ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Μηχανική 2

τελευταία ανανέωση: 25 Μαρτίου, 2019

Πρόβλημα 1 Φωτεινή ακτίνα ξεκινά από το σημείο Α$(0, y_A)$ και καταλήγει στο σημείο Β $((x_B, -y_B)$. Αν στην περιοχή $y > 0$ η κίνηση του φωτός γίνεται με ταχύτητα c_1 και στην περιοχή $y < 0$ η κίνηση του φωτός γίνεται με ταχύτητα c_2 να αποδειχθεί ότι η φωτεινή ακτίνα θα διέλθει μέσω κατάλληλου σημείου Γ $(x_\Gamma, 0)$ ώστε να ισχύει ο νόμος διάθλασης του Snell.

Πρόβλημα 2 Να αποδείξετε ότι η αρχή $S = \min$ οδηγεί στο 2ο νόμο του Νεύτωνα

$$\ddot{x}(t) = F(x)/m = -\frac{1}{m}\frac{dV}{dx}$$

για ένα σωματίδιο μάζας m που κινείται (σε 1 διάσταση) εντός του δυναμικού $V(x)$ και ξεκινά από το $x(0) = x_0$ και καταλήγει στο $x(T) = x_N$ ακολουθώντας τη διαδικασία της διαμέρισης του χρόνου με ομαλές κινήσεις σε κάθε μικρό χρονικό διάστημα που είδαμε στην τάξη.

Πρόβλημα 3 Δείξτε ότι το ακρότατο $dS/dz_k = 0$ (για κάθε k) που βρήκαμε στο μάθημα αντιστοιχεί σε πραγματικό ελάχιστο της S.

Πρόβλημα 4 Στο πρόβλημα του βραχυστόχρονου που συζητήθηκε στο μάθημα:

(α) Να εκτελέσετε όλες τις πράξεις (που αφορούν στις εξισώσεις Euler-Lagrange του προβλήματος) που αφορούν τη στασιμοποίησης της ποσότητας

$$T = \int_0^L dx \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{-y}}$$

για να καταλήξετε στη διαφορική εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί η επιθυμητή $y(x)$:

$$1 + (y')^2 + 2yy'' = 0.$$

(β) Ξανακάνετε τον υπολογισμό θεωρώντας την εναλλακτική γραφή για το συνολικό χρόνο της κίνησης

$$T = \int dy \frac{\sqrt{1 + (x')^2}}{\sqrt{-y}}$$

όπου τώρα ζητούμενη είναι η $x(y)$. Δείξτε ότι με αυτό το συναρτησοειδές καταλήγετε πολύ γρηγορότερα στην α-τάξια διαφορική εξίσωση

$$\frac{x'}{\sqrt{1 + (x')^2}\sqrt{-y}} = C = \text{const}$$

(*στο σημείο αυτό έγινε λάθος στον υπολογισμό στον πίνακα*) η οποία με τη σειρά της μπορεί να πάρει τη μορφή

$$(-y)\left[1 + (y')^2\right] = C. \quad \text{(διορθώθηκε typo)}$$

Βεβαιωθείτε ότι η 2η αυτή εξίσωση είναι κατ' ουσίαν η ίδια με αυτήν του (α) ερωτήματος.

(γ) Χρησιμοποιήστε το νόμο του Snell για το φως

$$\frac{\sin\theta}{c} = \text{const}$$

που κινείται μέσα σε μέσο τέτοιο ώστε η ταχύτητα του φωτός να αλλάζει σύμφωνα με το νόμο $c = \sqrt{-y(x)}$ (όπως συμβαίνει και στο σωματίδιο εντός του βαρυτικού πεδίου) προκειμένου να κατασκευάσετε την τροχιά που ακολουθεί το φως σε ένα τέτοιο διαστρωματωμένο μέσο (δεδομένου ότι ο νόμος του Snell οδηγεί σε ελάχιστο του χρόνου κίνησης για το φως). Στην έκφραση για το νόμο του Snell, θ είναι η γωνία που σχηματίζει η φωτεινή ακτίνα κάθε φορά με τον άξονα y, οπότε $y'(x) = \cot\theta$.

Βεβαιωθείτε ότι η γεωμετρική αυτή κατασκευή του βραχυστόχρονου μέσω της κίνησης του φωτός ικανοποιεί την ίδια διαφορική εξίσωση με αυτήν που βρήκατε στα προηγούμενα ερωτήματα.

(δ) Ελέγξτε κατά πόσον η καμπύλη ημιπεριφέρεια ενός κύκλου που συνδέει αρχικό και τελικό σημείο της κίνησης (η λύση του Γαλιλαίου) δεν ικανοποιεί τη συγκεκριμένη διαφορική εξίσωση.

(ε) Ελέγξτε κατά πόσον μια κυκλοειδής καμπύλη με παραμετρική μορφή

$$x(w) = R(w - \sin w) \quad , \quad y(w) = -R(1 - \cos w)$$

ικανοποιεί τη συγκεκριμένη διαφορική εξίσωση. Ρυθμίσετε την παράμετρο R έτσι ώστε η συγκεκριμένη καμπύλη να διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$ και $(L,0)$ και υπολογίστε τον ελάχιστο χρόνο μετάβασης από το A στο B.

(στ) Διερευνήστε κατά πόσο ο χρόνος αυτός είναι ελάχιστος και δοκιμάστε να υπολογίσετε το χρόνο, αν η διαδρομή ήταν μια τεθλασμένη από το $(0,0)$ στο $(-H, L/2)$ και πίσω στο $(L,0)$. Αν ήταν ημιπεριφέρεια κύκλου (όπως πρότεινε ο Γαλιλαίος);

Πρόβλημα 5 Ελέγξτε κατά πόσον μια Λαγκρανζιανή της μορφής

$$L = f(x)\dot{x}$$

οδηγεί σε εξισώσεις Euler-Lagrange . Ποιος μετασχηματισμός βαθμονόμησης την παράγει. Τι περιγράφει μια τέτοια L;

Πρόβλημα 6 Μια Λαγκρανζιανή της μορφής $L = \dot{x}^3$ σε ποια εξίσωση Euler-Lagrange οδηγεί. Είναι η δράση στάσιμη; Είναι ελάχιστη η μέγιστη; Δοκιμάστε ως διαδρομή μεταξύ των $(0,0)$ και $(1,1)$ τη φυσική συν μια παρεκτροπή της μορφής $\eta = A\sin(\pi t)$.

Πρόβλημα 7 Μπορείτε να φτιάξετε Λαγκρανζιανή που να οδηγεί σε έναν Αριστοτέλειο δυναμικό νόμο της μορφής $m\dot{x} = F(x)$. Δοκιμάστε $L = F(\dot{x}) + G(x)$.

Πρόβλημα 8 Μπορείτε να φτιάξετε Λαγκρανζιανή που να οδηγεί σε έναν Νευτώνειο δυναμικό νόμο της μορφής $m\ddot{x} = F(x)$. Δοκιμάστε $L = F(\dot{x}) + G(x)$.

Πρόβλημα 9 Μπορείτε να φτιάξετε Λαγκρανζιανή που να οδηγεί σε έναν Νευτώνειο δυναμικό νόμο της μορφής $m\ddot{x} = H(\dot{x})$. Δοκιμάστε $L = F(\dot{x}) + G(x)$, και $L = F(\dot{x})G(t)$.

Πρόβλημα 10 *Ασκήσεις σε δείκτες.* Να υπολογίσετε τις ακόλουθες ποσότητες:

- $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$.

- $(a_i\hat{\mathbf{e}}_i) \cdot (b_j\hat{\mathbf{e}}_j)$.
- $\delta_{ij}a_i$.
- $\delta_{ij}a_i\hat{\mathbf{e}}_j$.
- $\delta_{ij}\delta ik$.
- δ_{ii}.
- $\delta_{ij}\delta_{ij}$.
- $\delta_{ij}\epsilon_{ijk}$.
- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{iab}$.
- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ija}$.
- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}$.
- $\epsilon_{ijk}a_ib_jc_k$ αν $\mathbf{a} = a_i\hat{\mathbf{e}}_i$, $\mathbf{b} = b_i\hat{\mathbf{e}}_i$, $\mathbf{c} = c_i\hat{\mathbf{e}}_i$.
- $\delta_{ij}A_{ij}$, όπου A_{ij} κάποιος πίνακας.
- $\epsilon_{ijk}A_{ij}$, όπου A_{ij} κάποιος πίνακας.