Κεφάλαιο 5

Συμμετρίες - Θεώρημα της Noether

"κάτι είναι συμμετρικό αν
δρώντας πάνω του με κάποιο τρόπο
αυτό παραμένει όπως ήταν αρχικά"
Hermann Weyl

"ἁρμονίη ἀφανής φανερῆς κρείττων"
Ηράκλειτος

5.1 Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Κυκλικές μεταβλητές

Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα της λαγκρανζιανής θεώρησης είναι ότι αποκαλύπτει με άμεσο τρόπο ποσότητες που διατηρούνται κατά την κίνηση ενός φυσικού συστήματος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση μίας γενικευμένης συντεταγμένης, έστω της q_k, η οποία δεν εμφανίζεται στη Λαγκρανζιανή. Σε αυτή την περίπτωση επειδή

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

από τις εξισώσεις Euler-Lagrange προκύπτει ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0,$$

και η γενικευμένη ορμή

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k},$$

η συζυγής της συντεταγμένης q_k, διατηρείται κατά την κίνηση. Οι συντεταγμένες που δεν εμφανίζονται στη λαγκρανζιανή συνάρτηση ονομάζονται *κυκλικές*. Με βάση την παραπάνω ανάλυση συμπεραίνουμε ότι η γενικευμένη ορμή που είναι συζυγής μιας κυκλικής μεταβλητής είναι διατηρούμενη ποσότητα.

Ως παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται σε ένα επίπεδο υπό την επίδραση ενός κεντρικού πεδίου που περιγράφεται από το δυναμικό $V(r)$, όπου r η απόσταση του σωματιδίου από το κέντρο των

Λαγκρανζιανή ανεξάρτητη της θ σωματιδίου κινούμενου σε επίπεδο

συντεταγμένων. Η λαγκρανζιανή συνάρτηση του σωματιδίου σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) είναι

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r). \tag{5.1}$$

Είναι εμφανές ότι η παραπάνω λαγκρανζιανή συνάρτηση δεν έχει καμία εξάρτηση από τη γωνία θ και συνεπώς η συζυγής ως προς τη γωνία θ ορμή

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} \ ,$$

διατηρείται κατά την κίνηση. Η διατηρούμενη αυτή ορμή δεν είναι άλλη από τη στροφορμή του σωματιδίου ως προς το κέντρο της δύναμης εκπεφρασμένη σε πολικές συντεταγμένες. Η στροφορμή, απ' ό,τι γνωρίζουμε, διατηρείται σε κεντρικά πεδία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 5.1. *Εξετάστε αν διατηρείται η στροφορμή ως προς κάποιο άλλο σημείο αναφοράς.*

Άσκηση 5.2. *Επαναλάβετε την παραπάνω ανάλυση για την κίνηση ενός σωματιδίου σε τρεις διαστάσεις. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή σε σφαιρικοπολικές συντεταγμένες. Ποια είναι τώρα η διατηρούμενη ποσότητα;*

Εισαγωγή στην έννοια του μετασχηματισμού

Η διαπίστωση ότι σε κάθε κυκλική μεταβλητή αντιστοιχεί και μία διατηρούμενη ορμή μπορεί να διατυπωθεί και με κάποιον άλλο τρόπο που θα αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμος, όταν προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε την αναζήτηση διατηρούμενων ποσοτήτων. Το γεγονός ότι η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου (5.1) δεν εξαρτάται από τη γωνία θ σημαίνει ότι, αν μετασχηματίσουμε τις γωνίες από θ σε $\Theta(\epsilon) = \theta + \epsilon$, όπου ϵ είναι μία συνεχής παράμετρος, αφήνοντας όμως τις αποστάσεις ίδιες, $r \to R = r$, η Λαγκρανζιανή παραμένει αναλλοίωτη, ανεξαρτήτως της τιμής της παραμέτρου ϵ. Ο μετασχηματισμός αυτός των συντεταγμένων είναι στην ουσία στροφή του σωματιδίου κατά γωνία ϵ. Αυτό σημαίνει ότι η Λαγκρανζιανή, υπολογισμένη στις νέες συντεταγμένες

$$L_\epsilon = L(R, \dot{R}, \Theta, \dot{\Theta}) = L(r, \dot{r}, \theta + \epsilon, \dot{\theta}) \ ,$$

είναι ίση με την αρχική Λαγκρανζιανή ($L_\epsilon = L = L_{\epsilon=0}$). Με άλλα λόγια η Λαγκρανζιανή σωματιδίου σε κεντρικό πεδίο είναι αναλλοίωτη σε στροφές, δηλαδή η Λαγκρανζιανή είναι *συμμετρική* (βλ. τον ορισμό του Weyl στην αρχή του κεφαλαίου) ως προς το συνεχή μετασχηματισμό των στροφών. Επειδή η παράμετρος ϵ είναι συνεχής, έχουμε τη δυνατότητα να παραγωγίσουμε τη Λαγκρανζιανή ως προς ϵ και να εκφράσουμε τη συμμετρία της Λαγκρανζιανής ισοδύναμα ως ακολούθως:

$$\left.\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0 \ . \tag{5.2}$$

Ο μηδενισμός της παραγώγου στο $\epsilon = 0$, αν και στο συγκεκριμένο παράδειγμα φαίνεται να μην έχει κανένα ιδιαίτερο νόημα (η παράγωγος είναι ίδια ανεξαρτήτως της τιμής του ϵ), είναι, όπως θα δούμε αργότερα, η μοναδική αναγκαία συνθήκη που εξασφαλίζει την ύπαρξη διατηρούμενων ποσοτήτων. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, αυτή η συνθήκη εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \; ,$$

μια σχέση που με τη σειρά της συνεπάγεται, όπως είδαμε, τη διατήρηση της στροφορμής p_θ. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η διατήρηση της στροφορμής πηγάζει από την αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής σε στροφές.

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια άλλο ένα παράδειγμα ώστε να μπορέσουμε να γενικεύσουμε τα προηγούμενα συμπεράσματά μας. Έστω δύο σωματίδια, τα οποία κινούνται σε μία ευθεία και αλληλεπιδρούν με κάποιο δυναμικό νευτώνειου τύπου. Αν ονομάσουμε τις θέσεις των σωματιδίων x_1 και x_2 αντίστοιχα, η Λαγκρανζιανή τούτου του συστήματος θα είναι

Παράδειγμα όπου η χωρική μετάθεση αποτελεί συμμετρία

$$L = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) - V(|x_1 - x_2|) \; . \tag{5.3}$$

Υπάρχει, άραγε, συνεχής μετασχηματισμός των συντεταγμένων, ο οποίος αφήνει αναλλοίωτη τη Λαγκρανζιανή; Πράγματι υπάρχει· πρόκειται για το μετασχηματισμό

$$x_1 \to X_1(\epsilon) \equiv x_1 + \epsilon \; , \; x_2 \to X_2(\epsilon) \equiv x_2 + \epsilon \; ,$$

ο οποίος αφήνει αναλλοίωτη τη Λαγκρανζιανή, διότι αφενός η κινητική ενέργεια δεν μεταβάλλεται ($\dot{X}_i(\epsilon) = \dot{x}_i$, με $i = 1, 2$) και αφετέρου η δυναμική ενέργεια δεν αλλάζει, αφού η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων δεν επηρεάζεται από αυτό το μετασχηματισμό. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, επειδή

$$\left.\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0 \; ,$$

ισχύει επίσης ότι

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \; , \tag{5.4}$$

αφού είναι

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} &= \left[\frac{\partial L_\epsilon}{\partial X_1(\epsilon)}\frac{\partial X_1(\epsilon)}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L_\epsilon}{\partial X_2(\epsilon)}\frac{\partial X_2(\epsilon)}{\partial \epsilon}\right]_{\epsilon=0} \\
&= \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial L}{\partial x_2} \; .
\end{aligned}$$

Έτσι, οι εξισώσεις Euler - Lagrange προστιθέμενες δίνουν

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = 0 \; . \tag{5.5}$$

Το γεγονός, λοιπόν, ότι η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη σε *μεταθέσεις* (αυτό ακριβώς πραγματοποιεί ο μετασχηματισμός που χρησιμοποιήσαμε) οδήγησε σε διατήρηση της ποσότητας

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 \; ,$$

δηλαδή της ολικής ορμής του συστήματος των σωματιδίων. Από τη νευτώνεια μηχανική γνωρίζουμε ότι η διατήρηση της ολικής ορμής είναι αποτέλεσμα του τρίτου νόμου του Νεύτωνα, τον οποίο στην ουσία έχουμε λάβει υπόψη στην κατασκευή του δυναμικού αλληλεπίδρασης, θεωρώντας ότι το V είναι συνάρτηση του $x_1 - x_2$ και όχι μια αυθαίρετη συνάρτηση των x_1, x_2. Στο παραπάνω παράδειγμα δείξαμε ότι η διατήρηση της ολικής ορμής είναι ισοδυνάμως συνέπεια της αναλλοιότητας του δυναμικού σε χωρικές μεταθέσεις. Κατ' αρχάς δεν θα μπορούσαμε να αποφανθούμε αν ο ένας από τους δύο νόμους –ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα ή η αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής ενός απομονωμένου συστήματος σε χωρικές μεταθέσεις του συστήματος συντεταγμένων– είναι πιο θεμελιώδης από τον άλλο. Εφόσον, όμως, η διατήρηση της ολικής ορμής που συνεπάγεται η αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής υπό κάποιο συνεχή μετασχηματισμό των συντεταγμένων είναι ευρύτερης εφαρμογής, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι η αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής σε κάποιους μετασχηματισμούς, ως αντανάκλαση των αντίστοιχων συμμετριών του Σύμπαντος, κατέχει πιο θεμελιώδη θέση στη φυσική από τη διατήρηση της ορμής ή άλλων γνωστών ποσοτήτων μεμονωμένα.

Η Noether διατυπώνει και αποδεικνύει το ομώνυμο θεώρημα

Η παρατήρηση αυτή, ότι δηλαδή οι διατηρούμενες ποσότητες προκύπτουν από την αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής σε κάποιους συνεχείς μετασχηματισμούς, έχει την ισχύ θεωρήματος, του επονομαζόμενου θεωρήματος της Noether (1918). Η Emmy Noether [1882-1935], μια εξαίρετη μαθηματικός και θεωρητικός φυσικός, ήταν η πρώτη που διέβλεψε και απέδειξε τη σχέση μεταξύ συμμετριών και διατηρούμενων ποσοτήτων, θέμα που ανέπτυξε κατά την υφηγεσία της στο Πανεπιστήμιο του Göttingen στη Γερμανία. Είναι ασυνήθιστο ένα τόσο σπουδαίο θεώρημα να φέρει το όνομα μιας γυναίκας. Αντίθετα από ό,τι συμβαίνει στη σημερινή εποχή, λίγες ήταν εκείνη την εποχή οι γυναίκες που σπούδαζαν και ακόμη λιγότερες εκείνες που συνέχιζαν τις σπουδές μετά το πτυχίο τους. Η κοινωνία των αρχών του 20ου αιώνα αντιμετώπιζε με προκατάληψη τις λιγοστές γυναίκες που πρόβαλλαν αξιώσεις για την κατάληψη υψηλών ακαδημαϊκών θέσεων. Στην περίπτωση, μάλιστα, της Noether η προκατάληψη αυτή εκδηλώθηκε με την άρνηση των πρυτανικών αρχών του Πανεπιστημίου του Göttingen να κάνουν δεκτή την υφηγεσία της, όταν πρωτοκατατέθηκε το 1915. Ο τίτλος του υφηγετή τελικά της απονεμήθηκε τέσσερα χρόνια αργότερα, το 1919, [1] κατόπιν πιέσεων του καθηγητή της Noether, David Hilbert [1862-1943].

Συνεχείς και διακριτές συμμετρίες

Όταν η Λαγκρανζιανή παραμένει αναλλοίωτη σε κάποιο συνεχή μετασχηματισμό, ο μετασχηματισμός αυτός λέγεται (συνεχής) συμμετρία της Λαγκρανζιανής, με την ίδια λογική που ο ορθός κύλινδρος λέμε ότι παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία, αφού δεν υφίσταται καμία αλλαγή όταν στραφεί γύρω από τον άξονά του. Στα παραδείγματα που ήδη εξετάσαμε διαφαίνεται η ανάγκη θεώρησης μετασχηματισμών που εξαρτώνται συνεχώς και με διαφορίσιμο τρόπο από κάποια παράμετρο ϵ. Οι διατηρούμε-

[1] Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη ζωή της Noether μπορείτε να διαβάσετε το άρθρο *"The Life and Times of Emmy Noether"* της N. Byers (βλ. την ιστοσελίδα *http://xxx.lanl.gov/PS_cache/hep-th/pdf/9411/9411110.pdf*)

νες ποσότητες προέκυψαν από τη διαφόριση της Λαγκρανζιανής ως προς αυτήν ακριβώς την παράμετρο. Αυτό δεν θα ήταν εφικτό αν η συμμετρία ήταν διακριτή. Ως παράδειγμα διακριτής συμμετρίας μπορούμε να θεωρήσουμε τον κατοπτρισμό των συντεταγμένων

$$x_i \to X_i \equiv -x_i$$

στο πρόβλημα των δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων. Αυτός ο μετασχηματισμός που δεν εξαρτάται από κάποια συνεχή παράμετρο αποτελεί διακριτή συμμετρία της Λαγκρανζιανής, η οποία στην κλασική μηχανική, αντίθετα απ᾽ ό,τι συμβαίνει στην κβαντική μηχανική, δεν παράγει καμία διατηρούμενη ποσότητα. Μια άλλη διακριτή συμμετρία για το ίδιο πρόβλημα με σωματίδια ίδιας μάζας είναι η εναλλαγή των σωματιδίων

$$x_1 \to x_2 \ , \ x_2 \to x_1 \ .$$

Ωστόσο και αυτή η συμμετρία δεν οδηγεί στη διατήρηση κάποιας ποσότητας στην κλασική μηχανική.

Απειροστοί και πεπερασμένοι μετασχηματισμοί

Από την παραπάνω ανάλυση φαίνεται ότι για την κατασκευή της διατηρούμενης ποσότητας αρκεί να γνωρίζουμε μόνο την απειροστή, σε πρώτη δηλαδή τάξη, εξάρτηση του μετασχηματισμού από την παράμετρο ϵ. Η απειροστή αυτή μορφή του μετασχηματισμού, όπως θα δούμε, αρκεί για να προσδιορίσουμε πλήρως το μετασχηματισμό, αφού μπορούμε βήμα-βήμα να οικοδομήσουμε το μετασχηματισμό για κάθε πεπερασμένη τιμή του ϵ.

5.2 Το θεώρημα της Noether

Σε τούτο το εδάφιο θα διατυπώσουμε το θεώρημα της Noether σε δύο φάσεις, για να γίνει πιο κατανοητό, και θα το αποδείξουμε. Στη συνέχεια θα το εφαρμόσουμε σε ένα σύστημα αλληλεπιδρώντων σωματιδίων με στόχο να εξετάσουμε από ποιες συμμετρίες πηγάζουν όλες οι γνωστές διατηρούμενες ποσότητες (ορμή, στροφορμή, ενέργεια) καθώς επίσης και κάποιες άλλες ποσότητες που συνδέονται με τους γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς.

Η έννοια του συνεχούς μετασχηματισμού των συντεταγμένων

Προτού διατυπώσουμε το θεώρημα της Noether, θα παρουσιάσουμε τη γενικότερη μορφή ενός συνεχούς μετασχηματισμού συντεταγμένων. Έστω ένα φυσικό σύστημα που περιγράφεται από τις N γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, \ldots, q_N$. Ας θεωρήσουμε επίσης N νέες συναρτήσεις $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ των αρχικών συντεταγμένων q_i καθώς και μιας νέας συνεχούς μεταβλητής ϵ, τέτοιες ώστε

$$Q_a(q_1, q_2, \ldots, q_N, \epsilon) = q_a \ , \ \text{όταν } \epsilon = 0 \ . \tag{5.6}$$

Οι συναρτήσεις αυτές θα παίξουν το ρόλο των νέων συντεταγμένων. Η παράμετρος ϵ είναι αυτή που με συνεχή τρόπο αλλάζει τις συντεταγμένες από q σε Q, ενώ, όταν $\epsilon = 0$, οι συντεταγμένες q και Q συμπίπτουν μία προς μία (βλ. Σχήμα 5.1). Ένας τέτοιος μετασχηματισμός ονομάζεται *συμμετρία της Λαγκρανζιανής*, αν η Λαγκρανζιανή στις νέες συντεταγμένες δεν αλλάζει αριθμητικά σε πρώτη τάξη ως προς την παράμετρο ϵ, δηλαδή

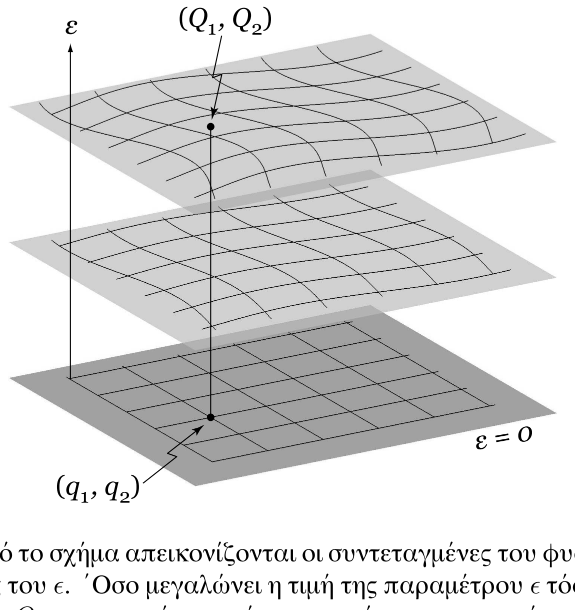
$$L\left(Q(q,\epsilon), \frac{dQ(q,\epsilon)}{dt}, t\right) = L(q,\dot{q},t) + \mathcal{O}(\epsilon^2) ,$$

όπου με τις q ή Q υπονοούμε τη N-άδα των αντίστοιχων συντεταγμένων. Η συναρτησιακή μορφή της Λαγκρανζιανής μπορεί να αλλάξει, όταν αυτή γραφεί ως συνάρτηση των Q αντί των q, αλλά η αριθμητική της τιμή θα είναι ίδια, όταν αναφέρεται στην ίδια θέση και ταχύτητα του συστήματος σε μια ορισμένη χρονική στιγμή, είτε αυτές εκφράζονται μέσω των $q, \dot{q}$, είτε μέσω των $Q, \dot{Q}$.

Επειδή η παράμετρος ϵ είναι συνεχής, ας θεωρήσουμε την οικογένεια των απειροστών μετασχηματισμών

$$Q_i(q,\epsilon \cong 0) \cong Q_i(q,0) + \epsilon \left.\frac{\partial Q_i}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} \equiv q_i + \epsilon K_i(q) ,$$

οι οποίοι προσεγγίζουν το γενικό μετασχηματισμό $Q_i(q,\epsilon)$ για μικρά ϵ. Οι



Σχήμα 5.1: Σε αυτό το σχήμα απεικονίζονται οι συντεταγμένες του φυσικού συστήματος για διάφορες τιμές του ϵ. Όσο μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου ϵ τόσο διαφοροποιούνται οι καινούργιες Q συντεταγμένες από τις αρχικές q συντεταγμένες. Για $\epsilon = 0$ (κατώτερο πλέγμα) οι q και Q συντεταγμένες συμπίπτουν, ενώ για $\epsilon \neq 0$ είναι διαφορετικές. Δηλαδή, το κάθε σημείο του χώρου (επάνω στο κατώτερο πλέγμα) μπορεί να καθοριστεί είτε μέσω των q_i, είτε μέσω των Q_i, οι οποίες όμως έχουν διαφορετικές τιμές όταν η παράμετρος ϵ είναι μη μηδενική. Έτσι, η κάθε Q_i συντεταγμένη κάποιου σημείου του χώρου μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των q_j και της παραμέτρου ϵ.

απειροστοί μετασχηματισμοί επαναλαμβανόμενοι μπορούν να οικοδομήσουν τον πεπερασμένο μετασχηματισμό. Υπό αυτή την έννοια, ο μετασχηματισμός προσδιορίζεται πλήρως από τις συναρτήσεις $K_i(q)$ με $i = 1, 2, \ldots, N$, οι οποίες λέγονται και *γεννήτορες του μετασχηματισμού*. Σε επόμενο κεφάλαιο, όπου θα αναλύσουμε διεξοδικά τη δράση του μετασχηματισμού των στροφών, θα έχουμε την ευκαιρία να παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι γεννήτορες μιας απειροστής στροφής παράγουν μια πεπερασμένη στροφή.

Είμαστε τώρα πια σε θέση να διατυπώσουμε το θεώρημα της Noether σε μια πρώτη μορφή .

Διατύπωση και απόδειξη του θεωρήματος της Noether (περιορισμένη μορφή)

Το θεώρημα της Noether: *Εάν η Λαγκρανζιανή ενός συστήματος είναι συμμετρική σε κάποιους συνεχείς απειροστούς μετασχηματισμούς K_i, τότε η ποσότητα*

$$\sum_{i=1}^{N} K_i p_i$$

διατηρείται, όπου p_i είναι η γενικευμένη ορμή ($\partial L/\partial \dot{q}_i$), συζυγής της q_i.

Απόδειξη: Αν γράψουμε τη Λαγκρανζιανή στις νέες συντεταγμένες και αναπτύξουμε ως προς την απειροστή παράμετρο ϵ, επειδή $\dot{Q} = \dot{q} + \epsilon\dot{K}$ έχουμε

$$\begin{aligned} L(Q, \dot{Q}, t) &= L(q + \epsilon K, \dot{q} + \epsilon\dot{K}, t) \\ &= L(q, \dot{q}, t) + \epsilon\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{K}_i\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\ , \end{aligned} \tag{5.7}$$

υπονοώντας την αθροιστική σύμβαση για επαναλαμβανόμενους δείκτες. Αφού η Λαγκρανζιανή είναι συμμετρική ως προς τους μετασχηματισμούς αυτούς, η πρώτης τάξης ως προς ϵ ποσότητα στο ανάπτυγμα (5.7) πρέπει να είναι ταυτοτικά μηδέν. Επομένως, η αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής συνεπάγεται

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{K}_i = 0\ . \tag{5.8}$$

Επειδή, όμως, η $q_i(t)$ είναι φυσική τροχιά του συστήματος και ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler - Lagrange, θα ισχύει ακόμη ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}\ ,$$

και ως εκ τούτου η (5.8) μπορεί να γραφεί, με χρήση της αθροιστικής σύμβασης, ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_i}K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{K}_i &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}K_i \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}K_i\right) = 0\ . \end{aligned}$$

Συνεπώς, η συμμετρία της Λαγκρανζιανής οδηγεί στη διατήρηση, κατά τη φυσική κίνηση του συστήματος, της ποσότητας

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}K_i\ , \tag{5.9}$$

δηλαδή στη διατήρηση της συνισταμένης των γενικευμένων ορμών στη διεύθυνση του εκάστοτε γεννήτορα της συμμετρίας.

5.3 Διατήρηση ορμής και στροφορμής

Υπό το πρίσμα του θεωρήματος της Noether ας επανεξετάσουμε το παράδειγμα που συναντήσαμε στο εισαγωγικό εδάφιο του παρόντος κεφαλαίου σε γενικότερη, τώρα, μορφή. Έστω N σωματίδια που αλληλεπιδρούν με νευτώνειες δυνάμεις, δηλαδή συντηρητικές δυνάμεις που ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα. Η Λαγκρανζιανή αυτού του συστήματος είναι

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{x}}_i|^2 - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \,. \tag{5.10}$$

Το διπλό άθροισμα δικαιολογείται από το γεγονός ότι πρέπει να ληφθούν οι δυναμικές ενέργειες αλληλεπίδρασης για κάθε ζεύγος σωματιδίων. Το $j > i$ στη δεύτερη άθροιση εξασφαλίζει ότι κάθε ζεύγος σωματιδίων λαμβάνεται μόνο μία φορά. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς, ότι, αν εκτελέσει τον ακόλουθο μετασχηματισμό συντεταγμένων

Απλές μεταθέσεις των χωρικών συντεταγμένων

$$\vec{X}_i = \vec{x}_i + \epsilon \vec{r} \,, \tag{5.11}$$

δηλαδή αν μετατοπίσει όλα τα σωματίδια στη διεύθυνση του $\vec{r}$, η Λαγκρανζιανή δεν θα μεταβληθεί. Παρατηρούμε ότι σε αυτόν το μετασχηματισμό οι ταχύτητες παραμένουν αμετάβλητες, αφού το $\vec{r}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα· αμετάβλητες επίσης παραμένουν και οι σχετικές αποστάσεις μεταξύ των σωματιδίων. Ποια διατηρούμενη ποσότητα κρύβεται πίσω από αυτήν τη συμμετρία της Λαγκρανζιανής; Ο γεννήτορας του μετασχηματισμού είναι ο

$$\vec{K}_i = \left. \frac{\partial \vec{X}_i}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \vec{r} \,.$$

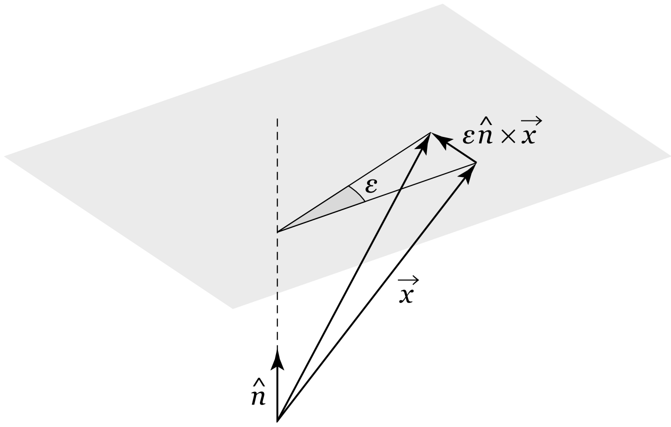
Αφού το συνολικό πλήθος των συντεταγμένων του συστήματος είναι $3N$ –τρεις για κάθε σωματίδιο–, υπάρχουν $3N$ γεννήτορες, τους οποίους για ευκολία έχουμε ομαδοποιήσει σε N τριάδες γράφοντάς τους ως διανύσματα. Τώρα, είναι εύκολο να διακρίνουμε τη διατηρούμενη ποσότητα. Πρόκειται για την

$$\vec{r} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} = \vec{r} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{x}}_i = \vec{r} \cdot \vec{P}_{\text{ολ}} \,. \tag{5.12}$$

Η παράγωγος ως προς το διάνυσμα $\vec{x}_i$ που εμφανίζεται στις παραπάνω σχέσεις μπορεί να θεωρηθεί ως ένας συμβολικός τρόπος γραφής ενός διανύσματος, οι συνιστώσες του οποίου είναι οι παράγωγοι ως προς την κάθε συνιστώσα του $\vec{x}_i$. Με αυτόν το συμβολισμό το άθροισμα όλων των γινομένων των γεννητόρων με τις αντίστοιχες ορμές έχει αντικατασταθεί με ένα εσωτερικό γινόμενο.

Η διατήρηση της ορμής ως συνέπεια της ομογένειας του χώρου

Αφού το διάνυσμα που ορίζει τη χωρική μετάθεση $\vec{r}$ είναι αυθαίρετο, η συνολική ορμή, $\vec{P}_{\text{ολ}}$, του συστήματος των σωματιδίων διατηρείται σταθερή σε κάθε κατεύθυνση. Η διατήρηση της ορμής είναι αποτέλεσμα του



Σχήμα 5.2: Το διάνυσμα $\vec{x}$ στρέφεται απειροστά κατά γωνία ϵ γύρω από τον άξονα $\hat{n}$.

ότι οι χωρικές μεταθέσεις αποτελούν συμμετρία της Λαγκρανζιανής, γεγονός το οποίο με τη σειρά του οφείλεται στην *ομογένεια του χώρου*, στο ότι δηλαδή όλα τα σημεία του χώρου είναι ισοδύναμα. Επομένως, αν μεταφέρουμε ένα σύστημα σωματιδίων από μια περιοχή του χώρου σε άλλη, το σύστημα θα συμπεριφερθεί και θα εξελιχθεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Σύμφωνα με τις σύγχρονες αντιλήψεις περί διαστελλόμενου Σύμπαντος ο χώρος, αν και είναι καμπύλος, είναι και πάλι ομογενής· [2] η κατανομή των σμηνών των γαλαξιών είναι σε πολύ μεγάλο βαθμό ομοιόμορφη και έτσι σε όποια θέση του Σύμπαντος και αν μεταφερθούμε θα παρατηρούμε την ίδια κατανομή ύλης γύρω μας. Αξίζει να επισημάνουμε ότι τούτο αποτελεί ένα από τα θεμελιώδη ερωτήματα της σύγχρονης αστροφυσικής: γιατί το Σύμπαν εμφανίζει τέτοια ομοιομορφία; Πώς κατάφερε να εξαλείψει σχεδόν ολοκληρωτικά κάθε ανομοιομορφία που πιθανώς υπήρχε στα πρώιμα στάδια της διαστολής του;

Σε αυτό το σημείο της μελέτης μας αρχίζουμε να υποψιαζόμαστε την ύπαρξη κάποιας άλλης δυνατής συμμετρίας της Λαγκρανζιανής (5.10) του συστήματος των N σωματιδίων. Αν στρέψουμε το σύστημα συντεταγμένων, θα αλλάξει η θέση των συντεταγμένων των σωματιδίων, αλλά οι αποστάσεις μεταξύ αυτών, ως μήκη διανυσμάτων, θα παραμείνουν σταθερές, ενώ οι ταχύτητες των σωματιδίων, ως μήκη διανυσμάτων, θα διατηρήσουν το μέτρο τους. Οι στροφές, λοιπόν, αποτελούν συμμετρία της Λαγκρανζιανής. Ας κατασκευάσουμε το γεννήτορα των στροφών, για να δούμε σε τι διατηρούμενες ποσότητες θα οδηγηθούμε.[3] Σε επόμενο κεφάλαιο, όπου θα αναλύσουμε διεξοδικά το θέμα των στροφών, θα δείξουμε ότι οι συντεταγμένες στην περίπτωση των απειροστών στροφών μεγέθους $\Delta\phi = \epsilon$ γύρω από τον άξονα $\hat{n}$ μετασχηματίζονται ως ακολούθως:

Η διατήρηση της στροφορμής ως συνέπεια της ισοτροπίας του χώρου

Απειροστές στροφές

$$\vec{X} = \vec{x} + \epsilon\hat{n} \times \vec{x} \,. \tag{5.13}$$

[2] Ομογενής είναι και η επιφάνεια μίας σφαίρας, τα σημεία της οποίας δεν διακρίνονται το ένα από το άλλο, παρόλο που η σφαίρα είναι καμπύλος χώρος.

[3] Κατ' αντιστοιχία με το πρώτο παράδειγμα που χρησιμοποιήσαμε στο παρόν κεφάλαιο πιθανώς να έχετε ήδη μαντέψει ότι αυτό που πρόκειται να διατηρηθεί είναι η στροφορμή κατά μήκος του άξονα της στροφής.

Θα αρκεστούμε εδώ να δικαιολογήσουμε απλώς την περίεργη αυτή μορφή του μετασχηματισμού (βλ. Σχήμα 5.2). Το απειροστό διάνυσμα που προστίθεται στην αρχική θέση είναι κάθετο και στην αρχική θέση και στο διάνυσμα $\hat{n}$, επομένως επιτυγχάνει ό,τι και μία στροφή του $\vec{x}$ γύρω από το $\hat{n}$. Το μέτρο της μετατόπισης του $\vec{x}$ είναι $\epsilon|\vec{x}|\sin(\widehat{\vec{x},\hat{n}})$, ακριβώς όση και η μετακίνηση που θα του επέφερε μια πολύ μικρή στροφή μεγέθους ϵ. Σημειώνουμε ότι οι στροφές που εκτελέστηκαν ήταν απειροστές –οι πεπερασμένου μεγέθους στροφές έχουν κάπως διαφορετική μορφή (βλ. Κεφάλαιο 6). Ο γεννήτορας, λοιπόν, των απειροστών στροφών είναι ο

$$\vec{K} = \hat{n} \times \vec{x} \, , \tag{5.14}$$

και η αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα είναι η

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} (\hat{n} \times \vec{x}_i) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} &= \sum_{i=1}^{N} (\hat{n} \times \vec{x}_i) \cdot \vec{p}_i \\ &= \hat{n} \cdot \sum_{i=1}^{N} (\vec{x}_i \times \vec{p}_i) \\ &= \hat{n} \cdot \vec{L}_{\text{ολ}} \, , \end{aligned} \tag{5.15}$$

όπου

$$\vec{L}_{\text{ολ}} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{x}_i \times \vec{p}_i) \, ,$$

η συνολική στροφορμή των σωματιδίων. Επομένως, η συνιστώσα της συνολικής στροφορμής των σωματιδίων στην κατεύθυνση του άξονα της στροφής διατηρείται. Αφού το διάνυσμα που ορίζει τη στροφή $\hat{n}$ είναι αυθαίρετο, η συνολική στροφορμή του συστήματος των σωματιδίων διατηρείται σταθερή σε κάθε κατεύθυνση.

Η συμμετρία της Λαγκρανζιανής στις στροφές είναι και πάλι συνέπεια της *ισοτροπίας του Σύμπαντος*, δηλαδή της ιδιότητας σύμφωνα με την οποία η εξέλιξη ενός απομονωμένου συστήματος δεν εξαρτάται από το πώς είναι στραμμένο το σύστημα μέσα στο Σύμπαν. Αυτό αποτελεί άλλη μια υπόθεση για τις βασικές ιδιότητες του χώρου, η οποία είναι σύμφωνη με τα παρατηρησιακά δεδομένα, αφού σε οποιαδήποτε κατεύθυνση και αν στρέψουμε το βλέμμα μας στο Σύμπαν που μας περιβάλλει, θα παρατηρήσουμε την ίδια κατανομή γαλαξιών χωρίς να υπάρχει κάποια προεξάρχουσα διεύθυνση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 5.3. *Εξετάστε ποιες συνιστώσες της στροφορμής και της ορμής διατηρούνται για ένα σωματίδιο, το οποίο κινείται μέσα στο βαρυτικό πεδίο που δημιουργεί μια ομογενής κατανομή μάζας σχήματος (α) άπειρου κυλίνδρου, (β) άπειρου κώνου, (γ) άπειρου επιπέδου, (δ) άπειρης ευθείας, (ε) ημιευθείας, (στ) ορθού πρίσματος, (ζ) ημιάπειρου επιπέδου, (η) τόρου, (θ) σφαίρας, (ι) άπειρης κυλινδρικής έλικας. [Σημείωση: Δεν είναι ανάγκη να γνωρίζετε ακριβώς το βαρυτικό πεδίο παρά μόνο τις συμμετρίες του.](L. Landau)*

5.4 Γενικό θεώρημα της Noether

Έχουμε αναφερθεί έως τώρα σε μετασχηματισμούς που μεταβάλλουν με συνεχή τρόπο τις συντεταγμένες καθορισμού της θέσης του συστήματος. Σε αυτούς τους μετασχηματισμούς ο χρόνος δεν έπαιζε κάποιον ενεργητικό ρόλο, αφού ο μετασχηματισμός δεν εξαρτιόταν από το χρόνο, ούτε και ο χρόνος υφίστατο κάποιο μετασχηματισμό. Στο παρόν εδάφιο θα επεκτείνουμε την έννοια της συμμετρίας στους γενικότερους χωροχρονικούς μετασχηματισμούς που αφήνουν αναλλοίωτη την ίδια τη δράση.[4]

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, μια οικογένεια απειροστών μετασχηματισμών της μορφής

Γενικοί χωροχρονικοί μετασχηματισμοί

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i + \epsilon K_i(q_1, q_2, \ldots, q_N, t) \ , \\ T &= t + \epsilon \tau(q_1, q_2, \ldots, q_N, t) \ , \end{aligned} \tag{5.16}$$

οι οποίοι αφήνουν τη δράση του συστήματος που περιγράφεται από τις N γενικευμένες συντεταγμένες q_a αναλλοίωτη. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να γίνει μια διευκρίνιση του τι εννοούμε με τον όρο αναλλοιότητα της δράσης. Γνωρίζουμε ότι η δράση είναι το χρονικό ολοκλήρωμα της Λαγκρανζιανής. Τι θα συμβεί, όμως, αν αλλάξουμε την παράμετρο του χρόνου; Ποια όρια ολοκλήρωσης θα χρησιμοποιήσουμε τότε για να υπολογίσουμε τη δράση στις νέες χωροχρονικές συντεταγμένες; Αντιλαμβανόμαστε ότι, αφού η δράση υπολογίζεται ως το ολοκλήρωμα της Λαγκρανζιανής μεταξύ δύο δεδομένων χωροχρονικών σημείων, δεν έχει σημασία τι χωροχρονικές συντεταγμένες θα χρησιμοποιήσουμε για να περιγράψουμε τα σημεία αυτά. Θα θεωρούμε, λοιπόν, ότι ο μετασχηματισμός (5.16) αποτελεί συμμετρία της δράσης, όταν

Συμμετρία της δράσης

$$S(Q,T) = S(q,t) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

ή ισοδυνάμως όταν

$$\int_{T_1}^{T_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dT}, T\right) \mathrm{d}T \ = \ \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}(\epsilon^2) \ . \tag{5.17}$$

Στην παραπάνω έκφραση T_1, T_2 είναι οι νέες χρονικές στιγμές που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες και στις χρονικές στιγμές του αρχικού και τελικού χωροχρονικού σημείου μεταξύ των οποίων υπολογίζεται η δράση. Έτσι

$$T_1 = T(q(t_1), t_1) \ \text{ και } T_2 = T(q(t_2), t_2) \ .$$

Ως απλό παράδειγμα χωροχρονικής συμμετρίας της δράσης ας θεωρήσουμε ένα ελεύθερο σωματίδιο στο χώρο, το οποίο, όπως γνωρίζουμε, διέπεται από τη Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{m}{2}|\dot{\vec{x}}|^2 \ .$$

[4] Θα ήταν ίσως ορθότερο να μιλάμε για συμμετρία της δράσης και όχι για συμμετρία της Λαγκρανζιανής, όπως κάναμε στο προηγούμενο εδάφιο. Δεδομένου ότι ο χρόνος δεν υφίσταται κανένα μετασχηματισμό, αν η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη σε κάποιο μετασχηματισμό, θα είναι αναλλοίωτη και η δράση.

Η δράση που αντιστοιχεί στην ομαλή και ευθύγραμμη φυσική κίνηση του σωματιδίου από το $\vec{x}_1$ τη χρονική στιγμή t_1 στο $\vec{x}_2$ τη χρονική στιγμή t_2, είναι

$$S = \frac{m}{2}\frac{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2}{t_2 - t_1} \, .$$

Παρατηρούμε ότι η δράση είναι αναλλοίωτη στον αμιγώς χρονικό μετασχηματισμό $t \to t + \epsilon$ και συνεπώς η χρονική μετάθεση αποτελεί συμμετρία της δράσης του ελεύθερου σωματιδίου. Επίσης από την έκφραση της δράσης φαίνεται ότι και οι χωρικές μεταθέσεις $\vec{x} \to \vec{x} + \epsilon\vec{a}$, όπου $\vec{a}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα, είναι και αυτές συμμμετρίες της δράσης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 5.4. *Δείξτε ότι η χρονική μετάθεση $T = t + \epsilon$, $Q = q$ μετασχηματίζει τις τροχιές έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση $Q(T) = q(T - \epsilon)$. Σχεδιάστε μια τροχιά πριν και μετά το μετασχηματισμό. Δείξτε ακόμη ότι για όλες τις χρονοανεξάρτητες Λαγκρανζιανές $L(q, \dot{q})$ η χρονική μετάθεση ικανοποιεί τη σχέση (5.17) και επομένως είναι συμμετρία της δράσης.*

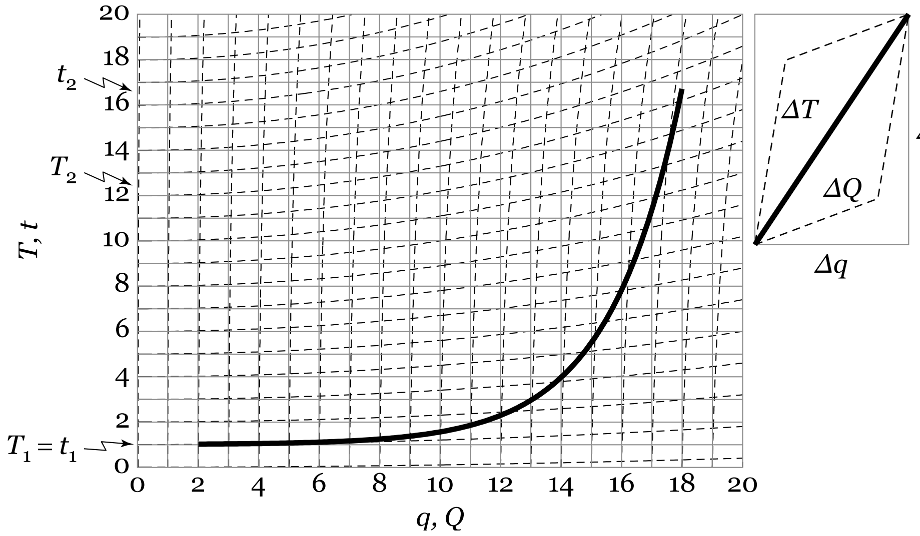
Η παράγωγος dQ/dT, που εμφανίζεται στην (5.17) ως μία από τις μεταβλητές της νέας Λαγκρανζιανής, είναι

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dT} &= \frac{\dot{Q}}{\dot{T}} \\
&= \frac{\dot{q} + \epsilon\dot{K}}{1 + \epsilon\dot{\tau}} \\
&= \dot{q} + \epsilon(\dot{K} - \dot{\tau}\dot{q}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \, ,
\end{aligned}$$

όπου η τελεία στις παραπάνω ποσότητες, για παράδειγμα στην $\dot{Q}$, συμβολίζει ολική παραγώγιση ως προς t. Στους μετασχηματισμούς (5.16) η ϵ είναι μια απειροστή ποσότητα και ως εκ τούτου η αναλλοιότητα της δράσης (5.17) σημαίνει ότι σε πρώτη τάξη ως προς ϵ η αριστερή έκφραση για τη δράση δεν διαφέρει από τη δεξιά. Αν, τώρα, αναπτύξουμε την αριστερή έκφραση για τη δράση ως προς ϵ, φροντίζοντας να αλλάξουμε και πάλι τη μεταβλητή ολοκλήρωσης από T σε t, ώστε να αποφύγουμε την εξάρτηση των ορίων από το ϵ, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
S(Q,T) &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \frac{dT}{dt} L\left(q + \epsilon K, \frac{\dot{q} + \epsilon\dot{K}}{\dot{T}}, t + \epsilon\tau\right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, (1 + \epsilon\dot{\tau}) \left[L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q_i}\epsilon K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\epsilon(\dot{K}_i - \dot{q}_i\dot{\tau}) + \frac{\partial L}{\partial t}\epsilon\tau\right] \\
&+ \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= S(q,t) + \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \left[L\dot{\tau} + \frac{\partial L}{\partial q_i}K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\dot{K}_i - \dot{q}_i\dot{\tau}) + \frac{\partial L}{\partial t}\tau\right] \\
&+ \mathcal{O}(\epsilon^2) \, . \qquad (5.18)
\end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα τάξης ϵ που εμφανίζεται στην τελευταία έκφραση της σχέσης (5.18) θέλουμε να είναι μηδενικό ώστε η δράση να είναι συμμετρική



Σχήμα 5.3: Στο ίδιο διάγραμμα παριστάνονται οι ισο-q και οι ισο-t γραμμές (συνεχείς γραμμές) καθώς και οι ισο-Q και οι ισο-T γραμμές (διακεκομμένες γραμμές). Η φυσική διαδρομή του συστήματος (παχιά καμπύλη) είναι προφανώς ίδια, είτε χρησιμοποιήσει κανείς τις παλιές είτε τις καινούργιες χωροχρονικές συντεταγμένες για να την περιγράψει. Απλώς στον υπολογισμό της δράσης τα όρια ολοκλήρωσης θα αλλάξουν από t_1, t_2 σε T_1, T_2 και η Λαγκρανζιανή θα πρέπει να υπολογίζεται σε διαφορετικές συντεταγμένες (Q, T) αντί των (q, t) και σε διαφορετικές ταχύτητες dQ/dT αντί των dq/dt, όπως φαίνεται στη μεγεθυσμένη λεπτομέρεια του σχήματος.

στο μετασχηματισμό που θεωρήσαμε. Στηριζόμενοι στις εξισώσεις Euler - Lagrange που ισχύουν για τη φυσική διαδρομή του συστήματος, δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι η ολοκληρωτέα ποσότητα στη σχέση (5.18) που προσδιορίζει τη διαφορά τάξης ϵ των δράσεων είναι μια τέλεια χρονική παράγωγος

$$L\dot{\tau} + \frac{\partial L}{\partial q_i}K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\dot{K}_i - \dot{q}_i\dot{\tau}) + \frac{\partial L}{\partial t}\tau = \frac{d}{dt}\left[K_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\tau\right] . \tag{5.19}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 5.5. *Επιβεβαιώστε την ισότητα (5.19). [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις Euler - Lagrange όπου χρειάζεται.]*

Ο μηδενισμός του ολοκληρώματος της τέλειας χρονικής παραγώγου (5.19) συνεπάγεται ότι η ποσότητα

$$K_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\tau , \tag{5.20}$$

λαμβάνει την ίδια τιμή στην αρχική και την τελική χρονική στιγμή t_1 και t_2 αντίστοιχα. Επειδή όμως οι χρονικές στιγμές t_1 και t_2 είναι αυθαίρετες, συμπεραίνουμε ότι η ποσότητα (5.20) διατηρείται κατά την κίνηση. Η διατηρούμενη ποσότητα (5.20) μπορεί πιο κομψά, αλλά και πιο φυσικά, να γραφεί ως

$$K_i p_i - E\tau \ , \tag{5.21}$$

όπου p_i είναι οι γενικευμένες ορμές και E η γενικευμένη ενέργεια (το ολοκλήρωμα του Jacobi) του συστήματος. Σε περίπτωση συμμετρίας που αφορά μόνο σε μετασχηματισμούς των χωρικών συντεταγμένων (όταν $\tau = 0$) λαμβάνουμε τη διατήρηση της ποσότητας $K_i p_i$ που είδαμε σε προηγούμενο εδάφιο, ενώ σε συμμετρία που αφορά σε μετασχηματισμό μόνο του χρόνου (όταν $K_i = 0$) προκύπτει η διατήρηση της ενέργειας.

Η διατήρηση της ενέργειας ως συνέπεια της ομογένειας του χρόνου

Σε αυτό το σημείο είμαστε σε θέση να απαντήσουμε αμέσως στο ερώτημα ποια διατηρούμενη ποσότητα συνεπάγεται η μη εκπεφρασμένη εξάρτηση από το χρόνο μιας Λαγκρανζιανής. Αν θεωρήσουμε το μετασχηματισμό

$$Q_i = q_i \ , \ T = t + \epsilon \ , \tag{5.22}$$

δηλαδή $K_i = 0, \ \tau = 1$, που προκαλεί μετάθεση στο χρόνο δίχως καμία μεταβολή των συντεταγμένων, παρατηρούμε ότι η αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα είναι η

$$E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \ . \tag{5.23}$$

Με άλλα λόγια, συστήματα που είναι συμμετρικά σε μεταθέσεις στο χρόνο διατηρούν την ενέργειά τους. Για την ακρίβεια, η ποσότητα (5.23) συμπίπτει με την ενέργεια του συστήματος, *κινητική + δυναμική*, εφόσον η κινητική ενέργεια περιγράφεται από την κλασική διγραμμική μορφή

$$\frac{1}{2}A_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$$

και η δυναμική ενέργεια είναι συνάρτηση μόνο των θέσεων.

Αυτή, λοιπόν, είναι και η βαθύτερη αιτία στην οποία οφείλεται η διατήρηση της ενέργειας: η *ομογένεια του χρόνου*, το γεγονός δηλαδή ότι καμία χρονική στιγμή δεν ξεχωρίζει από τις άλλες και ως εκ τούτου η μετάθεση ενός συστήματος στο χρόνο αφήνει αναλλοίωτη τη Λαγκρανζιανή του συστήματος. Επειδή μάλιστα σε θεμελιώδες επίπεδο αυτό ισχύει για όλες τις Λαγκρανζιανές των φυσικών συστημάτων, η διατήρηση της ενέργειας έχει τόσο ευρεία εφαρμογή. Ίσως, αν δεν υπήρχε αυτή η συμμετρία των φυσικών συστημάτων σε μεταθέσεις στο χρόνο και οι φυσικοί νόμοι άλλαζαν με την πάροδο του χρόνου, η φυσική να μην είχε το χαρακτήρα επιστήμης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 5.6. *Δείξτε ότι για Λαγκρανζιανές της μορφής*

$$L = \frac{1}{2}A_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - V(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

η ποσότητα της έκφρασης (5.23) δεν είναι τίποτε άλλο παρά η ενέργεια του συστήματος.

5.5 Η διατηρούμενη ποσότητα που παράγεται από τη συμμετρία στους γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς

Εκτός από τις προαναφερθείσες οφθαλμοφανείς συμμετρίες του Σύμπαντος (ομογένεια και ισοτροπία χώρου, ομογένεια χρόνου) υπάρχει, όπως έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 3, και μία συμμετρία που δεν είναι γεωμετρική, αλλά έχει άμεσο φυσικό περιεχόμενο: το γεγονός ότι, αν αλλάξουμε αδρανειακό σύστημα αναφοράς και περιγράψουμε την κίνηση του συστήματος στο νέο σύστημα, οι εξισώσεις κίνησης δεν αλλάζουν. Ο μετασχηματισμός που αντιστοιχεί στη γαλιλαϊκή σχετικότητα[5] είναι

$$\vec{X}_i(t) = \vec{x}_i(t) + \epsilon\vec{v}t \ , \tag{5.24}$$

όπου επιλέξαμε να γράψουμε τη σχετική ταχύτητα των δύο εν λόγω αδρανειακών συστημάτων ως $\epsilon\vec{v}$, ώστε να μπορούμε να τη μεταβάλλουμε με συνεχή τρόπο μέσω της παραμέτρου ϵ. Ας ελέγξουμε στη συνέχεια αν ο μετασχηματισμός αυτός αποτελεί συμμετρία της δράσης ενός απομονωμένου μηχανικού συστήματος αλληλεπιδρώντων σωματιδίων. Προφανώς οι αποστάσεις μεταξύ των σωματιδίων δεν θα μεταβληθούν, αν μεταβούμε σε κάποιο άλλο σύστημα αναφοράς και συνεπώς δεν θα μεταβληθεί ούτε η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σωματιδίων. Η κινητική ενέργεια, όμως, των σωματιδίων θα μεταβληθεί, αφού

Ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου

$$\dot{\vec{x}}_i \to \dot{\vec{x}}_i + \epsilon\vec{v} \ .$$

Επομένως, η κινητική ενέργεια όλου του συστήματος θα αλλάξει σε

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 \to \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 + \epsilon\vec{v} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{x}}_i + \mathcal{O}(\epsilon^2) \ . \tag{5.25}$$

Τον τελευταίο όρο δεν χρειάζεται να τον γράψουμε αναλυτικά, αφού είναι τάξης $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ και επομένως μας είναι αδιάφορος για απειροστούς μετασχηματισμούς. Ταυτόχρονα, ο δεύτερος όρος (τάξης $\mathcal{O}(\epsilon)$) στο ανάπτυγμα της κινητικής ενέργειας είναι τέλεια χρονική παράγωγος της ποσότητας

$$\epsilon\vec{v} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i \ ,$$

με αποτέλεσμα η αλλαγή της δράσης που θα προκύψει από την αλλαγή του συστήματος αναφοράς να είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το αρχικό και το τελικό σημείο της θεωρούμενης διαδρομής,

Η γαλιλαϊκή μεταβολή της δράσης

[5]Εδώ ο όρος σχετικότητα χρησιμοποιείται όπως και στη θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν και δεν σημαίνει ότι “τα πάντα είναι σχετικά”, όπως εσφαλμένα παρερμηνεύεται η θεωρία της σχετικότητας, αλλά ότι παρατηρητές που κινούνται ο ένας σε σχέση με τον άλλο παρατηρούν ακριβώς την ίδια δυναμική εξέλιξη των φυσικών συστημάτων. Η θεωρία της σχετικότητας απλώς επέκτεινε αυτή την αρχή από τα μηχανικά σε όλα τα φυσικά συστήματα, συμπεριλαμβανομένων και των οπτικών φαινομένων.

$$S \to S + \epsilon \vec{v} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i [\vec{x}_i(t_2) - \vec{x}_i(t_1)] \ . \qquad (5.26)$$

Η νέα ποσότητα που προστίθεται στη δράση, όντας σταθερή, δεν αλλοιώνει τις εξισώσεις κίνησης, αφού η ίδια διαδρομή του συστήματος στο χώρο καθιστά και τη νέα αναβαθμονομημένη δράση στάσιμη. Ο μετασχηματισμός, λοιπόν, που εφαρμόσαμε μπορεί να θεωρηθεί μια πιο εκτεταμένη συμμετρία της δράσης· ο μετασχηματισμός δεν μεταβάλλει σε πρώτη τάξη τη δράση πέραν μιας σταθεράς. Ποια είναι, όμως, η αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα που πηγάζει από αυτήν τη συμμετρία; Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας την έκφραση (5.19) για τη διατηρούμενη ποσότητα που κατασκευάσαμε στην περίπτωση του γενικού θεωρήματος της Noether; Η απάντηση στο τελευταίο ερώτημα είναι αρνητική, αφού ο γαλιλαϊκός μετασχηματισμός δεν αφήνει εντελώς ανεπηρέαστη τη δράση. Αν συνδυάσουμε τη συγκεκριμένη αλλαγή της δράσης με εκείνη που προκύπτει από ένα γενικό μετασχηματισμό σε πρώτη τάξη ως προς ϵ (βλ. σχέ-ση (5.18)), λαμβάνουμε

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{v} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i\right] = \frac{d}{dt}\left[\vec{K}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \cdot \dot{\vec{x}}_i\right)\tau\right] \ . \qquad (5.27)$$

Ο γαλιλαϊκός μετασχηματισμός περιγράφεται από τους γεννήτορες $\vec{K}_i = \vec{v}t$ και $\tau = 0$. Έτσι, η διατηρούμενη ποσότητα είναι η

$$\vec{v} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i - \vec{v} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{x}}_i t = \vec{v} \cdot \left(M\vec{X}_{KM} - t\vec{P}_{KM}\right) \ . \qquad (5.28)$$

Σε αυτή την έκφραση έχουμε αντικαταστήσει τα αθροίσματα με τις αντίστοιχες εκφράσεις για τη θέση και την ορμή του κέντρου μάζας του συστήματος. Αν επιπλέον λάβουμε υπόψη ότι η σχετική ταχύτητα $\vec{v}$ που θεωρήσαμε μεταξύ των συστημάτων αναφοράς είναι αυθαίρετη, συμπεραίνουμε πως η διατηρούμενη ποσότητα που αναλογεί στους γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς είναι το διάνυσμα

Τι διατηρείται ως αποτέλεσμα της γαλιλαϊκής συμμετρίας;

$$M\vec{X}_{KM} - t\vec{P}_{KM} \ , \qquad (5.29)$$

η σταθερότητα του οποίου εκφράζει την ομαλή κίνηση του κέντρου μάζας με ταχύτητα $\vec{P}_{KM}/M$. Η διατηρούμενη αυτή ποσότητα δεν φαίνεται να εμπεριέχει καμία επιπλέον πληροφορία εκτός από αυτή που πηγάζει από τη διατήρηση της ορμής του συστήματος. Ο λόγος είναι ότι ο χρόνος στη νευτώνεια μηχανική είναι απόλυτος και επομένως ο γαλιλαϊκός μετασχηματισμός είναι ισοδύναμος με τη χωρική μετάθεση. Έτσι, οι δύο μετασχηματισμοί οδηγούν σε ισοδύναμες διατηρούμενες ποσότητες. Παρά ταύτα, η νέα ποσότητα (5.29) έχει πολύ πιο σαφές και ξεχωριστό φυσικό νόημα στη σχετικότητα, όπου παρουσιάζεται ως συνιστώσα της γενικευμένης στροφορμής στο χωρόχρονο (βλ. Κεφάλαιο 6).

Άσκηση 5.7. *Πόσες συνολικά διατηρούμενες ποσότητες έχουμε για ένα σύστημα αλληλεπιδρώντων σωματιδίων; Ποιοι είναι οι γεννήτορες των αντίστοιχων μετασχηματισμών; Ελέγξτε αν όλοι οι γεννήτορες, που αποτελούνται από χωρικό και από χρονικό μέρος, αντιμετατίθενται μεταξύ τους, δηλαδή αν η σειρά με την οποία ενεργούν αυτοί οι γεννήτορες έχει σημασία. Γράψτε το μετασχηματισμό που μας μεταφέρει από ένα αδρανειακό σύστημα Σ_1 με καρτεσιανές συντεταγμένες σε ένα άλλο Σ_2, το οποίο (α) κινείται με ταχύτητα v σε σχέση με το πρώτο κατά μήκος του άξονα z_1, (β) τα ρολόγια του Σ_2 δεν είναι συγχρονισμένα με του Σ_1 αλλά "πάνε πίσω" σε σχέση με τα ρολόγια του Σ_1 κατά σταθερό $\Delta\tau$, (γ) οι αρχές των αξόνων τους δεν συνέπιπταν, όταν το ρολόι του πρώτου έδειχνε $t_1 = 0$, αλλά ήταν μετατοπισμένες κατά $\Delta\vec{x}$, και (δ) οι αντίστοιχοι άξονές τους δεν είναι παράλληλοι αφού οι άξονες του δεύτερου είναι στραμμένοι κατά 90° γύρω από τον άξονα z_1 σε σχέση με τους άξονες του πρώτου. Προσέξτε πώς θα γράψετε τη στροφή του μετασχηματισμού, αφού αυτή δεν είναι απειροστή αλλά πεπερασμένη.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.6 Γενικά σχόλια

Έχοντας αναλύσει τους γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς είμαστε πια σε θέση να διατυπώσουμε το γενικό θεώρημα της Noether που συνδέει συμμετρίες και διατηρούμενες ποσότητες, όταν αναφερόμαστε σε διακριτά μηχανικά συστήματα, δηλαδή σε συστήματα που αποτελούνται από πεπερασμένο πλήθος σωματιδίων.

Ποια διατηρούμενη ποσότητα συνεπάγεται η γενικότερη συμμετρία της δράσης;

Εάν ένας απειροστός συνεχής μετασχηματισμός των χωροχρονικών συντεταγμένων ενός συστήματος με γεννήτορες K_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) των γενικευμένων συντεταγμένων και τ του χρόνου αλλάζει τη δράση του συστήματος το πολύ κατά το ολοκλήρωμα μίας τέλειας χρονικής παραγώγου $dG(q,t)/dt$, τότε υπάρχει μια ποσότητα η οποία διατηρείται κατά την κίνηση του συστήματος. Αυτή είναι η

$$K_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \tau - G \,. \tag{5.30}$$

Η καινούργια αυτή ποσότητα G που αφαιρείται από τη διατηρούμενη ποσότητα που κατασκευάσαμε παραπάνω (βλ. σχέση (5.19)) είναι απλώς συνέπεια του γεγονότος ότι οι δύο δράσεις, προ και μετά το μετασχηματισμό, δεν συμπίπτουν, όπως στη (5.17), αλλά διαφέρουν κατά το ολοκλήρωμα της τέλειας χρονικής παραγώγου dG/dt. Έτσι, η μεταβολή της δράσης, αντί να ισούται με τη μεταβολή της ποσότητας εντός των τετράγωνων αγκυλών της σχέσης (5.19), ισούται με τη μεταβολή της G. Εξισώνοντας αυτές τις δύο χρονικές παραγώγους, συμπεραίνουμε ότι η διαφορά των δύο ποσοτήτων είναι μια σταθερά.

Το θεώρημα της Noether, όπως διατυπώθηκε από την ίδια, αναφέρεται σε πεδία και όχι σε διακριτά συστήματα· αυτός εξάλλου είναι και ο

Θεώρημα της Noether και πεδία

λόγος που συναντάμε το θεώρημα της Noether κυρίως σε βιβλία θεωριών πεδίου. ομαδοθεωρητικών συμμετριών της δράσης πεδίων με αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες, όπως για παράδειγμα η συμμετρία βαθμίδας U(1) του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, η οποία σχετίζεται με τη διατήρηση του φορτίου. Η επέκταση της εφαρμογής του θεωρήματος της Noether σε διακριτά συστήματα είναι άμεση και οδηγεί με σχετικά απλό τρόπο στη σύνδεση των γνωστών από τη μηχανική διατηρούμενων ποσοτήτων με τις συμμετρίες του Σύμπαντος, προσδίδοντας στις πρώτες βαθύτερο νόημα.

Noether και γενική σχετικότητα

Αξίζει να αναφερθεί ότι η Noether, δουλεύοντας πάνω στο ομώνυμο θεώρημα, έδωσε απαντήσεις σε δύσκολα νοητικά προβλήματα που εμφανίστηκαν τα πρώτα χρόνια μετά το 1915, όταν ο Hilbert και ο Αϊνστάιν, σχεδόν ταυτόχρονα, αλλά ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, διατύπωσαν τη γενική θεωρία της σχετικότητας. Παράδειγμα ενός τέτοιου προβλήματος ήταν η φαινόμενη μη διατήρηση τοπικά της ενέργειας και της ορμής. Η Noether όχι μόνο έδειξε πώς θα πρέπει να αναδιατυπωθούν οι αντίστοιχοι νόμοι διατήρησης στη σχετικότητα, αλλά και κατασκεύασε άλλο ένα διαφωτιστικό, ανάλογο με τη σχετικότητα, παράδειγμα όπου η νευτώνεια μορφή των νόμων διατήρησης δεν ίσχυε.

5.7 Προβλήματα

1. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή που διέπει τη φυσική κίνηση σωματιδίου στο ομογενές και κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας. Υπολογίστε τη συνάρτηση της δράσης που αντιστοιχεί στη φυσική κίνηση συναρτήσει της αρχικής θέσης z_1 και του χρόνου t_1 και της τελικής θέσης z_2 και του χρόνου t_2. Από την έκφραση αυτή προσδιορίστε τις συμμετρίες της δράσης και τις αντιστοιχούσες διατηρούμενες ποσότητες στη περίπτωση αυτή καθώς και στην ειδική περίπτωση που δεν υπάρχει πεδίο βαρύτητας ($g = 0$).

2. Θεωρήστε τη Λαγκρανζιανή ελεύθερου σωματιδίου στο ιδιόμορφο Σύμπαν που συναντήσαμε στο Πρόβλημα 3 του Κεφαλαίου 3, στο οποίο η ισοτροπία περιορίζεται σε διευθύνσεις μόνο γύρω από τον άξονα z. Σκεφτείτε ποιοι μετασχηματισμοί συντεταγμένων αποτελούν συμμετρίες της Λαγκρανζιανής και στη συνέχεια βρείτε τις αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες.

3. Κατασκευάστε τις *ισοδρασικές* καμπύλες (καμπύλες σταθερής δράσης) σε ένα διάγραμμα $x - t$ για ένα ελεύθερο σωματίδιο που κινείται σε μία διάσταση και τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = 0$. Σε αυτό το διάγραμμα έχει νόημα να υπολογίσει κανείς τη δράση μόνο για τις φυσικές διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει το σωματίδιο. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε αυτό; Αν, τώρα, θεωρήσουμε έναν απειροστό μετασχηματισμό της θέσης και του χρόνου
$$x \to x' = x\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \ , \ t \to t' = t(1+\epsilon) \ ,$$
παρατηρούμε ότι η δράση δεν μεταβάλλεται σε πρώτη τάξη ως προς ϵ. Αποδείξτε ότι αυτό συμβαίνει, υπολογίζοντας απευθείας τη μεταβολή της δράσης ελεύθερου σωματιδίου σε πρώτη τάξη ως προς ϵ. Υπό την προϋπόθεση ότι ο μετασχηματισμός αυτός αφήνει αναλλοίωτη τη δράση υπολογίστε την αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα. Τι φυσικό νόημα έχει αυτή η διατηρούμενη ποσότητα;

4. Θεωρήστε μία Λαγκρανζιανή της μορφής $L = a(\dot{x}/x)^2$. Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι η Λαγκρανζιανή αυτή είναι συμμετρική σε μετασχηματισμούς της μορφής $x \to x' = x(1+\epsilon)$. Υπολογίστε την αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα και στη συνέχεια βρείτε μέσω αυτής την εξίσωση κίνησης. Δοκιμάστε να βρείτε την εξίσωση κίνησης από την εξίσωση Euler - Lagrange. Ποιος είναι ο ευκολότερος τρόπος;

5. Δύο σωματίδια είναι υποχρεωμένα να κινούνται στην επιφάνεια μιας σφαίρας με ακτίνα 1. Τα δύο σωματίδια είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με ελατήριο σταθεράς k, το οποίο κείται επί της σφαίρας και έχει μηδενικό φυσικό μήκος. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος σε σφαιρικές συντεταγμένες και δείξτε ότι είναι συμμετρική σε μετασχηματισμούς των αζιμουθιακών γωνιών $\phi_i \to \phi_i' =$

$\phi_i + \epsilon$, όπου $i = 1, 2$ ο δείκτης του εκάστοτε σωματιδίου. Ποια είναι η αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα; Ποια είναι η φυσική της σημασία;

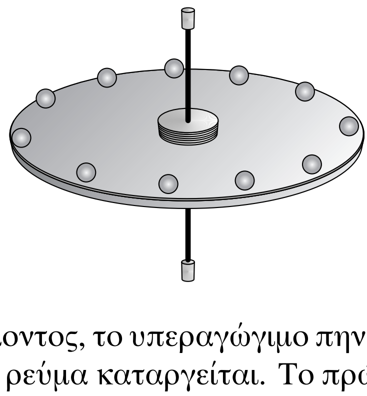
6. Η εξίσωση κίνησης του ισότροπου αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση $m\ddot{\vec{x}} + 2\gamma\dot{\vec{x}} + k\vec{x} = \vec{0}$ είναι αναλλοίωτη στις στροφές. Διατηρείται η στροφορμή $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$; Γράψτε την εξίσωση εξέλιξης της στροφορμής και λύστε την. Αποδείξτε ότι μια Λαγκρανζιανή που παράγει τη δυναμική του συστήματος είναι η

$$L = e^{2\gamma t/m}\frac{1}{2}(m\dot{\vec{x}}^2 - k\vec{x}^2)\ .$$

   Η Λαγκρανζιανή αυτή, όπως φαίνεται, είναι συμμετρική σε στροφές. Μήπως διατηρείται, λοιπόν, η στροφορμή; Εφαρμόζοντας το θεώρημα της Noether προσδιορίστε τη διατηρούμενη ποσότητα που αντιστοιχεί σε αυτή τη συμμετρία.

7. Δύο σωματίδια αλληλεπιδρούν με νευτώνειο δυναμικό και βρίσκονται υπό την επίδραση εξωτερικού δυναμικού της μορφής $V(\rho, z - \alpha\theta)$, όπου (ρ, θ, z) κυλινδρικές συντεταγμένες. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή και προσδιορίστε τις διατηρούμενες ποσότητες.

8. Ο Feynman στο περίφημο βιβλίο του "Lectures on Physics" περιγράφει το εξής παράδοξο: ένας δίσκος μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον κατακόρυφο άξονά του. Στην περιφέρεια του δίσκου και σε σταθερή απόσταση η μια από την άλλη είναι τοποθετημένες μια σειρά από όμοιες θετικά φορτισμένες σφαίρες. Στο κέντρο του δίσκου είναι στερεωμένο ένα πηνίο από υπεραγώγιμο υλικό, το οποίο διαρρέεται από ρεύμα. Αυξάνοντας τη θερμοκρα-



   σία του περιβάλλοντος, το υπεραγώγιμο πηνίο αποκτά αντίσταση οπότε σύντομα το ρεύμα καταργείται. Το πρώην σταθερό μαγνητικό πεδίο αλλάζει και η αλλαγή αυτή συνεπάγεται την εμφάνιση ηλεκτρικού πεδίου που ασκώντας ροπή στις φορτισμένες σφαίρες θέτει το δίσκο σε περιστροφή. Από την άλλη πλευρά η στροφορμή του δίσκου δεν πρέπει να μεταβάλλεται από τη στιγμή που δεν υπάρχει εξωτερικό πεδίο δυνάμεων. Θα αρχίσει, λοιπόν, να περιστρέφεται ο δίσκος ή όχι; Αντιμετωπίστε το πρόβλημα ως εξής: (α) Θεωρήστε το δίσκο και το πηνίο αβαρή και υποθέστε ότι ολόκληρη η μάζα του συστήματος βρίσκεται στις φορτισμένες σφαίρες, οι οποίες είναι τοποθετημένες στην περιφέρεια του δίσκου. Η θεώρηση αυτή απλώς διαφοροποιεί την τιμή της ροπής αδράνειας του δίσκου χωρίς να αλλοιώνει τη φυσική του συστήματος. Γράψτε σε κυλινδρικές συντεταγμένες τη Λαγκρανζιανή του συστήματος, λαμβάνοντας υπόψη την αξονική συμμετρία του και αγνοώντας το ηλεκτρικό πεδίο των σφαιρών, το οποίο εξάλλου θα παρέμενε σταθερό κατά την περιστροφή του δίσκου, αν αντικαθιστούσαμε τις σφαίρες με ένα συνεχή φορτισμένο δακτύλιο. (β) Η γωνία περιστροφής είναι κυκλική μεταβλητή. Ποια ποσότητα διατηρείται ως συνέπεια αυτού; (γ) Διατηρείται η κλασική στροφορμή του δίσκου; Τι θα συμβεί, όταν το ανυσματικό δυναμικό μαζί με το μαγνητικό πεδίο εξαφανιστούν;

9. *Το αντίστροφο του θεωρήματος της Noether.* Μέχρι τώρα έχουμε θεωρήσει μετασχηματισμούς της μορφής $q_i^\epsilon = q_i + \epsilon K_i(q,t)$. Αυτοί οι μετασχηματισμοί λέγονται σημειακοί. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε και γενικότερους μετασχηματισμούς της μορφής $q_i^\epsilon = q_i + \epsilon K_i(q,\dot{q},t)$, που εξαρτώνται και από το $\dot{q}$. Καλείστε να αποδείξετε ότι κάθε διατηρούμενη ποσότητα προκύπτει από μία συμμετρία της Λαγκρανζιανής στους γενικότερους μετασχηματισμούς $q_i^\epsilon = q_i + \epsilon K_i(q,\dot{q},t)$. (α) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός της μετάθεσης του χρόνου $q_i^\epsilon(t) = q_i(t+\epsilon)$ είναι στην ουσία ένας τέτοιος γενικός μετασχηματισμός, ο οποίος στην περίπτωση των χρονοανεξάρτητων Λαγκρανζιανών οδηγεί στη διατήρηση της ενέργειας. (β) Η γενική διατύπωση του θεωρήματος της Noether είναι ότι, αν υπάρχει μία ϵ-οικογένεια μετασχηματισμών με την ιδιότητα

$$\left.\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \frac{dG}{dt} ,$$

για κάποια $G(q,\dot{q},t)$, τότε η ποσότητα

$$F = G - p_i \left.\frac{\partial q_i^\epsilon}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0}$$

διατηρείται κατά την κίνηση. Αποδείξτε τώρα ότι, αν η ποσότητα F διατηρείται κατά την κίνηση, τότε η ϵ-οικογένεια μετασχηματισμών $K_i(q,\dot{q},t)$ που προκύπτει από τη λύση των γραμμικών εξισώσεων

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} K_i = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} ,$$

παράγει μια (ημι)συμμετρία της Λαγκρανζιανής.

10. *Το άνυσμα Runge-Lenz.* Σωματίδιο μάζας m κινείται στο κεντρικό δυναμικό $V = -k/|\vec{x}|$. Αποδείξτε κατευθείαν από τις εξισώσεις κίνησης ότι διατηρείται η στροφορμή του σωματιδίου $\vec{L}$ ως προς το κέντρο της δύναμης καθώς επίσης και το άνυσμα Runge-Lenz

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - km\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} .$$

Αποδείξτε ότι το σωματίδιο κινείται επί σταθερού επιπέδου και ότι το $\vec{A}$ κείται επί αυτού του επιπέδου. Υπολογίστε το $\vec{x} \cdot \vec{A}$ και δείξτε ότι το σωματίδιο διαγράφει στο επίπεδο αυτό την κωνική τομή

$$|\vec{x}| = \frac{|\vec{L}|^2}{mk(1 + e\cos\theta)} ,$$

με εκκεντρότητα

$$e = \frac{|\vec{A}|}{mk} .$$

Ποια είναι η διεύθυνση του $\vec{A}$; Ποια είναι η φυσική σημασία του $\vec{A}$; Χρησιμοποιήστε το προηγούμενο πρόβλημα για να προσδιορίσετε το μετασχηματισμό-συμμετρία που παράγει τη διατήρηση του ανύσματος Runge-Lenz.

11. Θεωρήστε τον τρισδιάστατο ισότροπο αρμονικό ταλαντωτή με Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{m}{2}|\dot{\vec{x}}|^2 - \frac{k}{2}|\vec{x}|^2 .$$

Αποδείξτε ότι οι εξής 6 (γιατί 6 και όχι 9;) ποσότητες διατηρούνται:

$$F_{ij} = \frac{m}{2}\dot{x}_i\dot{x}_j + \frac{k}{2}x_i x_j .$$

Προσδιορίστε τους μετασχηματισμούς-συμμετρίες που οδηγούν στη διατήρηση αυτών των ποσοτήτων.