ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις Μηχανικής ΙΙ

28 Ιουνίου 2022

Απαντήστε στα ακόλουθα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα.
Σύνολο μονάδων 110 (άριστα το 100).
Καλή σας επιτυχία.

Πρόβλημα Α [35 μονάδες]

Ένας τροχός με ροπή αδράνειας I είναι ελεύθερος να περιστρέφεται και να ολισθαίνει δίχως τριβές κατά μήκος ενός σταθερού άξονα x, σε χώρο που **δεν** υπάρχει βαρυτικό πεδίο.

1. Να υπολογιστεί η δράση του τροχού, αν ο τροχός ξεκινήσει από το σημείο $x(0) = 0$ με γωνία στροφής $\theta(0) = 0$ και καταλήξει στη θέση $x(T) = 1$, $\theta(T) = \pi/2$ τη χρονική στιγμή $T = 1$, ακολουθώντας τη φυσική του διαδρομή.

2. Υποθέστε ότι ο τροχός ακολουθεί τη **μη** φυσική διαδρομή

$$x(t) = t + \epsilon \sin(\pi t) \ , \ \theta(t) = \frac{5\pi}{2} t + \epsilon \sin(\pi t) \ .$$

   Ελέγξτε αν η διαδρομή αυτή είναι συμβατή με την προαναφερθείσα αρχική και τελική κατάσταση του συστήματος του ερωτήματος (1). [Σκεφθείτε ότι αν ο τροχός περιστραφεί κατά $2\pi, 4\pi, \ldots$, θα βρίσκεται ακριβώς στην ίδια θέση.] Στη συνέχεια διατυπώστε την αρχή του Χάμιλτον για το σύστημα αυτό.

3. Αφού υπολογίσετε τη δράση για τη μη φυσική διαδρομή του ερωτήματος (2), ελέγξτε αν η δράση διαφοροποιείται κατά τάξη ϵ^2 από τη δράση του ερωτήματος (1) και εξηγήστε τα αποτελέσματά σας.

Πρόβλημα Β [35 μονάδες]

Σωματίδιο μάζας m και φορτίου q μπορεί να ολισθαίνει ελεύθερα (χωρίς τριβές) σε ράβδο η οποία περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα z με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Το σύστημα ράβδος-σωματίδιο βρίσκεται μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, το οποίο μπορεί να αναπαραχθεί από το + βαθμωτό δυναμικό $\Phi = 0$ και το ανυσματικό δυναμικό (σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες)

$$\mathbf{A} = \frac{B\rho}{2}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \ ,$$

όπου το $\rho = 0$ αντιστοιχεί στο σημείο της ράβδου απ' όπου διέρχεται ο άξονας περιστροφής της z. Κανένα άλλο πεδίο **δεν** υπάρχει στην περιοχή της ράβδου.

1. Βεβαιωθείτε ότι το παραπάνω ανυσματικό δυναμικό περιγράφει πράγματι ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο, μετατρέποντάς το πρώτα σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

2. Κατασκευάστε τη Λαγκρανζιανή του σωματιδίου στην περιστρεφόμενη ράβδο και γράψτε την εξίσωση κίνησης αυτού πάνω στη ράβδο.

3. Για ποια/-ες τιμή/-ες της ω, το σωματίδιο κινείται επί της ράβδου με σταθερή ταχύτητα ($\dot{\rho} =$ σταθ);

4. Εισάγετε έναν πολλαπλασιαστή Lagrange, ο οποίος να εξασφαλίζει ότι το σωματίδιο παραμένει στην θέση $\rho = \rho_0$ πάνω στην περιστρεφόμενη ράβδο. Ποια είναι η δύναμη που συνδέεται με το δεσμό αυτό ως συνάρτηση του ω;

Πρόβλημα Γ [40 μονάδες]

Δύο μη παράλληλες ευθύγραμμες ράβδοι βρίσκονται στο κατακόρυφο επίπεδο $x = 0$ και οι ευθείες τους περιγράφονται από τις εξισώσεις $\epsilon_1 : z = -a(y - b)$ και $\epsilon_2 : z = a(y + b)$, όπου οι σταθεροί συντελεστές a, b είναι και οι δύο θετικοί και μη μηδενικοί. Στις ράβδους είναι περασμένες δύο ίδιες χάντρες, μάζας m η κάθε μία, οι οποίες κινούνται ελεύθερα (χωρίς τριβές) στις ράβδους μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης, όπου η ένταση του πεδίου είναι $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$.

1. Να γραφεί η Λαγκρανζιανή του συστήματος των δύο μαζών καθώς αυτές κινούνται πάνω στις ράβδους, χωρίς τη χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange. [Υποδ.: Χρησιμοποιήστε καρτεσιανές συντεταγμένες και στη θέση των z_1, z_2 συντεταγμένων χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι αντίστοιχες μάζες.]

2. Να κατασκευαστεί η αντίστοιχη Χαμιλονιανή του συστήματος και να υπολογιστεί η $\{z_1, p_{y1}\}$, όπου p_{y1} η ορμή η συζυγής της συντεταγμένης y_1.

3. Τώρα υποθέστε ότι οι δύο χάντρες συνδέονται μεταξύ τους με ένα ελατήριο σκληρότητας k και μηδενικού φυσικού μήκους. Να βρεθεί η θέση ισορροπίας των χαντρών.

4. Χωρίς να γραμμικοποιήσετε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος γύρω από την παραπάνω θέση ισορροπίας, μαντέψτε έναν τρόπο ταλάντωσης αυτού. Μπορείτε, με απλά επιχειρήματα, να υπολογίσετε και την ιδιοσυχνότητα αυτού;

Λύσεις

Πρόβλημα Α

1. Η Λαγκρανζιανή είναι
$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$
με εξίσωση κίνησης
$$\ddot{x} = \ddot{\theta} = 0$$
και επομένως με φυσική διαδρομή (σύμφωνη με αρχική/τελική κατάσταση)
$$x(t) = t\ ,\ \theta(t) = \frac{\pi}{2}t$$
Η δράση λοιπόν θα είναι
$$S_1 = \int_0^1 (\frac{1}{2}m1^2 + \frac{1}{2}I(\pi/2)^2)dt = \frac{1}{2}m + \frac{I\pi^2}{8}$$

2. Είναι
$$x(0) = 0\ ,\ x(1) = 1\ ,\ \theta(0) = 0\ ,\ \theta(1) = 5\pi/2\ .$$
Η τελική θέση δεν διαφέρει ουσιαστικά από την δοσμένη αφού $5\pi/2 = \pi/2 + 2\pi$. Σύμφωνα λοιπόν με την αρχή του Χάμιλτον θα περίμενε κανείς να είναι $S(\epsilon) = S_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

3.
$$\begin{aligned} S(\epsilon) &= \int_0^1 dt \left[\frac{1}{2}m(1+\epsilon\pi\cos(\pi t))^2 + \frac{1}{2}I(5\pi/2 + \epsilon\pi\cos(\pi t))^2\right] \\ &= \left[\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}I(5\pi/2)^2\right] + \epsilon\,[0] + \mathcal{O}(\epsilon)^2 \end{aligned} \tag{1}$$
Η δράση αυτή διαφέρει κατά τάξη ϵ^2 από την
$$S_2 = \frac{1}{2}m + \frac{25I\pi^2}{8}$$
η οποία είναι διαφορετική από την S_1. Ο λόγος είναι ότι υπάρχουν πολλαπλές φυσικές διαδρομές.

Πρόβλημα Β

1.
$$\mathbf{A} = \frac{B\rho}{2}(-\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}}) = \frac{B}{2}(-y, x, 0)\ .$$

Όμως
$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = (B/2)\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = Bb\hat{f}z\ .$$

2.
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2) + q\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2) + (qB\rho/2)\rho\omega = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 + \frac{1}{2}qB\rho^2\omega$$

με εξίσωση κίνησης
$$m\ddot{\rho} = \rho(m\omega^2 + qB\omega)$$

3. Η παραπάνω οδηγεί σε ομαλή κίνηση εφόσον το δεξί μέρλος είναι 0, δηλαδή για
$$\omega = 0\ ,\ \omega = -qB/m\ .$$

4. Αν εισάγουμε και τον όρο $\lambda(\rho - \rho_0)$ στη Λαγκρανζιανή, η εξίσωση κίνησης θα διαμορφωθεί σε
$$m\ddot{\rho} = \rho(m\omega^2 + qB\omega) + \lambda$$

η οποία για λύση (συμβατή με το δεσμό) $\rho = \rho_0$ θα δώσει
$$0 = \rho_0(m\omega^2 + qB\omega) + \lambda$$

δηλαδή
$$\lambda = -\rho_0(m\omega^2 + qB\omega)\ .$$

Η δύναμη του δεσμού λοιπόν θα είναι
$$\mathbf{F} = \lambda\hat{\boldsymbol{\rho}} = -\rho_0(m\omega^2 + qB\omega)\hat{\boldsymbol{\rho}}\ .$$

Πρόβλημα Γ

1.
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) - mg(z_1 + z_2)\ .$$

Με δεδομένο ότι $\dot{z}_1 = -a\dot{y}_1$ και $\dot{z}_2 = a\dot{y}_2$
$$L = \frac{1}{2}m(1 + a^2)(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) - mga(y_2 - y_1) + 2mgab$$

ο τελευταίος όρος, όντας σταθερός μπορεί να αγνοηθεί.

2.

$$H = \frac{p_{y1}^2}{2m(1+a)^2} + \frac{p_{y2}^2}{2m(1+a)^2} + mga(y_2 - y_1)$$

και

$$\{z_1, p_{y1}\} = \{-a(y_1 - b), p_{y1}\} = -a$$

3.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(1+a^2)(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) - mga(y_2 - y_1) - \frac{1}{2}k\left[(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}m(1+a^2)(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) - mga(y_2 - y_1) - \frac{1}{2}k\left[(y_2 - y_1)^2 + (a(y_2 + y_1))^2\right] \\ &= \frac{1}{2}m(1+a^2)(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) - mga(y_2 - y_1) - \frac{1}{2}k\left[(1+a^2)(y_1^2 + y_2^2) + 2(a^2 - 1)y_1 y_2\right] \end{aligned}$$

Για να έχουμε ισορροπία θα πρέπει οι μερικές παράγωγοι του δυναμικού ως προς y_1, y_2 να είναι 0. Δηλαδή

$$\begin{aligned} mga + k(1+a^2)y_2 + k(a^2 - 1)y_1 &= 0 \qquad (2) \\ -mga + k(1+a^2)y_1 + k(a^2 - 1)y_2 &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

με λύση

$$0 + k\left[(1+a^2) + (a^2 - 1)\right](y_{1e} + y_{2e}) = 0 \Rightarrow y_{1e} = -y_{2e} = mga/(2k)$$

4. Μια προφανής (συμμετρική) κατάσταση ταλάντωσης είναι τα δύο σωματίδια να ανεβοκατεβαίνουν παραμένοντας στο ίδιο z με $y_2 = -y_1$. Στην περίπτωση αυτή η δύναμη μεταξύ των δύο σωματιδίων θα είναι σύμφωνα με την (3) (η άλλη εξίσωση καθίσταται ίδια με την πρώτη όταν $y_1 = -y_2$) που δίνει την $-F_1$ (όντας $\partial V/\partial y_1$)

$$\begin{aligned} m(1+a^2)\ddot{y}_1 &= mga - k((1+a^2) - (a^2 - 1))y_1 \\ &= mga - 2ky_1 \\ &= mga - 2k(y_{1e} + \delta y_1) = 2k\delta y_{1e} \qquad (4) \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση είναι μια εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή για το $\delta y_1 = y_1 - y_{1e}$ με συχνότητα

$$\omega^2 = \frac{2k}{m(1+a^2)}\ .$$

Με καθαρά νευτώνεια επεξεργασία η δύναμη του ελατηρίου στην ανωτέρω συμμετρική περίπτωση $y_1 = -y_2$) είναι

$$F_1 = -2ky_1 = -2k(y_{1e} + \delta y_1)$$

και η προβολή της επί του οδηγού είναι

$$F_{1s} = F_1 \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \ .$$

Το επιπλέον μέρος της δύναμης πέραν του σημείου ισορροπίας προκαλεί ταλάντωση και επειδή η μετατόπιση του σωματιδίου είναι

$$\delta s = \delta y_1 \sqrt{1+a^2}$$

θα είναι

$$m \frac{d^2}{dt^2} \delta s = -2k \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \delta y_1 = -2k \frac{1}{1+a^2} \delta s$$

Επομένως η συχνότητα είναι

$$\omega^2 = \frac{2k}{m(1+a^2)}$$