\dot{y} \ , \ \ p_z = m\dot{z}$$

και εξ'αυτών επειδή η Λαγκραντζιανή είναι αναλλοίωτη σε μεταθέσεις στο x και στο z διατηρούνται οι p_x και p_z, ενώ η p_y δεν διατηρείται.

6. Ο συμμετρικοποιημένος πίνακας είναι ο

$$K_s = \frac{K + K^T}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{pmatrix} .$$

Η δυναμική ενέργεια είναι:

$$\frac{1}{2}q^T K q \;=\; \frac{1}{2}(1,1)\begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1,1)\begin{pmatrix} 7/2 \\ 13/2 \end{pmatrix} = 5$$

Η δυναμική παραμένει η ίδια με τον συμμετρικοποιημένο πίνακα, δηλαδή $q^T K q = q^T K_s q$.

7. Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$2\ddot{\theta} + \ddot{\phi} = -\theta \quad , \quad \ddot{\theta} + 5\ddot{\phi} = -4\phi$$

8. Στους κανονικούς τρόπους όλες οι συντεταγμένες ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα. Αναζητώ έτσι λύσεις της μορφής $\theta = \hat{\theta}e^{i\omega t}$, $\phi = \hat{\phi}e^{i\omega t}$, οπότε θα πρέπει:

$$-\omega^2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

και για να υπάρχει λύση (μη τετριμμένη) οι συχνότητες πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$\det\begin{pmatrix} 1 - 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & 4 - 5\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

ή

$$9\omega^4 - 13\omega^2 + 4 = (9\omega^2 - 4)(\omega^2 - 1) = 0$$

οπότε οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι: $\omega = 1$ και $\omega = \sqrt{4/9} = 2/3$.

ΜΕΡΟΣ II

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α

1. Η Λαγκραντζιανή είναι

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x) ,$$

και η εξίσωση κίνησης

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$$

από την οποία προκύπτει:

$$
\begin{aligned}
m\dot{x}\ddot{x} &= \frac{d}{dt}\frac{m\dot{x}^2}{2} \\
&= -\dot{x}\frac{dV}{dx} \\
&= -\frac{dV}{dt}\,.
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)\right) = 0\,,
$$

και συνεπώς διατηρείται κατά την κίνηση η ενέργεια

$$
E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)\,.
$$

2. Η δράση είναι:

$$
S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)\right) dt.
$$

Επί της φυσικής κίνησης διατηρείται η ενέργεια οπότε ανά πάσα στιγμή είναι:

$$
\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x)}\,,
$$

συνεπώς η τροχιά $x(t)$ συνεπάγεται τη σχέση:

$$
dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \tag{1}
$$

Αν δε $x_1 < x_2$ λαμβάνουμε το θετικό πρόσημο (άλλως το αρνητικό και αν κάνει πολλές ταλαντώσεις όσα αθροίσματα χρειάζονται) και η δράση γίνεται:

$$
S = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2} \frac{E - 2V(x)}{\sqrt{E - V(x)}}dx.
$$

3. Η δράση της φυσικής κίνησης είναι

$$
S = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{-a}^{a} \frac{E - 2\sqrt{|x|}}{\sqrt{E - \sqrt{|x|}}}dx.
$$

Η απαίτηση η δράση, που τη θεωρούμε θεμελιώδη φυσική ποσότητα, να λαμβάνει πραγματικές τιμές επί της φυσικής κίνησης μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι δεν μπορεί να υπάρξει κίνηση από το $-a$ στο a με ενέργεια μικρότερη της $E_{min} = \sqrt{a}$, άλλως η δράση θα λάμβανε φανταστικές τιμές.

4. Η δράση για ενέργεια $E = k\sqrt{a}$ έχοντας προσέξει ότι η δράση από το $-a \to 0$ είναι ίση με τη δράση από το $0 \to a$ είναι:

$$S = 2\sqrt{2m}k^{5/2}a^{5/4}\left(I_3(\varphi_0) - 2I_5(\varphi_0)\right)$$

όπου

$$\sin\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{k}}\ .$$

5. Η εξάρτηση από τον χρόνο, T, κρύβεται στην ενέργεια διότι $T(E)$. Συγκεκριμένα από την (1) έχουμε

$$\begin{aligned} T(E) &= \int_0^{T(E)} dt \\ &= 2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{E-\sqrt{x}}} \\ &= \sqrt{2m}k^{3/2}a^{3/4}I_3(\varphi_0)\ . \end{aligned}$$

και αυτή συνδέει τη δράση με τον χρόνο. Δεν υπάρχει κλειστή μορφή που μπορεί να γραφεί η δράση συναρτήσει του χρόνου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β

1. Η χρονική εξέλιξη υπό τη δυναμική G εξελίσσει τις θέσεις q_i και τις ορμές p_i σύμφωνα με τις εξισώσεις:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial G}{\partial p_i}\ ,\ \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial q_i}\ , i = 1, \cdots, 3\ .$$

Συνεπώς σε πρώτη τάξη ως προς τον χρόνο η εξέλιξη των θέσεων και ορμών από την χρονική στιγμή $t \to t + \delta t$ είναι:

$$\begin{aligned} q_i(t+\delta t) &= q_i(t) + \delta t\ \frac{\partial G}{\partial p_i}\bigg|_{(\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t))} \\ p_i(t+\delta t) &= p_i(t) - \delta t\ \frac{\partial G}{\partial q_i}\bigg|_{(\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t))}\ . \end{aligned}$$

Τώρα αν η Χαμιλτονιανή H είναι αναλλοίωτη σε αυτόν τον μετασχηματισμό των θέσεων και των ορμών σημαίνει ότι σε πρώτη τάξη:

$$H(\mathbf{q}(t+\delta t), \mathbf{p}(t+\delta t)) = H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$$

ή ισοδύναμα ότι

$$\begin{aligned} 0 &= H(\mathbf{q}(t+\delta t), \mathbf{p}(t+\delta t)) - H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \\ &= H\left(\mathbf{q}(t) + \delta t \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}}, \mathbf{p}(t) - \delta t \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}\right) - H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \\ &= \delta t \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) \end{aligned}$$

δηλαδή η αναλοιώτητα της H στη δυναμική της G απαιτεί να είναι

$$\{H, G\} = 0 \ .$$

Αλλά τότε θα είναι και $\{G, H\} = 0$ που σημαίνει ότι όταν η G εξελίσσεται με τη δυναμική της H θα είναι

$$\frac{dG}{dt} = 0 \ ,$$

δεδομένου ότι η G δεν έχει άμεση εξάρτηση από τον χρόνο. Δηλαδή η G διατηρείται κατά την εξέλιξη υπό την H.

3. Θα είναι

$$q_i(t) = q_i(0) + \alpha t \quad , \quad p_i(t) = p_i(0) \ .$$

και διατηρείται η συνολική ορμή $p_1 + p_2 + p_3$.

4. Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε κατευθείαν την αγκύλη, αλλά είναι μάλλον ευκολότερο να υπολογίσουμε πως μετασχηματίζονται οι θέσεις και οι ορμές σε πρώτη τάξη ως προς τον χρόνο αν η δυναμική ήταν η L_i. Σύμφωνα με τα προηγούμενα (με αθροιστική σύμβαση)

$$\begin{aligned} q_a(t+\delta t) &= q_a(t) + \delta t \frac{\partial L_i}{\partial p_a} \\ &= q_a(t) + \delta t \frac{\partial \varepsilon_{ijk} q_j p_k}{\partial p_a} \\ &= q_a(t) + \delta t \varepsilon_{ijk} q_j \delta_{ka} \\ &= q_a(t) + \delta t \varepsilon_{aij} q_j \ . \end{aligned}$$

Συνεπώς το ολικό μέτρο των θέσεων είναι

$$q_a(t+\delta t) q_a(t+\delta t) = q_a(t) q_a(t) + 2\delta t \ \varepsilon_{aij} q_j q_a = q_a(t) q_a(t)$$

Ομοίως

$$p_a(t+\delta t) p_a(t+\delta t) = p_a(t) p_a(t)$$

Συνεπώς η L_i αφήνει αναλλοίωτα τα $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ και $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ και συνεπώς την Χαμιλτονιανή H. Συμφωνα με τα προηγούμενα θα διατηρούνται και οι τρεις συνιστώσες της στροφορμής, L_i, στη δυναμική της Χαμιλτονιανής H.