ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Μηχανική ΙΙ

Θ. Αποστολάτος & Π. Ιωάννου

Κουαρτέτο βασικών θεωρημάτων της Χαμιλτονιανής δυναμικής

Ανανέωση 30/5/19

Ορισμοί

α) Οι συντεταγμένες (q_i, p_i), $\{i = 1, \cdots, n\}$, λέγονται **κανονικές συντεταγμένες** αν η χρονική τους εξέλιξη διέπεται από τις εξισώσεις του Χάμιλτον. Δηλαδή, υπάρχει μία συνάρτηση του Χάμιλτον, $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, που διέπει τη δυναμική του συστήματος και οι $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ικανοποιούν τις εξισώσεις του Χάμιλτον:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad i = 1, \cdots, n \, .$$

Σημείωση: Όταν γράφουμε τις q, p με έντονους (bold) χαρακτήρες $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ υποδηλώνουμε όλες τις συντεταγμένες των, εν αντιθέσει με τα απλά σύμβολα με δείκτες q_i, p_j που δηλώνουν συγκεκριμένες συντεταγμένες του χώρου των φάσεων. Επίσης, υποθέτουμε ότι η Χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Αυτό δεν περιορίζει ουσιαστικά τα αποτελέσματα που ακολουθούν (απλώς κάποιες προτάσεις θα πρέπει να συμπληρωθούν αναλόγως λαμβάνοντας και τη μερική παράγωγο ως προς το χρόνο).

β) Κάθε συνάρτηση, $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, των κανονικών συντεταγμένων $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ λέγεται **κανονική μεταβλητή**. Αμέσως προκύπτει ότι η χρονική εξέλιξη μιας (χρονοανεξάρτητης) κανονικής μεταβλητής γίνεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} \, .$$

γ) Ο αμφιμονοσήμαντος μετασχηματισμός των κανονικών συντεταγμένων (q_i, p_i) στις συντεταγμένες $(Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}), P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$, $\{i = 1, \cdots, n\}$, λέγεται **κανονικός μετασχηματισμός**, αν οι συντεταγμένες (Q_i, P_i) είναι και αυτές κανονικές. Δηλαδή, αν υπάρχει μία νέα συνάρτηση του Χάμιλτον $\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ τέτοια ώστε η χρονική εξέλιξη των (Q_i, P_i) να γίνεται και πάλι σύμφωνα με τις εξισώσεις του Χάμιλτον:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} \quad , \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} \quad , \quad i = 1, \cdots, n \, .$$

Σημείωση: Θα επικεντρώσουμε, για λόγους απλοποίησης, την ανάλυση σε χρονοανεξάρτητους κανονικούς μετασχηματισμούς. Και αυτό δεν περιορίζει πραγματικά τα αποτελέσματα που ακολουθούν. Απλώς, όταν ο μετασχηματισμός είναι χρονοεξαρτώμενος υπάρχουν κάποιες τεχνικές διαφοροποιήσεις.

Πρώτο Θεώρημα
Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ο μετασχηματισμός

$$(q_i, p_i) \to (Q_i(\mathbf{q},\mathbf{p}), P_i(\mathbf{q},\mathbf{p})), \;\; i = 1, \cdots, n \, ,$$

κανονικός, είναι οι αγκύλες Poisson να είναι οι κανονικές (δηλαδή να είναι αυτές που ικανοποιούν οι κανονικές μεταβλητές):

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 \;\; , \;\; \{P_i, P_j\} = 0 \;\; , \;\; \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \; .$$

Απόδειξη
Η συνάρτηση Χάμιλτον $H(\mathbf{q},\mathbf{p})$ όταν εκφράσουμε τα $(\mathbf{q},\mathbf{p}))$ συναρτήσει των $(\mathbf{Q},\mathbf{P})$ ορίζει μία νέα συνάρτηση $\tilde{H}(\mathbf{Q},\mathbf{P})$, μέσω των σχέσεων $H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = H(\mathbf{q}(\mathbf{Q},\mathbf{P}),\mathbf{p}(\mathbf{Q},\mathbf{P})) = \tilde{H}(\mathbf{Q},\mathbf{P})$ (η $\tilde{H}$ είναι ίδια αριθμητικά με την H, αλλά έχει διαφορετική συναρτησιακή μορφή ως προς τις συντεταγμένες $\mathbf{Q},\mathbf{P}$ από αυτήν που είχε η H ως προς τις $\mathbf{q},\mathbf{p}$). [1]
Για οποιαδήποτε κανονική μεταβλητή $F(\mathbf{q},\mathbf{p})$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\dot{F} &= \{F, H\} \\
&= \{F, \tilde{H}(\mathbf{Q},\mathbf{P})\} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_\alpha} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\left(\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_\beta}\frac{\partial Q_\beta}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\beta}\frac{\partial P_\beta}{\partial p_\alpha}\right) \\
&\quad - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\left(\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_\beta}\frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\beta}\frac{\partial P_\beta}{\partial q_\alpha}\right) \\
&= \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_\beta}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial Q_\beta}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\alpha}\right) \\
&\quad + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\beta}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial P_\beta}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial P_\beta}{\partial q_\alpha}\right) \\
&= \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_\beta}\{F, Q_\beta\} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\beta}\{F, P_\beta\}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς για την κανονική μεταβλητή $F = Q_i(\mathbf{q},\mathbf{p})$ έχουμε:

$$\dot{Q}_i = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_\beta}\{Q_i, Q_\beta\} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\beta}\{Q_i, P_\beta\} \, ,$$

[1] Π.χ. αν $H(x,p) = e^{x+p}$ και $X = e^x$, $P = e^p$ τότε $\tilde{H}(X,P) = XP$. Οι συναρτήσεις $H(x,p)$ και $\tilde{H}(X,P)$ παίρνουν τις ίδιες τιμές αλλά ειναι διαφορετικές συναρτήσεις, αρχικά ήταν η εκθετική συνάρτηση του αθροίσματος της θέσης και της ορμής και τελικά είναι το γινόμενο της νέας συντεταγμένης της θέσης με εκείνη της ορμής.

ενώ για την κανονική μεταβλητή $F = P_i(\mathbf{q},\mathbf{p})$:

$$\dot{P}_i \;=\; \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_\beta}\{P_i, Q_\beta\} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\beta}\{P_i, P_\beta\}\;.$$

Συνεπώς, αν είναι

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} \;\;,\;\; \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} \;\;,\;\;\; i = 1,\cdots,n\;.$$

θα πρέπει

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 \;\;,\;\; \{P_i, P_j\} = 0 \;\;,\;\; \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}\;.$$

αλλά και αντιστρόφως.

Δεύτερο Θεώρημα
Αν ο μετασχηματισμός

$$(q_i, p_i) \to (Q_i(\mathbf{q},\mathbf{p}), P_i(\mathbf{q},\mathbf{p})),\;\; i = 1,\cdots,n\;,$$

είναι κανονικός, τότε η τιμή της αγκύλης Poisson δύο οποιονδήποτε κανονικών μεταβλητών δεν εξαρτάται από το συγκεκριμένο σύνολο κανονικών συντεταγμένων στις οποίες υπολογίστηκε αυτή, δηλαδή είναι:

$$\{F, G\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = \{F, G\}_{\mathbf{Q},\mathbf{P}}\;.$$

Ισχύει και το αντίστροφο.
Απόδειξη Θα το δείξουμε αρχικά μόνο για $n = 1$.

Από τον ορισμό της αγκύλης Poisson παρατηρούμε ότι η αγκύλη ισούται με την Ιακωβιανή ορίζουσα:

$$\begin{aligned}
\{F, G\}_{q,p} &= \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial q} & \frac{\partial F}{\partial p} \\ \frac{\partial G}{\partial q} & \frac{\partial G}{\partial p} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial(F, G)}{\partial(q, p)}\;.
\end{aligned} \tag{1}$$

Όμως η Ιακωβιανή ορίζουσα

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(q, p)}$$

είναι η μεγέθυνση της επιφάνειας της απεικόνισης ενός απειροστού ορθογωνίου παραλληλογράμμου στο επίπεδο (q, p) στο επίπεδο (F, G), όπου το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του επιπέδου (q, p) με κορυφή το σημείο (q, p) και με πλευρές dq, dp μετασχηματίζεται στο παραλληλόγραμμο (που δεν είναι πλέον αναγκαστικά ορθογώνιο) του επιπέδου (F, G), που σχηματίζεται με πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν το δεδομένο σημείο $(F, G) \equiv (F(q, p), G(q, p))$ με τα σημεία

$$\left(F + \frac{\partial F}{\partial q}dq, G + \frac{\partial G}{\partial q}dq\right) \quad , \quad \left(F + \frac{\partial F}{\partial p}dp, G + \frac{\partial G}{\partial p}dp\right)\;.$$

Αλλά ο μετασχηματισμός αυτός μπορεί να γίνει κατά τμήματα, να μετασχηματίσουμε δηλαδή το απειροστό παραλληλόγραμμο από το επίπεδο (q,p) στο επίπεδο (Q,P) και έπειτα στο επίπεδο (F,G). Επειδή η συνολική μεγέθυνση $\frac{\partial(F,G)}{\partial(q,p)}$ του παραλληλογράμμου από το επίπεδο (q,p) στο επίπεδο (F,G) πρέπει να ισούται με το γινόμενο των διαδοχικών μεγεθύνσεων από το επίπεδο (q,p) στο επίπεδο (Q,P) και έπειτα από το (Q,P) στο (F,G) θα ισχύει η γνωστή ταυτότητα:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(q,p)} = \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)}\frac{\partial(F,G)}{\partial(Q,P)} \ .$$

Ομοίως, από τον διαδοχικό μετασχηματισμό απειροστού παραλληλογράμμου από το επίπεδο (q,p) στο επίπεδο (Q,P) και έπειτα στο (F,G), έχουμε ότι

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(Q,P)} = \frac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)}\frac{\partial(F,G)}{\partial(q,p)} \ .$$

Αλλά, παρατηρήσαμε ότι

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = \{Q,P\}_{q,p} = 1 \ ,$$

το οποίο είναι μονάδα διότι ο μετασχηματισμός $(q,p) \to (Q,P)$ έχει υποτεθεί κανονικός. Συνεπώς από την (1) αποδεικνύεται η πρόταση διότι:

$$\begin{aligned} \{F,G\}_{q,p} &= \frac{\partial(F,G)}{\partial(q,p)} \ , \\ &= \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)}\frac{\partial(F,G)}{\partial(Q,P)} \\ &= \frac{\partial(F,G)}{\partial(Q,P)} \\ &= \{F,G\}_{Q,P} \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Το αντίστροφο, δηλαδή αν $\{F,G\}_{q,p} = \{F,G\}_{Q,P}$, ο μετασχηματισμός $(q,p) \to (Q,P)$ είναι κανονικός, αποδεικνύεται εύκολα.

Τρίτο Θεώρημα

Ο μετασχηματισμός $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \to (\mathbf{q}(\varepsilon),\mathbf{p}(\varepsilon))$ που παράγεται από τη διαφορική σχέση:

$$\frac{dq_\alpha}{d\varepsilon} = \{q_\alpha, G\} \ , \ \frac{dp_\alpha}{d\varepsilon} = \{p_\alpha, G\} \ ,$$

με οποιονδήποτε κανονικό γεννήτορα $G(\mathbf{q},\mathbf{p})$ είναι κανονικός για κάθε τιμή του ε.

Απόδειξη

Δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός μετασχηματίζει τις κανονικές συντεταγμένες με τον παραπάνω κανόνα, η οποιαδήποτε κανονική μεταβλητή $F(\mathbf{q},\mathbf{p})$ υπολογίζετε με ολοκλήρωση της

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \{F,G\} \ .$$

Λαμβάνουμε ως κανονική μεταβλητή $F(\mathbf{q},\mathbf{p})$ την αγκύλη Poisson $\{q_\alpha, p_\alpha\}$ και υπολογίζουμε την τιμή του ρυθμού μεταβολής της αγκύλης Poisson $\{q_\alpha, p_\alpha\}$ όταν $\varepsilon = 0$. Θα είναι σύμφωνα με τον ορισμό του μετασχηματισμού:

$$\frac{d\{q_\alpha, p_\alpha\}}{d\varepsilon} = \{\{q_\alpha, p_\alpha\}, G\} \quad ,$$

και επειδή όταν $\varepsilon = 0$ οι συντεταγμένες $(q_\alpha(0), p_\alpha(0))$ είναι οι κανονικές συντεταγμένες (q_α, p_α) με αγκύλη Poisson ίση με τη μονάδα, θα είναι

$$\left.\frac{d\{q_\alpha, p_\alpha\}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \{1, G\} = 0 \quad .$$

Ομοίως

$$\left.\frac{d^2\{q_\alpha, p_\alpha\}}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = \left\{ \left.\frac{d\{q_\alpha, p_\alpha\}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, G \right\} = \{0, G\} = 0 \quad ,$$

και αντίστοιχα για κάθε τάξης παράγωγο θα είναι:

$$\left.\frac{d^n\{q_\alpha, p_\alpha\}}{d\varepsilon^n}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \; .$$

Συνεπώς από το ανάπτυγμα Taylor της αγκύλης Poisson βλέπουμε ότι παρότι οι $(\mathbf{q},\mathbf{p})$ μετασχηματίζονται στις $(\mathbf{q}(\varepsilon),\mathbf{p}(\varepsilon))$ η αγκύλη Poisson $\{q_\alpha(\varepsilon), p_\alpha(\varepsilon)\}$ είναι ίση με την αρχική $\{q_\alpha, p_\alpha\} = 1$. Το ίδιο επιχείρημα ισχύει για τον μετασχηματισμό όλων των κανονικών αγκύλων: $\{q_\alpha(\varepsilon), p_\beta(\varepsilon)\} = \{q_\alpha, p_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$, $\{q_\alpha(\varepsilon), q_\beta(\varepsilon)\} = \{q_\alpha, q_\beta\} = 0$, $\{p_\alpha(\varepsilon), p_\beta(\varepsilon)\} = \{p_\alpha, p_\beta\} = 0$ και συνεπώς ο μετασχηματισμός είναι κανονικός.

Τέταρτο Θεώρημα
Ο μετασχηματισμός $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \to (\mathbf{Q},\mathbf{P})$ είναι κανονικός, αν και μόνο αν αφήνει αναλλοίωτο τον όγκο αλλά και τον προσανατολισμό ενός χωρίου κατά τον μετασχηματισμό.

Απόδειξη Έχουμε ήδη δείξει ότι οι κανονικοί μετασχηματισμοί αφήνουν αναλλοίωτη την επιφάνεια και τον προσανατολισμό κάθε χωρίου του επιπέδου (q, p) (για συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας). Συνεπώς, η αντίστροφη πρόταση ισχύει για $n = 1$.