

Κεφάλαιο 8

Μικρές Ταλαντώσεις

“Οι αριθμοί όπως και η ζωή έχουν και πραγματικό και φανταστικό μέρος.”

8.1 Μηχανικά συστήματα κοντά σε σημεία ισορροπίας

Όταν μελετάμε τον αρμονικό ταλαντωτή με τον κλασικό νευτώνειο τρόπο μαθαίνουμε στην πραγματικότητα πώς συμπεριφέρονται φυσικά συστήματα πολύ ευρύτερα από το εξιδανικευμένο μοντέλο του απλού αρμονικού ταλαντωτή με τη μάζα και το ελατήριο. Ο λόγος που το απλουστευμένο τούτο μοντέλο είναι τόσο σημαντικό και έχει τόσο ευρεία εφαρμογή οφείλεται αφενός στο ότι ένα σύστημα, όσο πολύπλοκο και αν είναι αυτό, αρκούντως κοντά στο σημείο ισορροπίας του συμπεριφέρεται γραμμικά –η δύναμη είναι ανάλογη της απομάκρυνσης του συστήματος από το σημείο αυτό– και αφετέρου στο ότι, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, η ποιοτική συμπεριφορά ενός οσοδήποτε πολύπλοκου συστήματος κοντά στο σημείο ισορροπίας του δεν διαφέρει ουσιαστικά από αυτή του απλού αρμονικού ταλαντωτή. Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε ότι η ανάλυση ενός πολύπλοκου συστήματος σε απλούς αρμονικούς ταλαντωτές, η οποία θα αποτελέσει το στόχο του παρόντος κεφαλαίου, αξιοποιείται στην κβαντομηχανική αντιμετώπιση πεδίων και οδηγεί στη θεμελιωδέστερη, έως σήμερα, προσέγγιση της λειτουργίας των βασικών αλληλεπιδράσεων.

Ας ξεκινήσουμε με ένα φυσικό σύστημα που περιγράφεται από N βαθμούς ελευθερίας και έχει κάποιο σημείο ισορροπίας, υπό την έννοια, ότι, αν το σύστημα βρεθεί στη θέση $q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_N^{(0)}$, με ταχύτητες $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dots = \dot{q}_N = 0$, θα παραμείνει για πάντα σε αυτή τη θέση. Η Λαγκρανζιανή ενός τέτοιου συστήματος, με την αθροιστική σύμβαση, θα έχει τη γενική μορφή

$$L = \frac{1}{2} M_{ij}(q_1, \dots, q_N) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q_1, q_2, \dots, q_N). \quad (8.1)$$

Το πρώτο μέρος της Λαγκρανζιανής είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος, η οποία έχει την κλασική διγραμμική μορφή ως προς τις ταχύτητες.

Μονοδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής: ένας οδηγός για πολύ ευρύτερα φυσικά συστήματα

Ισορροπία συστήματος

Ο λόγος που έχουμε γράψει την κινητική ενέργεια με μια τόσο γενικευμένη μορφή συμπεριλαμβάνοντας και μη διαγώνιους όρους ($i \neq j$) είναι ότι οι γενικευμένες συντεταγμένες που χρησιμοποιούμε μπορεί να είναι οποιοσδήποτε με αποτέλεσμα το τετράγωνο της ταχύτητας κάποιου σωματιδίου να δημιουργεί τέτοιους μη διαγώνιους διγραμμικούς όρους στις επιλεγμένες γενικευμένες ταχύτητες. Όσον αφορά στην πιθανή εξάρτηση του πίνακα \mathbf{M} από τις συντεταγμένες¹ q_k , αυτή οφείλεται και πάλι στην αυθαίρετη επιλογή των συντεταγμένων.

Ας θυμηθούμε, για παράδειγμα, ότι η κινητική ενέργεια ενός σωματιδίου σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$T = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \equiv \frac{1}{2}M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

οπότε, αν θέσουμε $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$, ο πίνακας \mathbf{M} της κινητικής ενέργειας είναι

$$\mathbf{M} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Αυτός ο πίνακας \mathbf{M} είναι βέβαια διαγώνιος αλλά εξαρτάται από τις συντεταγμένες r και θ .

Στη γραφή της κινητικής ενέργειας μέσω πινάκων πρέπει να θέσουμε ως προϋπόθεση τη συμμετρικότητα του πίνακα \mathbf{M} , δηλαδή

$$\mathbf{M}^T = \mathbf{M},$$

ή με δείκτες

$$M_{ij} = M_{ji},$$

διαφορετικά θα αναλωθούμε στην εκτέλεση ανώφελων πράξεων. Εξάλλου σε τι διαφέρει ο ασύμμετρος όρος της κινητικής ενέργειας

$$f(\mathbf{q})\dot{q}_1\dot{q}_2 + g(\mathbf{q})\dot{q}_2\dot{q}_1$$

από τον πιο κομψό και συμμετρικό όρο

$$\frac{f(\mathbf{q}) + g(\mathbf{q})}{2}(\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2\dot{q}_1);$$

Η Λαγκρανζιανή (8.1) που έχουμε ήδη γράψει δεν εγγυάται την ύπαρξη κάποιου σημείου ισορροπίας. Προφανώς, η ύπαρξη ενός τέτοιου σημείου εξαρτάται από την ακριβή μορφή της δυναμικής ενέργειας. Προκειμένου να ελέγξουμε τη συνθήκη ύπαρξης σημείου ισορροπίας, ας προχωρήσουμε στον προσδιορισμό των εξισώσεων κίνησης για το παραπάνω σύστημα. Κατ' αρχάς λόγω της συμμετρίας του πίνακα \mathbf{M} οι γενικευμένες ορμές είναι²

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{1}{2} [M_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}_i\delta_{ja} + M_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}_j\delta_{ia}] = M_{ai}(\mathbf{q})\dot{q}_i \quad (8.2)$$

¹Στο εξής θα γράφουμε \mathbf{q} υπονοώντας τη N -άδα όλων των συντεταγμένων q_k .

²Στο εξής θα χρησιμοποιούμε την αθροιστική σύμβαση για να αποφύγουμε την επαληπτική γραφή του συμβόλου της άθροισης.

και η χρονική παράγωγος αυτών είναι

$$\dot{p}_a = M_{ai}(\mathbf{q})\ddot{q}_i + \frac{\partial M_{ai}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k . \quad (8.3)$$

Επομένως, οι εξισώσεις Euler - Lagrange λαμβάνουν τη μορφή

$$M_{ai}(\mathbf{q})\ddot{q}_i + \frac{\partial M_{ai}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_a} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_a} = 0 . \quad (8.4)$$

Κατ' αναλογία με τον απλό αρμονικό ταλαντωτή ως υποθέσουμε ότι υπάρχει θέση $\mathbf{q}^{(0)} = (q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})^T$ που καθιστά τη δυναμική ενέργεια στάσιμη, δηλαδή

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_a} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^{(0)}} = 0 ,$$

τότε η θέση $\mathbf{q}^{(0)}$ αποτελεί σημείο ισορροπίας του συστήματος. Διότι, αν το σύστημα βρεθεί σε αυτή τη θέση με μηδενική ταχύτητα, η μετέπειτα εξέλιξή του θα είναι

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^{(0)} .$$

Αέναη ισορροπία
συστήματος

Το γεγονός αυτό εξασφαλίζεται από τη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης (8.4), αφού η σταθερή αυτή λύση αποτελεί, όπως εύκολα φαίνεται, λύση της διαφορικής εξίσωσης και απ' ό,τι γνωρίζουμε η λύση είναι μοναδική με δεδομένες τις αρχικές συνθήκες θέσης και ταχύτητας. Συνεπώς τα σημεία ισορροπίας είναι τα στάσιμα σημεία της δυναμικής ενέργειας, είναι, δηλαδή, τα σημεία \mathbf{q} που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\frac{\partial V}{\partial q_a} = 0 .$$

Άσκηση 8.1. Δείξτε, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor, ότι η θέση ισορροπίας $\mathbf{q}^{(0)}$ και η μηδενική αρχική ταχύτητα αρκούν για να προσδιοριστεί δάσει των εξισώσεων κίνησης (8.4) η μετέπειτα ακινησία του συστήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Σε συστήματα με μικρό αριθμό βαθμών ελευθερίας, όπως είναι το εκκρεμές, οι θέσεις ισορροπίας είναι συνήθως προφανείς, ή τέλος πάντων, είναι εύκολο να τις προσδιορίσουμε αναζητώντας τα στάσιμα σημεία της δυναμικής ενέργειας του συστήματος. Αντίθετα, σε συστήματα με μεγάλο αριθμό βαθμών ελευθερίας, όπως για παράδειγμα σε συνεχή μέσα, ο προσδιορισμός των σημείων ισορροπίας καθίσταται ιδιαίτερα δύσκολος, και, παρόλο που ίσως γνωρίζουμε ότι το φυσικό σύστημα βρίσκεται πλησίον κάποιου σημείου ισορροπίας,³ δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε αν υπάρχει και κάποιο άλλο σημείο ισορροπίας κοντά στο πρώτο στο οποίο

Εντοπισμός σημείων
ισορροπίας: ένα
δύσκολο πρόβλημα

³Για παράδειγμα τα συστατικά άτομα του DNA ή τα μόρια ενός στερεού που κρατάμε στα χέρια μας βρίσκονται κοντά σε κάποια θέση ευσταθούς ισορροπίας· αν δεν συνέβαινε αυτό, πολύ σύντομα το DNA ή το στερεό θα άλλαζαν δομή ή θα διαλύονταν στα εξών συνετέθησαν.

ίσως μεταβεί το σύστημα, αν διαταραχθεί αρκετά. Για παράδειγμα, το κλίμα που επικρατεί σήμερα στη Γη είναι κοντά σε κάποιο σημείο ισορροπίας –κάθε χρόνο παρατηρούμε μικρές διακυμάνσεις γύρω από τις μέσες κλιματικές καταστάσεις– αλλά κανείς δεν γνωρίζει αν υπάρχουν άλλα σημεία ισορροπίας κοντά σε αυτό, ώστε, αν το ατμοσφαιρικό σύστημα διαταραχθεί αρκετά, να μεταβληθεί το μέσο κλίμα της Γης, όπως συνέβη πριν από 13000 χρόνια όταν η Γη διένυε ακόμη την περίοδο των παγετώνων.

Συμπεριφορά
συστήματος κοντά
σε σημείο ισορροπίας

Όσο, όμως, δύσκολο και αν είναι να προσδιορίσουμε τα σημεία ισορροπίας ενός συστήματος, τόσο εύκολο είναι, ακόμη και για τα πιο πολύπλοκα συστήματα, να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του συστήματος γύρω από το σημείο ισορροπίας του. Και αυτό διότι, αν οι κινήσεις του συστήματος γύρω από το σημείο ισορροπίας του έχουν μικρό πλάτος, τότε μπορούμε από τις εξισώσεις (8.4) που περιγράφουν αυτές τις κινήσεις, να παραλείψουμε τους όρους ανώτερης τάξης ως προς την απομάκρυνση των μερών του συστήματος από τις θέσεις ισορροπίας τους και να έχουμε μια ικανοποιητική περιγραφή του συστήματος μόνο με τη γραμμική προσέγγιση της (8.4) γύρω από το σημείο ισορροπίας του. Αυτή η διαδικασία προσέγγισης των εξισώσεων κίνησης λέγεται *γραμμικοποίηση των εξισώσεων κίνησης*.

Γραμμικοποιώντας τις
εξισώσεις κίνησης

Συγκεκριμένα, για να γραμμικοποιήσουμε την εξίσωση (8.4), θεωρούμε ότι είναι μικρή όχι μόνο η σχετική απομάκρυνση από το σημείο ισορροπίας $\mathbf{q}^{(0)}$, αλλά και η ταχύτητα με την οποία κινείται το σύστημα. Το σύστημα ενδέχεται να βρίσκεται αρχικά κοντά σε σημείο ισορροπίας αλλά, αν η ταχύτητά του δεν είναι μικρή, δεν θα παραμείνει για πολύ κοντά στο σημείο αυτό. Έτσι, στη γραμμικοποίηση της εξίσωσης κίνησης (8.4) παραλείπουμε το δεύτερο και τον τρίτο όρο, διότι είναι δεύτερης τάξης και όχι γραμμικοί ως προς τις μικρές ποσότητες (θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση). Για να γραμμικοποιήσουμε τον πρώτο όρο, αναπτύσσουμε τον πίνακα \mathbf{M} σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο ισορροπίας

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}(\mathbf{q}^{(0)}) + (q_i - q_i^{(0)}) \left. \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^{(0)}} + \dots, \quad (8.5)$$

οπότε από τη γραμμικοποίηση του πρώτου όρου απομένει μόνο ο όρος $M_{ai}(\mathbf{q}^{(0)})\ddot{q}_i$. Τον τελευταίο πάλι όρο τον γραμμικοποιούμε, αναπτύσσοντάς τον σε σειρά Taylor

$$\frac{\partial V}{\partial q_a} = \left. \frac{\partial V}{\partial q_a} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^{(0)}} + (q_i - q_i^{(0)}) \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_a} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^{(0)}} + \dots, \quad (8.6)$$

και επειδή ο σταθερός όρος

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_a} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^{(0)}}$$

μηδενίζεται εξαιτίας της συνθήκης προσδιορισμού του σημείου ισορροπίας, η γραμμικοποίηση των εξισώσεων κίνησης λαμβάνει τελικά την ακόλουθη μορφή:

$$M_{ai}(\mathbf{q}^{(0)})\ddot{q}_i + (q_i - q_i^{(0)}) \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_a} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^{(0)}} = 0. \quad (8.7)$$

Αν, μάλιστα, αλλάξουμε συντεταγμένες και χρησιμοποιήσουμε τις $X_i = q_i - q_i^{(0)}$ που μετρούν τις σχετικές μετατοπίσεις από τις θέσεις ισορροπίας όλων των μερών του συστήματος, οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$M_{ai}\ddot{X}_i + K_{ai}X_i = 0, \quad (8.8)$$

όπου \mathbf{K} ο σταθερός πίνακας

$$K_{ai} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_a} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^{(0)}}.$$

Οι εξισώσεις κίνησης (8.8), αν ορίσουμε το διάνυσμα

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix}, \quad (8.9)$$

γράφονται συνοπτικά

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0}. \quad (8.10)$$

Στη μορφή αυτή οι εξισώσεις θυμίζουν τη διαφορική εξίσωση κίνησης του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή, αν και οι σταθερές και οι μεταβλητές εδώ είναι αντίστοιχα σταθεροί πίνακες και διανυσματικές μεταβλητές. Δεν πρόκειται, όμως, για ομοιότητα απλώς οπτική, αφού, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια του κεφαλαίου, οι εξισώσεις κίνησης του εν λόγω πολύπλοκου συστήματος και του αρμονικού ταλαντωτή είναι στην ουσία απολύτως όμοιες.

Η εξίσωση (8.10) προσδιορίζει ακόμη την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας. Αν η εν λόγω εξίσωση επιδέχεται μόνο ταλαντωτικές λύσεις, το σημείο ισορροπίας θεωρείται ευσταθές, υπό την έννοια ότι οποιοσδήποτε διαταραχές του συστήματος γύρω από κάποιο σημείο ισορροπίας, καθώς εξελίσσονται στη γραμμική προσέγγιση, παραμένουν φραγμένες. Αν η (8.10) επιδέχεται λύσεις εκθετικά αυξανόμενες, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές και επομένως δεν είναι φυσικά πραγματοποιήσιμο.

Αντί να γραμμικοποιούμε τις εξισώσεις Euler - Lagrange γύρω από το σημείο ισορροπίας, θα μπορούσαμε επίσης να γράψουμε κατευθείαν τη Λαγκρανζιανή, η οποία διέπει τη γραμμική κίνηση του συστήματος. Η Λαγκρανζιανή από την οποία παράγονται οι παραπάνω γραμμικοποιημένες εξισώσεις είναι η

$$L_{\text{γραμ}} = \frac{1}{2}M_{ij}(\mathbf{q}^{(0)})\dot{X}_i\dot{X}_j - \frac{1}{2}K_{ij}(\mathbf{q}^{(0)})X_iX_j, \quad (8.11)$$

όπου οι πίνακες M_{ij} , K_{ij} είναι οι σταθεροί πίνακες που υπολογίζει κανείς στο σημείο ισορροπίας· ειδικότερα ο K_{ij} προκύπτει από το ανάπτυγμα της δυναμικής ενέργειας σε δεύτερη τάξη γύρω από το σημείο ισορροπίας. Σημειώνουμε ότι πρακτικά είναι ευκολότερο να παραχθούν οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις κίνησης από τη γραμμικοποιημένη Λαγκρανζιανή παρά να γίνει η γραμμικοποίηση στις γενικές εξισώσεις κίνησης.

Ευστάθεια του σημείου
ισορροπίας

Γραμμικοποίηση
της ίδιας της
Λαγκρανζιανής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 8.2. Δείξτε ότι η $L_{\text{γραμ}}$ οδηγεί στις γραμμικοποιημένες εξισώσεις κίνησης (8.8).

8.2 Συζευγμένοι ταλαντωτές

Στο προηγούμενο εδάφιο δείξαμε ότι φυσικά συστήματα που βρίσκονται κοντά σε κάποιο σημείο ευσταθούς ισορροπίας συμπεριφέρονται, όπως συμπεριφέρονται σωματίδια που αλληλεπιδρούν με γραμμικές δυνάμεις επαναφοράς· παράδειγμα τέτοιου συστήματος αποτελεί ένα σύστημα από σωματίδια, τα οποία είναι συνδεδεμένα όλα μεταξύ τους με ελατήρια διαφορετικής σκληρότητας και διέπονται όλα από το νόμο του Hooke. Τι μπορούμε, άραγε, να συμπεράνουμε για τις ταλαντώσεις ενός τόσο πολύπλοκου συστήματος; Ας επιλέξουμε κάποιο σωματίδιο και ας αναλύσουμε την κίνησή του σε ένα φασματογράφο.⁴ Θα παρατηρήσουμε ότι το φάσμα επικεντρώνεται σε ένα πεπερασμένο αριθμό συγκεκριμένων συχνοτήτων και, επειδή οι εξισώσεις κίνησης είναι γραμμικές, η κίνηση του σωματιδίου είναι στην πραγματικότητα υπέρθεση ταλαντωτικών κινήσεων στις συχνότητες που εντόπισε ο φασματογράφος. Επαναλαμβάνουμε, τώρα, το πείραμα με κάποιο άλλο σωματίδιο. Θα εντοπίσει άραγε ο φασματογράφος τις ίδιες συχνότητες και πόσες θα είναι αυτές; Αν εκτελούσαμε, πράγματι, ένα τέτοιο πείραμα, θα διαπιστώναμε ότι οι συχνότητες που εμφανίζονται στη φασματική ανάλυση της κίνησης των σωματιδίων του συστήματος είναι ίδιες για όλα τα σωματίδια! Αυτές οι κοινές συχνότητες λέγονται *χαρακτηριστικές συχνότητες* του συστήματος. Οι κοινές αυτές συχνότητες αποτελούν επίσης τις συχνότητες συντονισμού του συστήματος, όταν το σύστημα διεγερθεί αρμονικά. Πώς προσδιορίζονται, όμως, θεωρητικά αυτές οι συχνότητες και γιατί είναι κοινές για όλα τα σωματίδια;

Τι είναι οι χαρακτηριστικές συχνότητες ενός συστήματος;

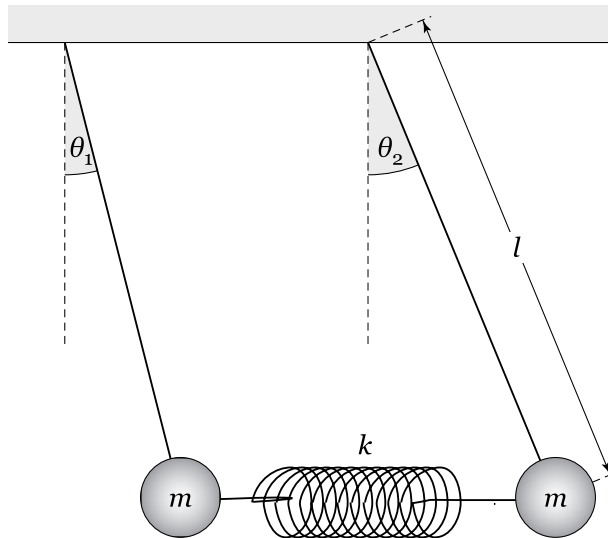
Λαγκρανζιανή δύο συζευγμένων εκκρεμών

Πριν αντιμετωπίσουμε το γενικό πρόβλημα των μικρών ταλαντώσεων γύρω από κάποιο σημείο ισορροπίας, ας μελετήσουμε την κίνηση δύο ίδιων εκκρεμών που εκτελούν μικρές κινήσεις γύρω από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας τους μέσα στο πεδίο βαρύτητας, όταν οι μάζες τους αλληλεπιδρούν με κάποιο ελκτικό δυναμικό, για παράδειγμα μέσω ενός ελατηρίου που έχει φυσικό μήκος όσο η απόσταση μεταξύ των σημείων ανάρτησης των δύο εκκρεμών (βλ. Σχήμα 8.1). Μια Λαγκρανζιανή που περιγράφει τις μικρές κινήσεις των εκκρεμών γύρω από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας τους είναι

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2} \omega_g^2 (\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{1}{2} \omega_k^2 (\theta_1 - \theta_2)^2, \quad (8.12)$$

όπου $\omega_g = \sqrt{g/l}$ η συχνότητα ταλάντωσης των εκκρεμών και $\omega_k = \sqrt{k/m}$ η συχνότητα ταλάντωσης του ελατηρίου που φέρει στο άκρο του μια μάζα

⁴ Αναλύουμε, δηλαδή, την κίνησή του κατά Fourier.



Σχήμα 8.1: Δύο ίδια εκκρεμή αναρτώνται από την οροφή και συζεύγγονται μέσω αδρανούς ελατηρίου που έχει φυσικό μήκος όσο η απόσταση των σημείων ανάρτησης των εκκρεμών.

ζα (Για την κατασκευή της παραπάνω Λαγκρανζιανής βλ. Πλαίσιο 8.1). Η διάταξη των εκκρεμών απεικονίζεται στο Σχήμα 8.1.

Πλαίσιο 8.1. Εάν x_i και y_i είναι η οριζόντια και η κατακόρυφη απόσταση αντίστοιχα της κάθε μάζας από το σημείο ισορροπίας της (η y συντεταγμένη αυξάνεται προς τα επάνω), τότε η θέση των δύο εκκρεμών θα είναι

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

$$x_i = l \sin \theta_i, \quad y_i = l(1 - \cos \theta_i).$$

Οι ταχύτητες, λοιπόν, των δύο εκκρεμών είναι

$$\dot{x}_i = l \cos \theta_i \dot{\theta}_i, \quad \dot{y}_i = l \sin \theta_i \dot{\theta}_i.$$

Έτσι, η κινητική ενέργεια των δύο εκκρεμών είναι

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} m (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) \\ &= \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2). \end{aligned}$$

Η δυναμική ενέργεια των εκκρεμών εξαιτίας του βαρυντικού πεδίου είναι

$$V_g = \sum_{i=1}^2 m g y_i = \sum_{i=1}^2 m g l (1 - \cos \theta_i),$$

ενώ η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι

$$\begin{aligned} V_k &= \frac{1}{2} k [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] \\ &= \frac{1}{2} k l^2 [(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2 + (-\cos \theta_1 + \cos \theta_2)^2]. \end{aligned}$$

Τώρα είμαστε σε θέση να γραμμικοποιήσουμε τους διάφορους όρους της Λαγκρανζιανής. Όπως έχουμε αναφέρει, χρειάζεται να κρατήσουμε μόνο μέχρι δεύτερης τάξης

όρους ως προς θ_1 και θ_2 . Η κινητική ενέργεια είναι ήδη μια διγραμμική μορφή των ταχυτήτων $\dot{\theta}_i$, οπότε δεν απαιτείται καμία περαιτέρω προσέγγιση. Στο απαιτούμενο επίπεδο προσέγγισης αρκεί να αντικαταστήσουμε στις εκφράσεις της δυναμικής ενέργειας τα $\sin \theta_i$ με θ_i και τα $\cos \theta_i$ με $1 - \theta_i^2/2$. Εκτελώντας τις πράξεις καταλήγουμε ότι η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} V &= V_g + V_k \\ &= mgl \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{2} + \frac{1}{2}kl^2 \left[(\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{(\theta_1^2 - \theta_2^2)^2}{4} \right]. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο δεύτερος όρος της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου που προέρχεται από τη σχετική κατακόρυφη απομάκρυνση των δύο σωματιδίων (ο τελευταίος όρος της παραπάνω έκφρασης) είναι τέταρτης τάξης και πρέπει να παραλειφθεί από τη γραμμικοποιημένη Λαγκρανζιανή, η οποία λαμβάνει τελικά τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mgl \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{2} - \frac{1}{2}kl^2(\theta_1 - \theta_2)^2.$$

Διαιρώντας την παραπάνω Λαγκρανζιανή με το σταθερό όρο ml^2 , καταλήγουμε στη Λαγκρανζιανή της έκφρασης (8.12).

Η θέση περιγράφεται από ένα διάνυσμα

Το φυσικό αυτό σύστημα των εκκρεμών έχει δύο βαθμούς ελευθερίας, τις γωνίες θ_1 και θ_2 , και η θέση του συστήματος προσδιορίζεται πλήρως από το μονόστηλο πίνακα

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός εσωτερικού γινομένου δύο θέσεων

Ο ανάστροφος⁵ του Θ είναι ο πίνακας-γραμμή $\Theta^T = (\theta_1, \theta_2)$ και μέσω τούτου το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο δύο διαφορετικών θέσεων του συστήματος $\Theta = (\theta_1, \theta_2)^T$ και $\Theta' = (\theta'_1, \theta'_2)^T$ γράφεται ως

$$\vec{\Theta} \cdot \vec{\Theta}' = \Theta^T \Theta' = \theta_1 \theta'_1 + \theta_2 \theta'_2. \quad (8.13)$$

Εάν η θέση του συστήματος προσδιοριζόταν από μια στήλη μιγαδικών αριθμών, τότε το ανάστροφο πρέπει να αντικατασταθεί από το ερμιτιανό ανάστροφο, που συμβολίζεται με \dagger και ορίζεται ως

$$\Theta^\dagger = \begin{pmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \end{pmatrix}^T, \quad (8.14)$$

όπου με $*$ συμβολίζεται το μιγαδικό συζυγές. Σε αυτή την περίπτωση το εσωτερικό γινόμενο είναι $\Theta^\dagger \Theta'$.

Αυτά ως προς τους συμβολισμούς που θα χρησιμοποιήσουμε. Με τον

⁵Στο εξής θα χρησιμοποιούμε εναλλάξ το σύμβολο $\vec{\Theta}$, όταν είναι έκδηλος ο διανυσματικός χαρακτήρας του Θ , ενώ το σύμβολο Θ , όταν αντιμετωπίζουμε το μέγεθος ως πίνακα. Επίσης, προκειμένου να μην υπάρξει σύγχυση μεταξύ τετραγωνικών πινάκων και μονόστηλων πινάκων θα χρησιμοποιούμε απλώς κεφαλαία σύμβολα για τους μονόστηλους πίνακες και παχιά κεφαλαία για τους τετραγωνικούς πίνακες.

πίνακα Θ , ως συνοπτική γραφή των συντεταγμένων, η λαγκρανζιανή συνάρτηση (8.12) λαμβάνει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T \dot{\Theta} - \frac{1}{2} \Theta^T \mathbf{K} \Theta, \quad (8.15)$$

Η Λαγκρανζιανή με πίνακες και ανύσματα

όπου ο σταθερός πίνακας \mathbf{K} της δυναμικής ενέργειας, δίχως έλλειψη της γενικότητας, μπορεί να ληφθεί ως ο συμμετρικός πίνακας

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \omega_g^2 + \omega_k^2 & -\omega_k^2 \\ -\omega_k^2 & \omega_g^2 + \omega_k^2 \end{pmatrix}. \quad (8.16)$$

Προκειμένου να αντιληφθείτε γιατί η υπόθεση περί συμμετρικότητας του πίνακα \mathbf{K} δεν αλλοιώνει τη μορφή της δυναμικής ενέργειας, δοκιμάστε να γράψετε την ίδια δυναμική ενέργεια στην ίδια μορφή αλλά μέσω ενός μη συμμετρικού πίνακα.

Οι εξισώσεις Euler - Lagrange θα λάβουν τότε τη μορφή

$$\ddot{\Theta} + \mathbf{K} \Theta = 0, \quad (8.17)$$

και, όπως τονίσαμε και στο εδάφιο σχετικά με τη γραμμικοποίηση, είναι συμβολικά, και όχι μόνο, ίδιες με την εξίσωση ταλαντωτή μοναδιαίας μάζας. Η διαφορά εδώ είναι ότι ο \mathbf{K} είναι πίνακας αντί αριθμός και η δυσκολία εύρεσης της λύσης έγκειται στο ότι ο πίνακας \mathbf{K} δεν είναι διαγώνιος. Αν ο πίνακας \mathbf{K} ήταν διαγώνιος, τότε οι δύο συντεταγμένες θα εκτελούσαν κινήσεις ανεξάρτητες και το πρόβλημα θα αναγόταν σε δύο ανεξάρτητα προβλήματα μίας διάστασης, όπως συμβαίνει με τον ανισότροπο ταλαντωτή που αναλύσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Γνωρίζουμε επίσης ότι στη μία διάσταση, όταν ο \mathbf{K} είναι απλώς ένας θετικός αριθμός, έχουμε ταλαντωτικές λύσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας και το σημείο ισορροπίας χαρακτηρίζεται σε αυτή την περίπτωση ευσταθές, ενώ, όταν ο \mathbf{K} είναι αρνητικός αριθμός, έχουμε εκθετικές λύσεις –μία αύξουσα και μία φθίνουσα– και τότε το σημείο ισορροπίας χαρακτηρίζεται ασταθές.

Γενίκευση της σκληρότητας k ελατηρίου

Η γενίκευση της έννοιας του θετικού αριθμού, όταν ο \mathbf{K} είναι πίνακας καθίσταται στο σημείο αυτό αναγκαία. Ποια είναι η κατάλληλη επιλογή για μια τέτοια γενίκευση; Ο συμμετρικός πίνακας \mathbf{K} καλείται *θετικός ή θετικά ορισμένος*, όταν έχει την ιδιότητα

Θετικός πίνακας

$$x^T \mathbf{K} x > 0$$

για κάθε μη μηδενικό μονόστηλο πίνακα x ή ισοδυνάμως ο πίνακας \mathbf{K} είναι θετικά ορισμένος, όταν είναι συμμετρικός και έχει θετικές ιδιοτιμές. Σε αυτή την περίπτωση η γενική κίνηση είναι ταλαντωτική και το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές· ειδικά, το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές. Η διερεύνηση, λοιπόν, της ευστάθειας ή της αστάθειας κάποιου σημείου ισορροπίας ανάγεται τελικά μέσω της εξίσωσης (8.17) στη θετικότητα ή μη του συμμετρικού πίνακα \mathbf{K} .

⁶Το “0” εδώ αναπαριστά το μονόστηλο πίνακα με μηδενικά στοιχεία.

Χαρακτηριστικοί
τρόποι ταλάντωσης

Γνωρίζουμε ότι, επειδή η (8.17) είναι γραμμική διαφορική εξίσωση και οι συντελεστές της δεν έχουν χρονική εξάρτηση, θα υπάρχουν ειδικές λύσεις της μορφής $\Re(\vec{a}e^{i\Omega t})$, όπου το \Re συμβολίζει το πραγματικό μέρος.⁷ Μας επιτρέπεται να ερευνήσουμε την υπάρξη τέτοιων λύσεων στο πεδίο των μιγαδικών αριθμών, διότι η δυναμική εξίσωση (8.17) είναι γραμμική και οι συντελεστές της είναι πραγματικοί, οπότε, αν μία μιγαδική λύση ικανοποιεί την εξίσωση, τότε και το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος θα ικανοποιούν την εξίσωση. Οι λύσεις αυτής της μορφής ονομάζονται *χαρακτηριστικοί τρόποι ταλάντωσης* και πραγματοποιούνται μόνον όταν οι αρχικές τιμές των Θ και $\dot{\Theta}$ είναι κατάλληλες. Όταν το σύστημα βρίσκεται σε μία τέτοια κατάσταση, όλες οι συντεταγμένες του συστήματος ταλαντώνονται με την *ίδια συχνότητα* Ω , η οποία ονομάζεται *χαρακτηριστική συχνότητα* ή *ιδιοσυχνότητα*. Τα πλάτη ταλάντωσης των συντεταγμένων είναι ανάλογα του μέτρου των συνιστωσών του *χαρακτηριστικού ανύσματος* ή *ιδιοανύσματος* \vec{a} . Στη συνέχεια, καθώς θα επιλύουμε το αρχικό μας φυσικό πρόβλημα, θα εξηγήσουμε αναλυτικά τα όσα προαναφέραμε στην παράγραφο αυτή.

Οι χαρακτηριστικοί
τρόποι ταλάντωσης
των συζευγμένων
εκκρεμών

Επιστρέφοντας, λοιπόν, στο πρόβλημα των δύο εκκρεμών είναι εύκολο, χωρίς να εκτελέσουμε τους υπολογισμούς, να προσδιορίσουμε τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης, δηλαδή εκείνους τους τρόπους ταλάντωσης κατά τους οποίους και τα δύο σώματα ταλαντώνονται με την ίδια ακριβώς συχνότητα. Ο ένας τρόπος είναι να κινούνται τα δύο εκκρεμή με μετατοπίσεις

$$\theta_1(t) = \theta_2(t) ,$$

οπότε θα ταλαντώνονται με τη συχνότητα ταλάντωσης του απλού εκκρεμούς

$$\Omega_1 = \omega_g , \quad (8.18)$$

αφού, τότε, το ελατήριο διατηρεί κατά την κίνηση το φυσικό μήκος του και έτσι η κίνηση του ενός εκκρεμούς δεν επηρεάζει την κίνηση του άλλου. Το ότι αυτή η κίνηση αποτελεί δυνατή κίνηση των εκκρεμών προκύπτει και από τη Λαγκρανζιανή, διότι για ίσες μετατοπίσεις, $\theta_1 = \theta_2$, η Λαγκρανζιανή (8.12) λαμβάνει τη μορφή

$$L = \dot{\theta}_1^2 - \omega_g^2 \theta_1^2 , \quad (8.19)$$

οπότε η αντίστοιχη κίνηση είναι ταλάντωση με τη συχνότητα του εκκρεμούς. Το ιδιοάνυσμα $\vec{a}^{(1)}$ που αντιστοιχεί σε αυτή την ιδιοσυχνότητα, εφόσον τα δύο εκκρεμή σχηματίζουν κάθε στιγμή ίσες γωνίες, είναι το

$$\vec{a}^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (8.20)$$

Ο παράγοντας N μετρά το πλάτος της ταλάντωσης και στην περίπτωση που θέλουμε να κανονικοποιήσουμε αυτό τον τρόπο ταλάντωσης κατασκευάζοντας το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα πρέπει να είναι $N =$

⁷Γράψαμε τις λύσεις χρησιμοποιώντας κάποιο σταθερό διάνυσμα \vec{a} , το οποίο έχει εν γένει μιγαδικές συνιστώσες, προκειμένου να περιγράψουμε τη λύση της εξίσωσης (8.17) όσον αφορά στο μονόστηλο πίνακα Θ .

$1/\sqrt{2}$. Στο εξής θα θεωρήσουμε ότι $N = 1$ προκειμένου οι εκφράσεις που θα γράψουμε να είναι πιο απλές. Μια τέτοια ταλάντωση επιτυγχάνεται όταν οι αρχικές μετατοπίσεις των εκκρεμών είναι ίσες και η ταχύτητα τους μηδενική, οπότε οι γωνίες των εκκρεμών θα είναι

$$\vec{\Theta}(t) = \theta_0 \vec{a}^{(1)} \cos(\Omega_1 t) ,$$

όπου θ_0 η αρχική θέση των εκκρεμών που έχουμε επιλέξει. Επίσης, ο ίδιος τρόπος ταλάντωσης επιτυγχάνεται αν τα εκκρεμή βρίσκονται στη θέση ισορροπίας με ίσες αρχικές ταχύτητες ω_0 . Στη περίπτωση αυτή η μετέπειτα κίνηση των εκκρεμών θα περιγράφεται από το διάνυσμα

$$\vec{\Theta}(t) = \omega_0 \vec{a}^{(1)} \frac{\sin(\Omega_1 t)}{\Omega_1} .$$

Η δεύτερη χαρακτηριστική συχνότητα προκύπτει, όταν τα εκκρεμή κινούνται με ίσες κατά μέτρο αλλά αντίθετες μετατοπίσεις,

$$\theta_1(t) = -\theta_2(t) .$$

Επειδή δεν υπάρχει τίποτε που να ξεχωρίζει το ένα σωματίδιο από το άλλο, τα δύο εκκρεμή θα ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα. Ο υπολογισμός της εν λόγω συχνότητας είναι εύκολος: παρατηρούμε ότι στη δύναμη επαναφοράς από το πεδίο της βαρύτητας, που είναι ανάλογη της μετατόπισης με συντελεστή ω_g^2 , πρέπει να προστεθεί η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου που είναι ανάλογη της μετατόπισης με συντελεστή $2\omega_k^2$: ο παράγοντας 2 οφείλεται στην αντισυμμετρική μετατόπιση των σωματιδίων που οδηγεί σε διπλάσια επιμήκυνση (ή επιβράχυνση) του ελατηρίου από τη μετατόπιση των σωματιδίων των εκκρεμών. Έτσι, η χαρακτηριστική συχνότητα σε αυτή την περίπτωση είναι

$$\Omega_2 = \sqrt{\omega_g^2 + 2\omega_k^2} , \quad (8.21)$$

και το αντίστοιχο κανονικοποιημένο ιδιοάνυσμα $\vec{a}^{(2)}$ είναι

$$\vec{a}^{(2)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} . \quad (8.22)$$

Και σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι η συχνότητα της ταλάντωσης είναι αυτή που γράψαμε παραπάνω θέτοντας $\theta_1 = -\theta_2$ στη λαγκρανζιανή συνάρτηση. Η απαίτηση $\theta_1 = -\theta_2$ μειώνει τους βαθμούς ελευθερίας της κίνησης σε έναν και η δεσμευμένη κίνηση διέπεται από τη Λαγκρανζιανή

$$L = \dot{\theta}_1^2 - (\omega_g^2 + 2\omega_k^2)\theta_1^2 , \quad (8.23)$$

αν επιλέξουμε να κρατήσουμε τη θ_1 ως μεταβλητή. Αφού η λαγκρανζιανή συνάρτηση με μεταβλητή τη θ_2 δεν διαφέρει από τη παραπάνω Λαγκρανζιανή, και οι δύο συντεταγμένες εκτελούν ταλάντωση με τη χαρακτηριστική συχνότητα (8.21). Η ταλάντωση αυτή προκύπτει, αν αρχικά οι

⁸Θεωρούμε για απλούστευση των ακόλουθων εκφράσεων ότι η σταθερά κανονικοποίησης του ιδιοανύσματος είναι πάλι $N = 1$.

μετατοπίσεις και οι ταχύτητες είναι ίσου μέτρου και αντίθετες. Αν $\pm\theta_0$ είναι οι αντίστοιχες αρχικές μετατοπίσεις των δύο εκκρεμών και τα εκκρεμή δεν έχουν αρχική ταχύτητα, τότε οι γωνίες τους θα είναι

$$\vec{\Theta}(t) = \theta_0 \vec{a}^{(2)} \cos(\Omega_2 t),$$

ενώ, αν αρχικά τα σωματίδια βρίσκονται στο σημείο ισορροπίας με ταχύτητες ίσου μέτρου ω_0 αλλά αντίθετες φορές, η μετέπειτα κίνησή τους θα είναι

$$\vec{\Theta}(t) = \omega_0 \vec{a}^{(2)} \frac{\sin(\Omega_2 t)}{\Omega_2}.$$

Φυσικά, εκτός από τις δύο ακραίες αρχικές συνθήκες που περιγράψαμε και για τους δύο χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης—είτε τα εκκρεμή ήταν αρχικά ακίνητα, είτε και τα δύο βρίσκονταν αρχικά στη θέση ισορροπίας—μπορεί κανείς να κατασκευάσει κάποιο γραμμικό συνδυασμό αυτών, ο οποίος θα περιγράφει τη γενικότερη ταλάντωση του συστήματος με μια συγκεκριμένη συχνότητα. Για παράδειγμα, αν αρχικά τα δύο εκκρεμή έχουν την ίδια μετατόπιση θ_0 και την ίδια ταχύτητα ω_0 θα κινηθούν στη συνέχεια με τον πρώτο χαρακτηριστικό τρόπο ταλάντωσης, ενώ οι μετατοπίσεις τους θα παραμείνουν για όλους τους χρόνους ίδιες. Με τέτοιες αρχικές συνθήκες η μετέπειτα κίνησή τους θα είναι

$$\vec{\Theta}(t) = \vec{a}^{(1)} \left(\theta_0 \cos(\Omega_1 t) + \omega_0 \frac{\sin(\Omega_1 t)}{\Omega_1} \right).$$

Αν, όμως, αρχικά τα δύο εκκρεμή έχουν αντίθετες μετατοπίσεις, $\pm\theta_0$, και αντίθετες ταχύτητες, $\pm\omega_0$, στη συνέχεια θα κινηθούν με το δεύτερο χαρακτηριστικό τρόπο ταλάντωσης και η μετέπειτα κίνησή τους θα είναι

$$\vec{\Theta}(t) = \vec{a}^{(2)} \left(\theta_0 \cos(\Omega_2 t) + \omega_0 \frac{\sin(\Omega_2 t)}{\Omega_2} \right).$$

Τονίζουμε ότι μόνο όταν έχουμε τις παραπάνω αρχικές συνθήκες, το σύστημα ταλαντώνεται με μία συγκεκριμένη συχνότητα, είτε την Ω_1 , είτε την Ω_2 . Για διαφορετικές αρχικές συνθήκες η κίνηση των εκκρεμών είναι υπέρθεση ταλαντώσεων στις δύο κανονικές συχνότητες. Αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί ως ακολούθως: κάθε αρχική συνθήκη $\vec{\Theta}_0, \vec{\omega}_0$ είναι στοιχείο του διανυσματικού χώρου των δύο διαστάσεων και μπορεί να αναλυθεί στη βάση των ιδιοανυσμάτων $\vec{a}^{(1)}$ και $\vec{a}^{(2)}$, τα οποία σχηματίζουν μία πλήρη βάση του διανυσματικού χώρου των δύο διαστάσεων. Συνεπώς, υπάρχουν αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$\vec{\Theta}_0 = \alpha \vec{a}^{(1)} + \gamma \vec{a}^{(2)}, \quad \vec{\omega}_0 = \beta \vec{a}^{(1)} + \delta \vec{a}^{(2)}, \quad (8.24)$$

οπότε η μετέπειτα κίνηση του συστήματος που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $\vec{\Theta}_0$ και $\vec{\omega}_0$ είναι

$$\begin{aligned} \vec{\Theta}(t) = & \left(\alpha \cos \Omega_1 t + \beta \frac{\sin \Omega_1 t}{\Omega_1} \right) \vec{a}^{(1)} + \\ & \left(\gamma \cos \Omega_2 t + \delta \frac{\sin \Omega_2 t}{\Omega_2} \right) \vec{a}^{(2)}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Κατασκευή της γενικής κίνησης από τους δύο τρόπους ταλάντωσης

Η γενική κίνηση των εκκρεμών είναι, λοιπόν, υπέρθεση των δύο χαρακτηριστικών ταλαντώσεων και το μόνο που χρειάζεται να γνωρίζουμε κανείς για να έχει μια πλήρη περιγραφή του προβλήματος είναι οι αρχικές συνθήκες εκπεφρασμένες μέσω των τεσσάρων αριθμών $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Άσκηση 8.3. Επιβεβαιώστε ότι η σχέση (8.25) που περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος των δύο εκκρεμών έχει ως αρχικές συνθήκες για το κάθε εκκρεμές αυτές που εμπεριέχονται στη σχέση (8.24).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Η ανάλυση που παρουσιάστηκε στο παράδειγμα των συζευγμένων εκκρεμών εμπεριέχει όλες τις φυσικές έννοιες που απαιτούνται για να επιλύσουμε ένα οποιοδήποτε ανάλογο πρόβλημα. Το ερώτημα είναι πώς μπορούμε συστηματικά να προσδιορίσουμε τις χαρακτηριστικές συχνότητες ενός φυσικού συστήματος, αν γνωρίζουμε ότι αυτό βρίσκεται κοντά σε κάποιο σημείο ευσταθούς ισορροπίας; Η μεθοδολογία που ακολουθούμε για να προσδιορίσουμε τις ιδιοσυχνότητες Ω_i και τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα $\vec{a}^{(i)}$ για το παράδειγμα των δύο συζευγμένων εκκρεμών είναι η ακόλουθη: Διερευνούμε κατ' αρχάς ποια είναι η συνθήκη που επιβάλλει σε όλες τις συντεταγμένες να εκτελούν ταλάντωση με την ίδια συχνότητα. Αντικαθιστώντας στην (8.17) μια λύση της μορφής

$$\vec{a}^{(i)} e^{i\Omega_i t},$$

διαπιστώνουμε ότι πρέπει η Ω_i να έχει τιμή τέτοια ώστε να υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a}^{(i)}$, το οποίο να ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων

$$(\mathbf{K} - \Omega_i^2 \mathbf{I}) \vec{a}^{(i)} = 0, \quad (8.26)$$

όπου \mathbf{I} είναι ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας. Γνωρίζουμε ότι για να υπάρχει μια μη τετριμμένη μηδενική λύση $\vec{a}^{(i)}$, πρέπει η ορίζουσα του γραμμικού συστήματος (8.26) να είναι μηδενική, δηλαδή

$$\det(\mathbf{K} - \Omega_i^2 \mathbf{I}) = 0. \quad (8.27)$$

Η σχέση (8.27) είναι ένα πολυώνυμο δεύτερου βαθμού ως προς την Ω_i^2 , οι ρίζες του οποίου είναι οι ιδιοσυχνότητες Ω_i^2 . Το πολυώνυμο αυτό ονομάζεται *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* του πίνακα \mathbf{K} και σε αυτή την περίπτωση οι χαρακτηριστικές συχνότητες είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα \mathbf{K} και τα $\vec{a}^{(i)}$ τα ιδιοανύσματά του. Όταν ο πίνακας \mathbf{K} είναι θετικός, οι ιδιοτιμές του είναι θετικές και τα Ω_i είναι πραγματικοί αριθμοί, οπότε οι λύσεις που προκύπτουν έχουν ταλαντωτικό χαρακτήρα. Στην αντίθετη περίπτωση, το σύστημα είναι γενικά ασταθές, αφού θα υπάρχει μία τουλάχιστον λύση με αρνητική τιμή για το αντίστοιχο Ω_i^2 , η οποία θα μεγαλώνει εκθετικά⁹ με το χρόνο και με την πάροδο του χρόνου θα κυριαρχήσει, οσοδήποτε μικρό και αν ήταν αρχικά το πλάτος της.

Πώς βρίσκουμε τις χαρακτηριστικές συχνότητες και τα χαρακτηριστικά ανύσματα;

⁹ Αν $\Omega_i^2 < 0$, θα είναι $\Omega_i = \pm i |\Omega_i|$ και η λύση θα εξελίσσεται με το χρόνο ως $e^{\pm |\Omega_i| t}$.

Ας υπολογίσουμε, τώρα, αναλυτικά τις χαρακτηριστικές συχνότητες και τα χαρακτηριστικά διανύσματα στην περίπτωση των συζευγμένων εκκρεμών. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο (8.27) έχει τη μορφή

$$\det \begin{pmatrix} \omega_g^2 + \omega_k^2 - \Omega_i^2 & -\omega_k^2 \\ -\omega_k^2 & \omega_g^2 + \omega_k^2 - \Omega_i^2 \end{pmatrix} = 0, \quad (8.28)$$

δηλαδή

$$(\Omega_i^2 - \omega_g^2)(\Omega_i^2 - \omega_g^2 - 2\omega_k^2) = 0. \quad (8.29)$$

Συνεπώς, οι χαρακτηριστικές συχνότητες είναι η $\Omega_1 = \pm\omega_g$ και η μεγαλύτερη συχνότητα, η $\Omega_2 = \pm(\omega_g^2 + 2\omega_k^2)^{1/2}$, στην οποία είναι φανερή η επίδραση της σύζευξης των εκκρεμών. Η (8.17), λοιπόν, επιδέχεται λύσεις της μορφής

$$\vec{z}_1(t) = \vec{a}^{(1)} e^{\pm i\Omega_1 t}, \quad \vec{z}_2(t) = \vec{a}^{(2)} e^{\pm i\Omega_2 t},$$

και τα $\vec{a}^{(1,2)}$ προκύπτουν από την επίλυση της (8.26). Το πρώτο ιδιοάνυσμα,¹⁰

$$\vec{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix},$$

προκύπτει, αν θέσουμε $\Omega = \Omega_1$ στο γραμμικό σύστημα (8.26)

$$\omega_k^2(a_{11} - a_{12}) = 0, \quad (8.30)$$

οπότε

$$a_{11} = a_{12}.$$

Πρόκειται για το ιδιοάνυσμα (8.20). Αν θέσουμε $\Omega = \Omega_2$ στην (8.26) συμπεραίνουμε ότι τα στοιχεία του

$$\vec{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix},$$

πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση

$$-\omega_k^2(a_{21} + a_{22}) = 0, \quad (8.31)$$

οπότε

$$a_{21} = -a_{22}.$$

Πρόκειται για το δεύτερο ιδιοάνυσμα, το (8.22).

Από τις τέσσερις λύσεις της (8.17),

$$\vec{z}_1(t) = \vec{a}^{(1)} e^{\pm i\Omega_1 t}, \quad \vec{z}_2(t) = \vec{a}^{(2)} e^{\pm i\Omega_2 t},$$

μπορούμε να κατασκευάσουμε τέσσερις πραγματικές λύσεις λαμβάνοντας

¹⁰Στην αρίθμηση των συνιστωσών των ιδιοανυσμάτων θα ακολουθήσουμε την εξής σύμβαση: ο πρώτος δείκτης θα αναφέρεται στο ιδιοάνυσμα, ενώ ο δεύτερος στη συνιστώσα αυτού. Η σημασία του συμβολισμού θα φανεί αργότερα, όταν χρειαστεί να συνδυάσουμε τα ιδιοάνυσματα για την κατασκευή ενός νέου πίνακα.

διαδοχικά το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των \vec{z}_1, \vec{z}_2

$$\begin{aligned}\vec{x}_1(t) &= \Re(\vec{z}_1) = \vec{a}^{(1)} \cos(\Omega_1 t), \quad \vec{x}_2(t) = \Im(\vec{z}_1) = \vec{a}^{(1)} \sin(\Omega_1 t), \\ \vec{x}_3(t) &= \Re(\vec{z}_2) = \vec{a}^{(2)} \cos(\Omega_2 t), \quad \vec{x}_4(t) = \Im(\vec{z}_2) = \vec{a}^{(2)} \sin(\Omega_2 t).\end{aligned}$$

Η γενική λύση με χρήση μιγαδικών αριθμών

Αυτές οι λύσεις σχηματίζουν μία πλήρη βάση αρχικών συνθηκών στην οποία μπορεί να αναλυθεί κάθε αρχική συνθήκη,¹¹ οπότε αν αρχικά

$$\vec{\Theta}_0 = \alpha \vec{a}^{(1)} + \gamma \vec{a}^{(2)}, \quad \vec{\omega}_0 = \beta \vec{a}^{(1)} + \delta \vec{a}^{(2)}, \quad (8.32)$$

η μετέπειτα κίνηση του συστήματος θα είναι

$$\begin{aligned}\vec{\Theta}(t) &= \left(\alpha \cos \Omega_1 t + \beta \frac{\sin \Omega_1 t}{\Omega_1} \right) \vec{a}^{(1)} + \\ &\quad \left(\gamma \cos \Omega_2 t + \delta \frac{\sin \Omega_2 t}{\Omega_2} \right) \vec{a}^{(2)}.\end{aligned} \quad (8.33)$$

Ισοδυνάμως, η γενική λύση μπορεί να γραφεί και ως

$$\vec{\Theta}(t) = \Re \left(A e^{-i\Omega_1 t} \vec{a}^{(1)} + B e^{-i\Omega_2 t} \vec{a}^{(2)} \right), \quad (8.34)$$

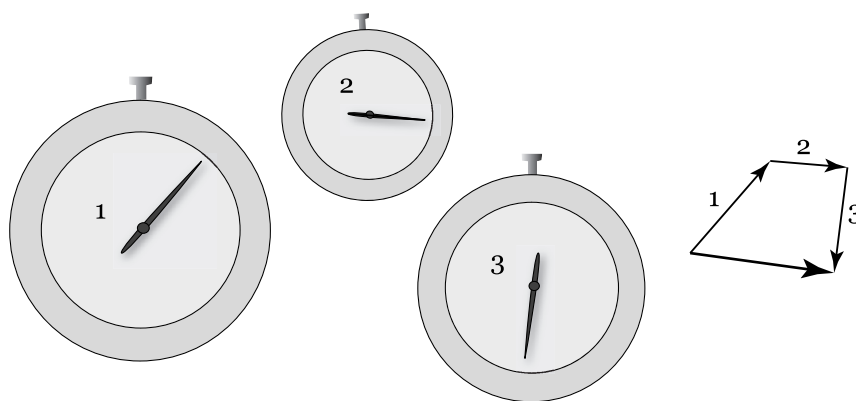
ενώ οι αρχικές συνθήκες (8.32) ικανοποιούνται από τους μιγαδικούς συντελεστές

$$A = \alpha + i \frac{\beta}{\Omega_1}, \quad B = \gamma + i \frac{\delta}{\Omega_2}.$$

Αν γράψουμε τη λύση σε αυτή τη μορφή, μπορούμε να κρατήσουμε, χωρίς έλλειψη της γενικότητας, μόνο τη μιγαδική λύση με το αρνητικό πρόσημο στους εκθέτες. Θα μπορούσαμε, βέβαια, να επιλέξουμε το θετικό πρόσημο αντί του αρνητικού. Η σύμβαση, όμως, που συνήθως ακολουθείται είναι να χρησιμοποιείται ο αρνητικός εκθέτης ώστε η εξέλιξη στο μιγαδικό επίπεδο των κανονικών ταλαντώσεων, για παράδειγμα της $Ae^{-i\Omega_1 t}$, να γίνεται σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Μπορεί έτσι κανείς να έχει στο μυαλό του την ακόλουθη απεικόνιση για την πολύπλοκη ταλάντωση του συστήματος: ρολόγια διάφορων μεγεθών, των οποίων ο μοναδικός δείκτης στρέφεται με διαφορετική συχνότητα για το κάθε ρολόι, παριστάνουν τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος. Η αρχική ένδειξη του κάθε ρολογιού σχετίζεται με τη φάση του κάθε κανονικού τρόπου ταλάντωσης, ενώ το μέγεθος του εκάστοτε δείκτη είναι ανάλογο με το πλάτος του συγκεκριμένου τρόπου ταλάντωσης. Η τιμή κάθε συντεταγμένης του συστήματος βρίσκεται αν προσθέσει κανείς τις στιγμιαίες προβολές των δεικτών των ρολογιών στον οριζόντιο άξονα, πολλαπλασιασμένες με την αντίστοιχη συντεταγμένη του ιδιοανύσματος του εκάστοτε τρόπου ταλάντωσης (βλ. Σχήμα 8.2).

Οι χαρακτηριστικές συχνότητες που προέκυψαν είναι εγγενής ιδιότητα του φυσικού προβλήματος και δεν εξαρτώνται από τις συντεταγμένες

¹¹Μην ξεχνάτε ότι για τον πλήρη προσδιορισμό της κίνησης απαιτείται η γνώση των τεσσάρων αρχικών συνθηκών: $\theta_1(0), \theta_2(0), \dot{\theta}_1(0)$ και $\dot{\theta}_2(0)$.



Σχήμα 8.2: Η ιδιόμορφη ταλάντωση που εκτελεί κάθε συντεταγμένη του συστήματος μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα απλών αρμονικών ταλαντώσεων πολλαπλασιασμένων με ένα διαφορετικό συντελεστή, τη συνιστώσα του αντίστοιχου σε αυτή τη συντεταγμένη τρόπου ταλάντωσης. Ο κάθε τρόπος ταλάντωσης –στην απεικόνιση αυτή, το κάθε ρολόι– έχει διαφορετική συχνότητα, διαφορετική αρχική φάση και διαφορετικό πλάτος, γι' αυτό το λόγο τα ρολόγια έχουν σχεδιαστεί με διαφορετικό μέγεθος. Αυτή η σύνθετη ταλάντωση μπορεί να παρασταθεί με το διανυσματικό άθροισμα (παχύ βέλος) των περιστεφόμενων δεικτών των ρολογιών. Η πραγματική κίνηση που εκτελεί η κάθε συντεταγμένη είναι η προβολή αυτού του αθροίσματος στον οριζόντιο άξονα.

που επιλέξαμε. Βεβαίως, σε μία γενική αλλαγή συντεταγμένων οι γραμμικές δυναμικές εξισώσεις (8.17) μπορούν να μετατραπούν σε μη γραμμικές και, ενώ οι λύσεις θα συμπεριλαμβάνουν τις μετασχηματισμένες στις νέες συντεταγμένες χαρακτηριστικές ταλαντώσεις, οι λύσεις στις νέες συντεταγμένες δεν θα είναι δυνατόν να προσδιοριστούν με τη βοήθεια της τεχνικής που ακολουθήσαμε για τη γραμμική μορφή των εξισώσεων κίνησης. Όταν, μάλιστα, οι εξισώσεις είναι μη γραμμικές, δεν υπάρχει γενικός τρόπος λύσης των εξισώσεων κίνησης. Η γραμμικότητα των εξισώσεων κίνησης διατηρείται μόνο όταν εκτελούμε αλλαγές συντεταγμένων οι οποίες αποτελούν γραμμικό μετασχηματισμό των αρχικών συντεταγμένων, δηλαδή όταν οι νέες συντεταγμένες Ξ σχετίζονται με τις αρχικές Θ μέσω κάποιου γραμμικού μετασχηματισμού

$$\Xi = \mathbf{T}\Theta, \quad (8.35)$$

όπου \mathbf{T} ένας πίνακας 2×2 , δεδομένου ότι ο θεσεογραφικός χώρος σε αυτό το πρόβλημα είναι διδιάστατος. Στις νέες συντεταγμένες ο πίνακας \mathbf{K} μετασχηματίζεται στον $\mathbf{T}\mathbf{K}\mathbf{T}^{-1}$, διότι, πολλαπλασιάζοντας την (8.17) με τον πίνακα \mathbf{T} , σχηματίζουμε την εξίσωση κίνησης για το Ξ , την εξίσωση δηλαδή των νέων συντεταγμένων

$$\ddot{\Xi} + (\mathbf{T}\mathbf{K}\mathbf{T}^{-1})\Xi = 0, \quad (8.36)$$

η οποία καταλήγει στις ίδιες χαρακτηριστικές συχνότητες.

Οι χαρακτηριστικές συχνότητες δεν αλλάζουν με αλλαγή συντεταγμένων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 8.4. Αποδείξτε κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων των οριζουσών ότι οι χαρακτηριστικές συχνότητες είναι ανεξάρτητες από τις συντεταγμένες, θεωρώντας ένα γραμμικό μετασχηματισμό των συντεταγμένων.

Άσκηση 8.5. Μετασχηματίστε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση στις νέες συντεταγμένες και δείξτε ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange καταλήγουν στις εξισώσεις κίνησης (8.36).

Εάν ο μετασχηματισμός \mathbf{T} επιλεγεί έτσι ώστε ο πίνακας

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{TKT}^{-1}$$

να είναι διαγώνιος, θα έχουμε δύο ανεξάρτητους ταλαντωτές με συχνότητες τις τετραγωνικές ρίζες των διαγώνιων στοιχείων του $\mathbf{\Delta}$. Σε αυτή την περίπτωση, όπου έχει γίνει κατάλληλη επιλογή των συντεταγμένων, οι χαρακτηριστικές συχνότητες εμφανίζονται άμεσα στο διαγωνιοποιημένο πίνακα. Σε αυτές τις συντεταγμένες τα χαρακτηριστικά ιδιοανύσματα είναι προφανώς τα

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (8.37)$$

όπου τα νέα ιδιοανύσματα $b^{(i)}$ συνδέονται με τα αρχικά $a^{(i)}$ μέσω των σχέσεων

$$\mathbf{T}^{-1}b^{(1)} = a^{(1)}, \quad \mathbf{T}^{-1}b^{(2)} = a^{(2)}.$$

Συνεπώς, ο μετασχηματισμός \mathbf{T} που διαγωνιοποιεί τον \mathbf{K} είναι αυτός που μετασχηματίζει το $b^{(1)}$, μέσω του \mathbf{T}^{-1} , στο $a^{(1)}$ και αντίστοιχα το $b^{(2)}$ στο $a^{(2)}$. Με άλλα λόγια, ο κατάλληλος μετασχηματισμός \mathbf{T}^{-1} είναι ο πίνακας \mathbf{A} , που έχει ως στήλες τα κανονικοποιημένα¹² χαρακτηριστικά ιδιοανύσματα

Χρήση
χαρακτηριστικών
συντεταγμένων.

$$\mathbf{A} = \left(a^{(1)} \quad a^{(2)} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8.38)$$

Επομένως, ο μετασχηματισμός που διαγωνιοποιεί τον πίνακα \mathbf{K} είναι

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}^{-1} \quad \text{ή} \quad \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{A}, \quad (8.39)$$

όπου ο \mathbf{A} είναι ο πίνακας που συγκροτείται από τα ιδιοανύσματα του συστήματος. Οι συντεταγμένες

$$\Xi = \mathbf{A}^{-1}\Theta, \quad (8.40)$$

ονομάζονται *χαρακτηριστικές συντεταγμένες*.

Σε αυτό το σημείο ας εξετάσουμε λίγο πιο προσεκτικά τα προηγούμενα συμπεράσματά μας. Σημειώνουμε δύο παρατηρήσεις:

- Έπειδή τα $a^{(1)}$ και $a^{(2)}$ είναι ιδιοανύσματα του \mathbf{K} , θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\mathbf{K}a^{(1)} = \Omega_1^2 a^{(1)} \quad \text{και} \quad \mathbf{K}a^{(2)} = \Omega_2^2 a^{(2)}.$$

Οι δύο αυτές σχέσεις μπορούν να συμπτυχθούν και να λάβουν τη μορφή

$$\mathbf{K}\mathbf{A} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \Omega_1^2 & 0 \\ 0 & \Omega_2^2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{\Delta}, \quad (8.41)$$

¹²Ο λόγος που θέλουμε τα ιδιοανύσματα $a^{(i)}$ να είναι κανονικοποιημένα είναι επειδή τα ιδιοανύσματα $b^{(i)}$ έχουν γραφεί ως μοναδιαία διανύσματα

όπου υπενθυμίζουμε ότι ο πίνακας \mathbf{A} έχει ως στήλες τα ιδιοανύσματα $a^{(1)}$ και $a^{(2)}$ και ο πίνακας Δ είναι η διαγώνια μορφή του \mathbf{K} . Προσέξτε τη σειρά πολλαπλασιασμού των πινάκων στο δεξιό σκέλος της εξίσωσης: πρώτα γράφεται ο \mathbf{A} και κατόπιν ο Δ .

• Τα κανονικοποιημένα ιδιοανύσματα σχηματίζουν μία ορθοκανονική βάση, όπως θα δείξουμε στο επόμενο εδάφιο για ένα γενικό σύστημα κοντά σε θέση ισορροπίας. Η σχέση ορθογωνιότητας μεταξύ των ιδιοανυσμάτων

$$(a^{(i)})^T a^{(j)} = \delta_{ij} \quad \text{με } i, j = 1, 2,$$

γράφεται συνοπτικά ως

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

αφού

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a^{(1)})^T \\ (a^{(2)})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Η σχέση (8.42) μάς πληροφορεί ότι ο πίνακας \mathbf{A} είναι ορθογώνιος

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T.$$

Έτσι, αν πολλαπλασιάσουμε την (8.41) από αριστερά με τον \mathbf{A}^T θα έχουμε

$$\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \Delta = \Delta, \quad (8.43)$$

και για άλλη μια φορά καταλήγουμε στο ότι ο μετασχηματισμός $\mathbf{T} = \mathbf{A}^{-1}$ διαγωνιοποιεί τον πίνακα \mathbf{K} .

• Τέλος, αν αντικαταστήσουμε το μετασχηματισμό (8.40) στην (8.15), η Λαγκρανζιανή στις νέες συντεταγμένες, λόγω της ορθογωνιότητας του πίνακα \mathbf{A} , λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\Xi}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \dot{\Xi} - \frac{1}{2} \Xi^T \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} \Xi = \frac{1}{2} \dot{\Xi}^T \dot{\Xi} - \frac{1}{2} \Xi^T \Delta \Xi. \quad (8.44)$$

Δηλαδή, στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \Xi &= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \Theta = \mathbf{A}^T \Theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_1 + \theta_2 \\ \theta_1 - \theta_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8.45)$$

η Λαγκρανζιανή των συζευγμένων εκκρεμών γίνεται άθροισμα ασύζευκτων ταλαντωτών

$$L = \left(\frac{1}{2} \dot{\xi}_1^2 - \frac{\Omega_1^2}{2} \xi_1^2 \right) + \left(\frac{1}{2} \dot{\xi}_2^2 - \frac{\Omega_2^2}{2} \xi_2^2 \right). \quad (8.46)$$

Το συμπέρασμα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό και έχει γενική ισχύ. Καταδεικνύει επίσης τη θεμελιώδη σημασία του αρμονικού ταλαντωτή. Διότι, όπως είδαμε, αν οι διαταραχές του συστήματος από το σημείο ισορροπίας του είναι αρκούντως μικρές, οι εξισώσεις εξέλιξης των διαταραχών

Ανάδειξη των μονοδιάστατων αρμονικών ταλαντωτών του συστήματος

είναι γραμμικές με σταθερούς συντελεστές, ενώ η δυναμική συμπεριφορά των διαταραχών στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες είναι το άθροισμα αρμονικών ταλαντωτών.

Ας εξετάσουμε, τώρα, την περίπτωση που η κίνηση πραγματοποιείται σε συνθήκες απουσίας βαρύτητας. Όταν συμβαίνει αυτό η συχνότητα ταλάντωσης των ασύζευκτων εκκρεμών είναι μηδενική, $\omega_g = 0$. Η ανάλυση για την εύρεση των χαρακτηριστικών συχνοτήτων και τρόπων ταλάντωσης είναι η ίδια. Οι χαρακτηριστικές συχνότητες θα είναι τώρα

$$\Omega_1 = 0 \text{ και } \Omega_2 = \sqrt{2}\omega_k .$$

Οι χαρακτηριστικοί τρόποι ταλάντωσης παραμένουν οι ίδιοι, όπως επίσης και οι χαρακτηριστικές συντεταγμένες. Η μόνη διαφορά είναι ότι η κίνηση που αντιστοιχεί στον πρώτο χαρακτηριστικό τρόπο ταλάντωσης, ο οποίος έχει, τώρα, μηδενική συχνότητα, δεν είναι βεβαίως ταλαντωτική αλλά ευθύγραμμη με σταθερή ταχύτητα. Πράγματι, η λαγκρανζιανή συνάρτηση στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες έχει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}\dot{\xi}_1^2 + \left(\frac{1}{2}\dot{\xi}_2^2 - \omega_k^2 \xi_2^2 \right) , \quad (8.47)$$

οπότε $\ddot{\xi}_1 = 0$ και άρα η πρώτη χαρακτηριστική συντεταγμένη εξελίσσεται με σταθερή ταχύτητα

$$\xi_1(t) = \alpha t + \beta .$$

Η γενική λύση σε αυτή την περίπτωση είναι

$$\vec{\Theta}(t) = (\alpha t + \beta) \vec{a}^{(1)} + \left(\gamma \cos \Omega_2 t + \frac{\delta}{\Omega_2} \sin \Omega_2 t \right) \vec{a}^{(2)} , \quad (8.48)$$

και σε αυτήν μπορούμε επίσης να καταλήξουμε λαμβάνοντας το όριο $\Omega_1 \rightarrow 0$ στην (8.25).

Ποια είναι η φυσική σημασία της πρώτης χαρακτηριστικής συντεταγμένης $\xi_1 = (\theta_1 + \theta_2)/\sqrt{2}$; Πρόκειται για το ανάλογο της θέσης

$$\theta_{KM} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

του κέντρου μάζας των δύο ίσων μαζών των εκκρεμών, της οποίας ως γνωστόν η ταχύτητα είναι σταθερή δεδομένου ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο σωμάτων ικανοποιεί τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα και συνεπώς διατηρείται η συνολική ορμή $\theta_1 + \theta_2$. Οι χαρακτηριστικές συντεταγμένες είναι δηλαδή αυτές που διαχωρίζουν το πρόβλημα των δύο σωμάτων στην ισοταχή κίνηση του κέντρου μάζας και στην ταλάντωση της σχετικής θέσης των δύο σωμάτων.

Γενικότερα, αν η Λαγκρανζιανή που διέπει μικρές κινήσεις ενός συστήματος δύο σωμάτων κοντά στη θέση ισορροπίας τους είναι της μορφής

$$L = \frac{m_1}{2} |\dot{\vec{x}}_1|^2 + \frac{m_2}{2} |\dot{\vec{x}}_2|^2 - \frac{k}{2} |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 , \quad (8.49)$$

Τι σημαίνει ο μηδενισμός κάποιας ιδιοσυχνότητας;

Κίνηση κέντρου μάζας,
ένας ιδιότυπος τρόπος
“ταλάντωσης”

όπως θα συνέβαινε στην περίπτωση ενός διατομικού μορίου, οι χαρακτηριστικές συχνότητες του συστήματος αυτού που χαρακτηρίζεται από έξι βαθμούς ελευθερίας θα είναι

$$\Omega_{1,2,3} = 0, \quad \Omega_{4,5,6} = \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad (8.50)$$

όπου μ είναι η ανηγμένη μάζα

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (8.51)$$

Αν λάβουμε ως συντεταγμένες το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας

$$\vec{X} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}, \quad (8.52)$$

και το διάνυσμα της σχετικής θέσης των δύο σωμάτων

$$\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1, \quad (8.53)$$

η Λαγκρανζιανή θα πάρει τη μορφή

$$L = \frac{M}{2} |\dot{\vec{X}}|^2 + \frac{\mu}{2} |\dot{\vec{x}}|^2 - \frac{k}{2} |\vec{x}|^2, \quad (8.54)$$

όπου $M = m_1 + m_2$. Το μέρος της Λαγκρανζιανής που εξαρτάται μόνο από το \vec{X} περιγράφει την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση του κέντρου μάζας, ενώ το υπόλοιπο μέρος που εξαρτάται μόνο από το \vec{x} περιγράφει την περιστροφή και ταλάντωση του άξονα που συνδέει τα δύο σώματα. Η σχετική αυτή κίνηση, \vec{x} , του ισότροπου ταλαντωτή θα πραγματοποιείται σε ένα επίπεδο –στο επίπεδο το κάθετο στη διατηρούμενη σχετική στροφορμή του συστήματος. Για τη λύση του ισότροπου αρμονικού ταλαντωτή βλέπε το Εδάφιο 7.1.

8.3 Ταλάντωση γενικού συστήματος

Σε τούτο το εδάφιο θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα της κίνησης ενός γενικού συστήματος κοντά σε κάποιο σημείο ισορροπίας του. Η ανάλυσή μας θα ακολουθήσει σε αδρές γραμμές την ανάλυση της κίνησης του συστήματος των συζευγμένων εκκρεμών.

Ένα γενικό μηχανικό
σύστημα κοντά σε
σημείο ισορροπίας

Ας θεωρήσουμε και σε αυτή την περίπτωση μικρές κινήσεις ενός συστήματος γύρω από κάποιο σημείο ισορροπίας του, το οποίο λαμβάνουμε ως την αρχή των συντεταγμένων. Η Λαγκρανζιανή ενός τέτοιου συστήματος με n βαθμούς ελευθερίας είναι (βλ. σχέση (8.11))

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M} \dot{q} - \frac{1}{2} q^T \mathbf{K} q, \quad (8.55)$$

όπου οι πίνακες της κινητικής ενέργειας \mathbf{M} και της δυναμικής ενέργειας \mathbf{K} είναι $n \times n$ συμμετρικοί πραγματικοί πίνακες και q είναι οι γενικευμένες

συντεταγμένες του φυσικού συστήματος

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} .$$

Επίσης ο πίνακας \mathbf{M} , επειδή προσδιορίζει την κινητική ενέργεια του συστήματος, η οποία είναι πάντοτε θετική ποσότητα, είναι ένας θετικός πίνακας. Η κινητική ενέργεια του συστήματος ανεξάρτητα από το πώς κινούνται τα μέρη του φυσικού συστήματος θα είναι $u^T \mathbf{M} u > 0$, όπου u είναι η τυχαία στήλη των ταχυτήτων. Ωστόσο, ο πίνακας \mathbf{K} δεν είναι κατ' ανάγκη θετικός πίνακας. Βέβαια, αν η δυναμική ενέργεια στο σημείο ισορροπίας παρουσιάζει ελάχιστο, τότε ο πίνακας \mathbf{K} είναι και αυτός θετικός. Αυτό μπορούμε εύκολα να το επιβεβαιώσουμε αν θυμηθούμε ότι τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{K} είναι

$$K_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=0} . \quad (8.56)$$

Επειδή, μάλιστα, στο σημείο ισορροπίας $q = 0$ είναι

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q} \right|_{q=0} = 0 ,$$

η δυναμική ενέργεια σε προσέγγιση δεύτερης τάξης είναι

$$V(q) = V(0) + \frac{1}{2} q^T \mathbf{K} q + O(q^3) . \quad (8.57)$$

Έτσι, αν θέλουμε η δυναμική ενέργεια στο σημείο ισορροπίας να είναι ελάχιστη ($V(q) > V(0)$ για κάθε $q \neq 0$), πρέπει $q^T \mathbf{K} q > 0$ και επομένως ο πίνακας \mathbf{K} είναι θετικός. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι στην περίπτωση που ο πίνακας \mathbf{K} είναι θετικός έχουμε μόνο ταλαντωτικές λύσεις και το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές. Αν ο πίνακας \mathbf{K} δεν είναι θετικός, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

Οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος είναι

$$\mathbf{M} \ddot{q} + \mathbf{K} q = 0 . \quad (8.58)$$

Οι χαρακτηριστικές ταλαντώσεις του συστήματος που αναζητούμε είναι κινήσεις της μορφής

$$q = a e^{-i\Omega t} , \quad (8.59)$$

όπου τα στοιχεία της στήλης a προσδιορίζουν τα σχετικά πλάτη ταλάντωσης των συντεταγμένων, όταν όλες οι συντεταγμένες του συστήματος ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα Ω . Το διάνυσμα-στήλη a ¹³ ονομάζεται χαρακτηριστικός τρόπος ταλάντωσης του συστήματος (ή ιδιοάνυσμα) και η Ω χαρακτηριστική συχνότητα (ή ιδιοσυχνότητα) του συστήματος.

¹³ Δεν γράφουμε το σύμβολο του διανύσματος θεωρώντας το a μονόσηλο πίνακα.

Αντικαθιστώντας την (8.59) ως δοκιμαστική λύση στις εξισώσεις κίνησης (8.58), συμπεραίνουμε ότι τα a και Ω πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση

$$-\Omega^2 \mathbf{M}a + \mathbf{K}a = 0 \text{ ή } \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}a = \Omega^2 a. \quad (8.60)$$

Αυτή είναι μια εξίσωση ιδιοτιμών· η Ω^2 είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ και το a ιδιοάνυσμά του.

Όταν το σύστημα είναι ενός βαθμού ελευθερίας ($n = 1$), οι πίνακες \mathbf{M} και \mathbf{K} είναι οι αριθμοί m και k αντίστοιχα και η συχνότητα της ταλάντωσης είναι $\Omega^2 = k/m$, ενώ σε ένα σύστημα n βαθμών ελευθερίας οι συχνότητες ταλάντωσης δίνονται από τις ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ που αποτελεί γενίκευση σε n διαστάσεις του λόγου k/m . Σημειωτέον ότι στη γενίκευση αυτή ο αντίστροφος πίνακας της κινητικής ενέργειας προτάσσεται του πίνακα της δυναμικής ενέργειας. Η σειρά των πινάκων είναι σημαντική, διότι, ενώ οι αριθμοί αντιμετατίθενται, δύο πίνακες, εν γένει, δεν αντιμετατίθενται.

Για να έχει το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{I})a = 0 \quad (8.61)$$

μία μη τετρμιμένη μηδενική¹⁴ λύση a , θα πρέπει το Ω να είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\det(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{I}) = 0 \text{ ή } \det(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}) = 0, \quad (8.62)$$

Χαρακτηριστικό
πολυώνυμο
συστήματος

αφού $\det(\mathbf{M}) \neq 0$. Αυτό είναι ένα πολυώνυμο n βαθμού ως προς Ω^2 . Η (8.62) θα έχει γενικά n ρίζες, οι οποίες μπορεί να είναι μιγαδικές, αλλά στην περίπτωση που εξετάζουμε, με τους πίνακες \mathbf{K} και \mathbf{M} να είναι συμμετρικοί και επιπλέον τον πίνακα \mathbf{M} , να είναι θετικός, οι ρίζες του πολυωνύμου είναι αναγκαστικά πραγματικές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πλαίσιο 8.2. Θα δείξουμε ότι, αν οι \mathbf{K} και \mathbf{M} είναι συμμετρικοί πίνακες και επιπλέον ο \mathbf{M} είναι θετικός, η (8.62) έχει αναγκαστικά n πραγματικές ρίζες. Για να το δείξουμε αυτό λαμβάνουμε τον ερμιτιανό ανάστροφο¹⁵ του συστήματος (8.60)

$$a^\dagger \mathbf{K} = (\Omega^*)^2 a^\dagger \mathbf{M} \quad (8.63)$$

και πολλαπλασιάζουμε από δεξιά με το διάνυσμα a , οπότε έχουμε

$$a^\dagger \mathbf{K}a = (\Omega^*)^2 a^\dagger \mathbf{M}a. \quad (8.64)$$

¹⁴Το επίθετο “μηδενική” αναφέρεται στην ιδιότητα ενός ομογενούς συστήματος να δίνει μηδέν στο δεξιό μέλος, μολονότι το διάνυσμα a δεν είναι το τετρμιμένο, μηδενικό διάνυσμα.

¹⁵Ο ερμιτιανός ανάστροφος ενός πίνακα \mathbf{A} είναι ο ανάστροφος του συζυγούς του $(\mathbf{A}^*)^T$. Ο ερμιτιανός ανάστροφος συμβολίζεται με ένα κατακόρυφο σπαθί \dagger και έτσι $\mathbf{A}^\dagger \equiv (\mathbf{A}^*)^T$. Αν ο πίνακας είναι πραγματικός, ο ερμιτιανός ανάστροφος είναι απλώς ο ανάστροφος πίνακας. Οι ερμιτιανοί πίνακες (hermitian) είναι οι πίνακες που ισούνται με τον ερμιτιανό ανάστρόφό τους $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ και στο χώρο των μιγαδικών πινάκων έχουν τη θέση που έχουν οι συμμετρικοί πίνακες στο χώρο των πραγματικών πινάκων. Είναι εύκολο να δείξετε ότι $(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$.

Παράλληλα, αν πολλαπλασιάσουμε τη σχέση (8.60), $\mathbf{K}a = \Omega^2 \mathbf{M}a$, από αριστερά με a^\dagger , η (8.64) γράφεται ως

$$\Omega^2 a^\dagger \mathbf{M}a = (\Omega^*)^2 a^\dagger \mathbf{M}a \text{ ή } [\Omega^2 - (\Omega^*)^2] a^\dagger \mathbf{M}a = 0. \quad (8.65)$$

Ο πίνακας \mathbf{M} , όμως, είναι θετικός και για κάθε μη μηδενικό a θα είναι $a^\dagger \mathbf{M}a > 0$. Συνεπώς, $\Omega^2 = (\Omega^*)^2$ και άρα τα Ω^2 είναι πραγματικά.

Άσκηση 8.6. Ο συμμετρικός πραγματικός πίνακας \mathbf{M} έχει οριστεί θετικός, όταν για κάθε x μη μηδενικό πραγματικό, ισχύει $x^T \mathbf{M}x > 0$. Αποδείξτε ότι και για κάθε z , μη μηδενικό μιγαδικό, ισχύει επίσης ότι $z^\dagger \mathbf{M}z > 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τα ιδιοανύσματα a , επειδή προκύπτουν από τη λύση του γραμμικού συστήματος (8.61) του οποίου όλοι οι συντελεστές είναι πραγματικοί αριθμοί (αποδείξαμε ότι και το Ω^2 είναι πραγματικός αριθμός), μπορούν να λαμβάνονται ως πραγματικά. Έτσι, η i -οστή χαρακτηριστική συχνότητα δίνεται από το πηλίκο

$$\Omega_i^2 = \frac{(a^{(i)})^T \mathbf{K}a^{(i)}}{(a^{(i)})^T \mathbf{M}a^{(i)}}, \quad (8.66)$$

όπου το $a^{(i)}$ είναι ο i -οστός χαρακτηριστικός τρόπος ταλάντωσης. Από αυτό το πηλίκο μπορούμε να προσδιορίσουμε το πρόσημο του Ω_i^2 . Επειδή ο παρονομαστής είναι πάντοτε θετικός αριθμός, το πρόσημο του Ω_i^2 εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή. Αν ο πίνακας \mathbf{K} είναι θετικός, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές, διότι όλα τα Ω_i^2 είναι θετικά και επομένως το σύστημα εκτελεί ταλαντωτικές κινήσεις. Αν ο πίνακας \mathbf{K} δεν είναι θετικός, θα υπάρχουν και αρνητικά Ω_j^2 που αντιστοιχούν σε λύσεις εκθετικής εξάρτησης από το χρόνο $e^{\pm|\Omega_j|t}$, είτε αύξουσες είτε φθίνουσες. Τότε το σημείο ισορροπίας θα είναι ασταθές. Αυτό είναι λογικό, διότι, μολονότι μπορεί να υπάρχουν αρχικές συνθήκες που να οδηγούν σε αμιγώς ταλαντωτική κίνηση με μηδενικό πλάτος των ασταθών τρόπων ταλάντωσης, η πιθανότητα να προπαρασκευάσει κανείς το σύστημα έτσι ώστε να ξεκινήσει από αυτήν ακριβώς την κατάσταση είναι μηδενική, όπως είναι πρακτικά αδύνατο να στήσει κανείς ένα μολύβι όρθιο στη μύτη του και αυτό να μείνει για πάντα όρθιο. Όταν το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές, μολονότι αρχικά μπορεί να έχουν διεγερθεί όλοι οι βαθμοί ελευθερίας, άλλος περισσότερο και άλλος λιγότερο, με την πάροδο του χρόνου η διαταραχή θα αποκτήσει τη δομή του χαρακτηριστικού τρόπου ταλάντωσης που έχει τη μέγιστη εκθετική αύξηση. Ο χρόνος που απαιτείται για να υπερिσχύσει αυτός ο τρόπος “ταλάντωσης” είναι της τάξεως $1/|\Omega_{\max}|$, όπου Ω_{\max} η μεγαλύτερη τιμή των εκθετών Ω_j .

Ευστάθεια - Αστάθεια

Έστω τώρα δύο χαρακτηριστικοί τρόποι ταλάντωσης $a^{(i)}$, $a^{(j)}$ που αντιστοιχούν σε διαφορετικές χαρακτηριστικές συχνότητες Ω_i^2 , Ω_j^2 . Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τη γεωμετρική σχέση αυτών; Επαναλαμβάνουμε τα βήματα που ακολουθήσαμε και προηγουμένως όταν δείξαμε ότι η Ω^2 είναι πραγματική. Τα δύο ιδιοανύσματα ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\mathbf{K}a^{(i)} = \Omega_i^2 \mathbf{M}a^{(i)}, \quad \mathbf{K}a^{(j)} = \Omega_j^2 \mathbf{M}a^{(j)}. \quad (8.67)$$

Αναστρέφουμε την πρώτη από τις δύο σχέσεις και αφού όλα τα στοιχεία είναι πραγματικά, δεν χρειάζεται να πάρουμε πλέον τον ερμιτιανό ανάστροφο

$$(a^{(i)})^T \mathbf{K} = \Omega_i^2 (a^{(i)})^T \mathbf{M}.$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τη σχέση αυτή από δεξιά με το $a^{(j)}$

$$(a^{(i)})^T \mathbf{K}a^{(j)} = \Omega_i^2 (a^{(i)})^T \mathbf{M}a^{(j)}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη από τις σχέσεις (8.67) από αριστερά με το $(a^{(i)})^T$ και συγκρίνοντας με την προηγούμενη σχέση καταλήγουμε ότι

$$\Omega_j^2 (a^{(i)})^T \mathbf{M}a^{(j)} = \Omega_i^2 (a^{(i)})^T \mathbf{M}a^{(j)}, \quad (8.68)$$

που συνεπάγεται ότι

$$(\Omega_j^2 - \Omega_i^2) (a^{(i)})^T \mathbf{M}a^{(j)} = 0. \quad (8.69)$$

Επειδή έχουμε θεωρήσει ότι $\Omega_i^2 \neq \Omega_j^2$, θα είναι αναγκαστικά

$$(a^{(i)})^T \mathbf{M}a^{(j)} = 0. \quad (8.70)$$

Με άλλα λόγια οι χαρακτηριστικοί τρόποι ταλάντωσης είναι ορθογώνιοι, όχι όμως υπό την ευκλείδεια έννοια, $(a^{(i)})^T a^{(j)} = 0$, αλλά υπό μια γενικότερη έννοια μέσω της μετρικής \mathbf{M} . Επειδή ο πίνακας \mathbf{M} είναι θετικός, μπορούμε να κανονικοποιούμε τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης μέσω της μετρικής \mathbf{M} επιλέγοντας τα διανύσματα έτσι ώστε

$$(a^{(i)})^T \mathbf{M}a^{(i)} = 1,$$

χωρίς να εφαρμόζουμε την αθροιστική σύμβαση.

Αν όλες οι χαρακτηριστικές συχνότητες είναι διαφορετικές, έχουμε n γραμμικά ανεξάρτητους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης $a^{(i)}$ κανονικοποιημένους μέσω της μετρικής \mathbf{M} . Οι σχέσεις ορθογωνιότητας

$$(a^{(i)})^T \mathbf{M}a^{(j)} = \delta_{ij},$$

μπορούν να γραφούν με έναν ιδιαίτερα κομψό τρόπο, αν ορίσουμε τον $n \times n$ πίνακα

$$\mathbf{A} = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}), \quad (8.71)$$

που έχει ως στήλες τα διανύσματα των χαρακτηριστικών τρόπων ταλάντωσης. Στη γραφή αυτή μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι οι σχέσεις ορθογωνιότητας των κανονικοποιημένων ιδιοανυσμάτων εκφράζονται μέσω της σχέσης

$$\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad (8.72)$$

Ορθογωνιότητα των
χαρακτηριστικών
τρόπων ταλάντωσης

όπου ο πίνακας \mathbf{I} είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Επίσης όλες οι σχέσεις που εμπεριέχονται στην (8.60) και ικανοποιούνται από τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης, μπορούν να γραφούν ως

$$\mathbf{KA} = \mathbf{MA}\Delta, \quad (8.73)$$

όπου Δ ένας διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις χαρακτηριστικές συχνότητες

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij}\Omega_i^2,$$

χωρίς την αθροιστική σύμβαση. Προσέξτε στη σχέση (8.73) τη σειρά των πινάκων!

Τι συμβαίνει, όμως, όταν υπάρχουν δύο ή περισσότεροι χαρακτηριστικοί τρόποι ταλάντωσης που έχουν την ίδια χαρακτηριστική συχνότητα; Μία τέτοια περίπτωση συναντήσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, όταν διερευνούσαμε τις χαρακτηριστικές συχνότητες ενός διατομικού μορίου. Μια άλλη περίπτωση είναι οι μικρές κινήσεις που εκτελεί ένα εκκρεμές γύρω από την κατακόρυφο στο πεδίο βαρύτητας, όταν η κίνησή του δεν περιορίζεται σε ένα επίπεδο. Επειδή η κίνηση της μάζας του εκκρεμούς στο άκρο του νήματος διαγράφει μια τροχιά σφαιρική, το εκκρεμές ονομάζεται σφαιρικό εκκρεμές. Το σφαιρικό εκκρεμές έχει μία μόνο χαρακτηριστική συχνότητα, την

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

όπου l είναι το μήκος του νήματος, ενώ χαρακτηριστικός τρόπος ταλάντωσης είναι η κίνηση του εκκρεμούς σε οποιοδήποτε κατακόρυφο επίπεδο.

Εκφυλισμός τρόπων
ταλάντωσης

Άσκηση 8.7. Προσδιορίστε σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες τη Λαγκρανζιανή που διέπει μικρές κινήσεις γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας ενός σφαιρικού εκκρεμούς. Προσδιορίστε τις χαρακτηριστικές συχνότητες του εκκρεμούς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Από τα προηγούμενα παραδείγματα είναι φανερό ότι δεν συμβαίνει τίποτα το εξαιρετικό, όταν εμφανίζεται ο εκφυλισμός των συχνοτήτων που περιγράψαμε παραπάνω.¹⁶ Ενώ δύο τυχαίοι χαρακτηριστικοί τρόποι ταλάντωσης που αντιστοιχούν σε κοινές ιδιοσυχνότητες δεν είναι αναγκαστικά ορθογώνιοι ως προς τη μετρική \mathbf{M} (βλ. σχέση (8.69)), είναι προφανές ότι μπορούμε να επιλέξουμε δύο τρόπους ταλάντωσης, οι οποίοι να εί-

¹⁶Είναι περίεργο ότι και ο Lagrange και ο Laplace πίστευαν, εσφαλμένα βέβαια, ότι, όταν εμφανίζεται αυτός ο εκφυλισμός των χαρακτηριστικών συχνοτήτων, πρέπει να υπάρχει συντονισμός και να προκύπτουν λύσεις που αυξάνονται γραμμικά με το χρόνο. Αυτό είναι φυσικά αδύνατον να συμβεί σε ένα τέτοιο πρόβλημα όπου οι πίνακες είναι ερμιτιανοί. Συμβαίνει, όμως, πράγματι σε μη ερμιτιανούς πίνακες.

ναι ορθογώνιοι μεταξύ τους. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα του σφαιρικού εκκρεμούς οι δύο αυτοί τρόποι θα περιγράψουν την κίνηση που εκτελείται σε δύο κάθετα μεταξύ τους κατακόρυφα επίπεδα. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι μια τέτοια κατασκευή είναι πάντοτε εφικτή.

Έστω ότι τα $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ είναι δύο διαφορετικοί χαρακτηριστικοί τρόποι ταλάντωσης με ίδια χαρακτηριστική συχνότητα Ω . Τότε, επειδή

$$\mathbf{K}a^{(1)} = \Omega^2 \mathbf{M}a^{(1)} \text{ και } \mathbf{K}a^{(2)} = \Omega^2 \mathbf{M}a^{(2)}, \quad (8.74)$$

κάθε διάνυσμα που προκύπτει από γραμμικό συνδυασμό των $a^{(1)}$ και $a^{(2)}$

$$a = \lambda a^{(1)} + \mu a^{(2)},$$

θα είναι χαρακτηριστικός τρόπος ταλάντωσης με συχνότητα και πάλι Ω^2 . Ο λόγος είναι ότι, πολλαπλασιάζοντας τις (8.74) με λ και μ αντιστοίχως και προσθέτοντάς τες, λαμβάνουμε

$$\mathbf{K}(\lambda a^{(1)} + \mu a^{(2)}) = \Omega^2 \mathbf{M}(\lambda a^{(1)} + \mu a^{(2)}). \quad (8.75)$$

Ορθογωνιοποίηση
των εκφυλισμένων
ιδιοανυσμάτων

Αν είχαμε ξεκινήσει με μη ορθογώνιους χαρακτηριστικούς τρόπους $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, δηλαδή αν

$$(a^{(1)})^T \mathbf{M}a^{(2)} \neq 0,$$

τότε ο νέος χαρακτηριστικός τρόπος ταλάντωσης

$$(a^{(2)})' \equiv N \left[a^{(2)} - \frac{(a^{(1)})^T \mathbf{M}a^{(2)}}{(a^{(1)})^T \mathbf{M}a^{(1)}} a^{(1)} \right], \quad (8.76)$$

θα ήταν ορθογώνιος με τον $a^{(1)}$, δηλαδή

$$(a^{(1)})^T \mathbf{M}(a^{(2)})' = 0. \text{ }^{17}$$

Η παράμετρος N πρέπει να ρυθμιστεί ανάλογα ώστε το νέο αυτό ιδιοάνυσμα να έχει μέτρο 1. Αυτή η κατασκευή μπορεί να επεκταθεί και σε περισσότερους από δύο χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης που έχουν την ίδια χαρακτηριστική συχνότητα. Ξεκινά κανείς από κάποιο ιδιοάνυσμα και κατασκευάζει ένα προς ένα νέα ιδιοανύσματα ορθογώνια στα προηγούμενα μέχρι να οικοδομήσει μια πλήρη βάση ολόκληρου του χώρου των εκφυλισμένων ιδιοανυσμάτων. Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλοι οι χαρακτηριστικοί τρόποι ταλάντωσης είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους και ο πίνακας \mathbf{A} μπορεί να κατασκευαστεί πάντα έτσι ώστε $\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

¹⁷ Η κατασκευή αυτή είναι ανάλογη με τη γνωστή κατασκευή διανύσματος \vec{v}_2' κάθετου σε ένα άλλο διάνυσμα \vec{v}_1 , επί του επιπέδου που ορίζεται από το \vec{v}_1 και από κάποιο άλλο διάνυσμα \vec{v}_2 μη συγγραμμικό με το \vec{v}_1 :

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1.$$

8.4 Οι χαρακτηριστικές συντεταγμένες

Οι χαρακτηριστικές συχνότητες, όπως είδαμε και στο αρχικό παράδειγμα των συζευγμένων εκκρεμών, αποτελούν φυσική ιδιότητα του συστήματος και δεν εξαρτώνται από τις συντεταγμένες. Οποιοσδήποτε γραμμικός μετασχηματισμός των συντεταγμένων διατηρεί τη γραμμικότητα των εξισώσεων κίνησης και οδηγεί στις ίδιες χαρακτηριστικές συχνότητες.

Όπως εξηγήσαμε στο παράδειγμα των συζευγμένων εκκρεμών, αν ορίσουμε τις χαρακτηριστικές συντεταγμένες¹⁸ Q ως

$$q = \mathbf{A}Q \quad \text{ή} \quad Q = \mathbf{A}^{-1}q, \quad (8.77)$$

τότε η Λαγκρανζιανή διαχωρίζεται σε n ανεξάρτητες Λαγκρανζιανές μονοδιάστατων αρμονικών ταλαντωτών. Πράγματι, αν χρησιμοποιήσουμε την ορθογωνιότητα των χαρακτηριστικών τρόπων ταλάντωσης (8.72) και τη σχέση (8.73), η Λαγκρανζιανή (8.55) στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \left(\dot{Q}^T \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} \dot{Q} - Q^T \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} Q \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\dot{Q}^T \dot{Q} - Q^T \mathbf{\Delta} Q \right). \end{aligned} \quad (8.78)$$

Ο διαγώνιος πίνακας $\mathbf{\Delta}$ έχει ως στοιχεία του τα τετράγωνα των χαρακτηριστικών συχνοτήτων. Συνεπώς, η παραπάνω Λαγκρανζιανή γράφεται συναρτήσει των χαρακτηριστικών συντεταγμένων Q ως

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\dot{Q}_i^2 - \Omega_i^2 Q_i^2 \right). \quad (8.79)$$

Η Λαγκρανζιανή γραμμένη στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες

Αυτό σημαίνει ότι στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες το φυσικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα n ανεξάρτητων μονοδιάστατων αρμονικών ταλαντωτών. Πράγματι, οι εξισώσεις κίνησης για τις συντεταγμένες Q_i είναι

$$\ddot{Q}_i + \Omega_i^2 Q_i = 0, \quad (8.80)$$

και εξελίσσονται κατά περίπτωση σύμφωνα με τις:

$$Q_i(t) = \begin{cases} \alpha_i \cos(\sqrt{\Omega_i^2} t + \delta_i), & \text{αν } \Omega_i^2 > 0 \\ \alpha_i(t + \delta_i), & \text{αν } \Omega_i^2 = 0 \\ \alpha_i \cosh(\sqrt{-\Omega_i^2} t + \delta_i), & \text{αν } \Omega_i^2 < 0. \end{cases} \quad (8.81)$$

Ας επικεντρώσουμε την προσοχή μας τώρα στην περίπτωση που το σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι ευσταθές οπότε κάθε χαρακτηριστική συντεταγμένη Q_i ταλαντώνεται με συχνότητα Ω_i . Το πλήθος των

¹⁸Στη βιβλιογραφία χρησιμοποιείται και ο όρος *κανονικές συντεταγμένες* (*normal coordinates*). Θα τον αποφύγουμε, όμως, εδώ για να μη δημιουργηθεί σύγχυση με τις κανονικές συντεταγμένες της χαμιλτονιανής μηχανικής.

ιδιοσυχνοτήτων, λαμβάνοντας υπόψη και τους τυχόν εκφυλισμούς συχνοτήτων, είναι ίσο με το πλήθος των βαθμών ελευθερίας του συστήματος. Οι αρχικές συντεταγμένες q_i μπορούν αμέσως να υπολογιστούν αν πολλαπλασιάσουμε το διάνυσμα $Q = (Q_1(t), \dots, Q_n(t))^T$ με τον πίνακα A

$$q(t) = A Q(t) \quad (8.82)$$

ή

$$q_i(t) = A_{ij} Q_j(t). \quad (8.83)$$

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια μερικές ενδιαφέρουσες ειδικές περιπτώσεις κίνησης:

Οι επιπτώσεις των αρχικών συνθηκών στη διέγερση των χαρακτηριστικών τρόπων ταλάντωσης

• Ας υποθέσουμε ότι διεγείρεται μόνο ένας χαρακτηριστικός τρόπος ταλάντωσης, έστω ο j -οστός. Σε αυτή την περίπτωση όλα τα πλάτη ταλάντωσης α_i είναι μηδενικά εκτός του α_j , οπότε η κίνηση στις αρχικές συντεταγμένες είναι (χωρίς αθροιστική σύμβαση)

$$q_i(t) = A_{ij} \alpha_j \cos(\Omega_j t + \delta_j) = a_i^{(j)} \alpha_j \cos(\Omega_j t + \delta_j). \quad (8.84)$$

Αυτό σημαίνει ότι, αν διεγείρουμε τον j -οστό χαρακτηριστικό τρόπο ταλάντωσης, όλοι οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος θα ταλαντώνονται με την χαρακτηριστική συχνότητα Ω_j με πλάτη ανάλογα των συνιστωσών του j -οστού χαρακτηριστικού τρόπου ταλάντωσης $a^{(j)}$.¹⁹

• Μια δεύτερη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι εκείνη κατά την οποία το σύστημα βρίσκεται αρχικά ακίνητο με όλες τις συντεταγμένες του στη θέση ισορροπίας εκτός από τη j -οστή φυσική συντεταγμένη, η οποία βρίσκεται στη θέση $q_j(0)$. Επειδή η αρχική ταχύτητα του συστήματος είναι μηδενική, η ταχύτητα θα είναι μηδενική και στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες, οπότε η κίνηση θα εξελιχθεί ως ακολούθως (με επαναφορά τώρα της αθροιστικής σύμβασης):

$$q_i(t) = A_{ij} Q_j(0) \cos(\Omega_j t). \quad (8.85)$$

Επειδή αρχικά το σύστημα βρίσκεται στη θέση

$$q(0) = (0, 0, \dots, 0, q_j(0), 0, \dots)^T, \quad (8.86)$$

η αρχική διέγερση των χαρακτηριστικών συντεταγμένων θα είναι (και πάλι χωρίς αθροιστική σύμβαση)

$$Q_j(0) = (A^{-1})_{ji} q_i(0). \quad (8.87)$$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται να διεγερθούν, εν γένει, όλοι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης και η κίνηση να διαδίδεται σε όλες τις συντεταγμένες q_i . Η κίνηση είναι τελικά μια πολύπλοκη υπέρθεση ταλαντώσεων η καθεμιά από τις οποίες διενεργείται με μία από τις n συχνότητες Ω_j .

¹⁹ Προσέξτε ότι τα σύμβολα για τα πλάτη α είναι διαφορετικά από τα σύμβολα για τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης $a^{(j)}$.

²⁰ Η παρουσία τριών ίδιων δεικτών στην περίπτωση αυτή δεν είναι προβληματική και δεν προκαλεί σύγχυση. Το δεξιό σκέλος της εξίσωσης είναι άθροισμα από όρους με κοινή τιμή του δείκτη j .

Άσκηση 8.8. Το σύστημα εκτελεί περιοδική κίνηση όταν υπάρχει ένας ελάχιστος χρόνος T , για τον οποίο $q(t) = q(t + T)$. Ο χρόνος T ονομάζεται περίοδος του συστήματος. Δείξτε ότι, μόνον όταν όλες οι χαρακτηριστικές συχνότητες βρίσκονται σε ρητή σχέση μεταξύ τους, προκύπτει περιοδική κίνηση. Ποια είναι τότε η περίοδος της κίνησης; Σημειώνουμε ότι, όταν οι χαρακτηριστικές συχνότητες είναι άρρητοι αριθμοί, τότε η κίνηση ονομάζεται ψευδο-περιοδική (*quasi-periodic*).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ολοκληρώνοντας την ανάλυσή μας, πρέπει να επισημάνουμε ότι τα δύο τελευταία εδάφια δεν είναι τίποτε άλλο παρά απλή επανάληψη της ανάλυσης του προβλήματος των συζευγμένων εκκρεμών, γενικευμένης απλώς σε περισσότερες συντεταγμένες. Επομένως, θα μπορούσε κανείς να αγνοήσει τα τελευταία δύο εδάφια και να μελετήσει για άλλη μία φορά το εδάφιο των “συζευγμένων ταλαντωτών” με ένα ευρύτερο πνεύμα, έχοντας στο νου του ότι τα διανύσματα, τα οποία χειρίζεται, μπορούν να έχουν περισσότερες από δύο συντεταγμένες, ενώ οι πίνακες είναι μεγαλύτερης διάστασης από 2×2 . Για να μην υποδιβάσουμε, όμως, εντελώς τη σημασία των τελευταίων εδαφίων, θα επαναλάβουμε τα δύο νέα στοιχεία τα οποία αναδύθηκαν από τη γενικευμένη ανάλυση. (α) Το πρώτο στοιχείο αφορά στις σχέσεις των χαρακτηριστικών ιδιοανυσμάτων: τα ιδιοανύσματα αυτά δεν είναι ορθογώνια το ένα με το άλλο, αλλά γίνονται ορθογώνια μέσω του πίνακα M που παίζει το ρόλο της μετρικής στο χώρο των ιδιοανυσμάτων. Στο αρχικό παράδειγμα των δύο συζευγμένων εκκρεμών έτυχε η μετρική αυτή να είναι η ευκλείδεια, οπότε ήταν άνευ σημασίας η χρήση του μοναδιαίου M για την επίδειξη της ορθογωνιότητας. (β) Το δεύτερο στοιχείο είναι η δυνατότητα που μας προσφέρεται να κατασκευάσουμε τα ιδιοανύσματα που αντιστοιχούν σε εκφυλισμένους τρόπους ταλάντωσης (σύμπτωση ιδιοσυχνοτήτων) έτσι ώστε να είναι κάθετα το ένα στο άλλο. Η κατασκευή είναι ανάλογη με την κατασκευή μιας ορθοκανονικής βάσης διανυσμάτων ώστε να μπορούμε να περιγράψουμε ένα διάνυσμα εύκολα. Αυτά, όμως, τα στοιχεία που διαφοροποιούν το γενικό πρόβλημα από το παράδειγμα των συζευγμένων εκκρεμών είναι απλώς τεχνικές λεπτομέρειες που εμφανίστηκαν στην πορεία προς την εξαγωγή ενός εντυπωσιακού αποτελέσματος: κάθε φυσικό σύστημα, όσο πολύπλοκο και αν είναι, αν βρεθεί κοντά σε κάποιο σημείο ισορροπίας του, συμπεριφέρεται ως υπέρθεση από τόσους μονοδιάστατους αρμονικούς ταλαντωτές, όσοι είναι και οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος.

Αν κατανοήσατε την ανάλυση των συζευγμένων ταλαντωτών, τα τελευταία εδάφια δεν είναι τίποτε άλλο από απλή επανάληψη

8.5 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις μορίων

Ας εξετάσουμε τώρα τη συμπεριφορά ενός συστήματος του οποίου οι μικρές κινήσεις διεγείρονται από χρονοεξαρτώμενα εξωτερικά αίτια και ας θεωρήσουμε αρχικά ότι η εξωτερική διέγερση είναι μια αρμονική συνάρτηση του χρόνου. Το παράδειγμα αυτό έχει εξαιρετική φυσική σημα-

σία.²¹ Αν προσπέσει σε ένα υλικό ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, το παλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

θα ασκήσει στα ηλεκτρόνια του ατόμου αρμονική δύναμη $-e\vec{E}$ και θα τα εξαναγκάσει να ταλαντωθούν. Ίσως αναρωτηθείτε τι σχέση έχουν οι ταλαντώσεις με το πρόβλημα της κίνησης των ηλεκτρονίων. Έχοντας κατά νου τη νευτώνεια πλανητική εικόνα για την κίνηση των ηλεκτρονίων γύρω από τον πυρήνα, ίσως υποθέσετε ότι είναι φυσικότερο να μελετήσει κανείς την επίπτωση μίας διαταρακτικής αρμονικής δύναμης στην ελλειπτική κίνηση των ηλεκτρονίων καθώς αυτά βρίσκονται στο κεντρικό δυναμικό Coulomb του πυρήνα. Σήμερα, βέβαια, γνωρίζουμε ότι η εικόνα αυτή δεν είναι σωστή. Η κβαντομηχανική περιγραφή αποκαλύπτει, ότι, όταν τα ηλεκτρόνια αλληλεπιδρούν με το φως, συμπεριφέρονται σαν να ήταν συνδεδεμένα με τον πυρήνα μέσω απλών ελατηρίων. Η μελέτη αυτής της ταλάντωσης αποτελεί τη βάση για τη φυσική ερμηνεία πλήθους φαινομένων: του δείκτη διάθλασης του φωτός στα υλικά, της απορρόφησης της ακτινοβολίας και της δημιουργίας φασματικών γραμμών απορρόφησης καθώς επίσης και της σκέδασης του φωτός, που αποτελεί μεταξύ άλλων την αιτία για το γαλανό χρώμα που έχει ο ουρανός κατά τη διάρκεια της ημέρας και για το μενεξεδί χρώμα που αποκτά με τη δύση του ηλίου. Όλα αυτά τα φαινόμενα συμβαίνουν εξαιτίας των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων που υφίστανται τα ηλεκτρόνια των μορίων όταν πέσει σε αυτά ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Εμείς θα μελετήσουμε ειδικά το παράδειγμα των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων πολωμένων μορίων.

Είναι εκπληκτικό ότι ένα καθαρά κβαντικό φαινόμενο, όπως αυτό της αλληλεπίδρασης ενός ατόμου ή ενός μορίου με το φως, μπορεί να αναλυθεί με μεγάλη ακρίβεια με τις μεθόδους της κλασικής μηχανικής. Όταν το σύστημα βρίσκεται σε μία ενεργειακή στάθμη και το φωτίσουμε, διαταράσσεται και αποκτά μία ταλαντούμενη διπολική ροπή. Στην κβαντική μηχανική, μολονότι δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε την ακριβή διπολική ροπή του συστήματος, γνωρίζουμε τη μέση διπολική ροπή πολλών πανομοιότυπων συστημάτων. Στην ουσία μόνο αυτή η πληροφορία μάς είναι χρήσιμη, διότι, όταν φωτίζουμε ένα υλικό, δεν φωτίζουμε μόνο ένα μόριο του υλικού αλλά μία πληθώρα πανομοιότυπων μορίων και αυτό που τελικά έχει φυσική σημασία είναι η μέση συμπεριφορά όλων των μορίων. Η μέση συμπεριφορά των μορίων, όμως, μπορεί να περιγραφεί με τις μεθόδους της κλασικής μηχανικής.²² Επιπλέον, όπως ήδη αναφέραμε, η επίλυση του κβαντομηχανικού προβλήματος αποκαλύπτει ότι η αντίδραση του μορίου κατά την αλληλεπίδρασή του με το φως είναι ίδια με την εξέλιξη ενός εξαναγκασμένου αρμονικού ταλαντωτή. Θα θεωρήσουμε, λοιπόν, ένα διατομικό πολωμένο μόριο και θα υποθέσουμε ότι αποτελείται από δύο φορτισμένα σωματίδια μάζας m , που αλληλεπιδρούν με ελαστι-

²¹ Αξίζει να διαβάσετε τα εξαιρετικά Κεφάλαια 31 και 32 του πρώτου τόμου του *Feynman Lectures on Physics*.

²² Αυτό πηγάζει από το θεώρημα του Paul Ehrenfest [1880-1933] για κβαντομηχανικά συστήματα που περιγράφονται με Χαμιλτονιανές τετραγωνικής μορφής, όπως αυτή του ελεύθερου σωματιδίου ή του αρμονικού ταλαντωτή (βλ. Κεφάλαιο 9).

Φωτίζοντας μονωτικά υλικά διεγείρουμε τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης των μορίων τους

κές δυνάμεις με αντίστοιχη σταθερά ελατηρίου k . Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να μελετήσουμε και πολυατομικά μόρια· η μέθοδος είναι βέβαια η ίδια, εντούτοις οι πράξεις είναι πιο πολύπλοκες. Η σταθερά k δεν μας είναι γνωστή και διαφέρει από μόριο σε μόριο, αλλά θα μάθουμε τον τρόπο να την υπολογίζουμε. Τα δύο σωματίδια, όντας φορτισμένα με αντίθετα φορτία –το ένα με φορτίο $-q$, ενώ το άλλο με φορτίο q – σχηματίζουν ένα μόριο πολωμένο. Θα απλουστεύσουμε την παρουσίαση θεωρώντας ότι το μόριο είναι εμφυτευμένο σε κάποιο κρυσταλλικό πλέγμα και δύναται να εκτελεί μόνο μονοδιάστατες κινήσεις κατά την ευθεία που ενώνει τα δύο σωματίδια, χωρίς να έχει τη δυνατότητα να στραφεί. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις η δυναμική κατάσταση του μορίου περιγράφεται από τη μετατόπιση του θετικού φορτίου από το σημείο ισορροπίας x_1 και από την αντίστοιχη μετατόπιση από το σημείο ισορροπίας του αρνητικού φορτίου x_2 . Με άλλα λόγια η κατάσταση του μορίου προσδιορίζεται από το διάνυσμα $x = (x_1, x_2)^T$. Οι μικρές κινήσεις του μορίου διέπονται από τη δυναμική εξίσωση

$$\mathbf{M}\ddot{x} + \mathbf{K}x = 0, \quad (8.88)$$

όπου ο πίνακας της κινητικής ενέργειας είναι $\mathbf{M} = m\mathbf{I}$, (\mathbf{I} είναι ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας). Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο πίνακας της δυναμικής ενέργειας είναι

$$\mathbf{K} = k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.89)$$

Οι χαρακτηριστικές συχνότητες ταλάντωσης είναι

$$\Omega_1 = 0 \text{ και } \Omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}. \quad (8.90)$$

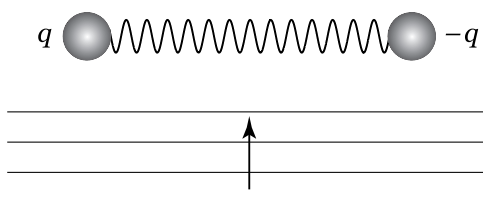
Η πρώτη συχνότητα αναφέρεται στην ευθύγραμμη ισοταχή κίνηση του κέντρου μάζας του συστήματος, ενώ η δεύτερη στην αναμενόμενη ταλάντωση της σχετικής απόστασης των ατόμων. Ο αντίστοιχος πίνακας των κανονικοποιημένων χαρακτηριστικών τρόπων ταλάντωσης είναι

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8.91)$$

Έχοντας προσδιορίσει τις χαρακτηριστικές συχνότητες και τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης, είμαστε πλέον σε θέση να αναλύσουμε με σαφήνεια τη διέγερση του μορίου, όταν προσπέσει σε αυτό ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Επειδή το μόριο έχει πολύ μικρές διαστάσεις, θεωρούμε ότι το ηλεκτρομαγνητικό κύμα που προσπίπτει στο μόριο είναι επίπεδο στην περιοχή του μορίου. Αναλύουμε πρώτα την περίπτωση κύματος με ισοφασικά επίπεδα παράλληλα στον άξονα x , που ορίζουν τα δύο φορτισμένα σωματίδια του μορίου (βλ. Σχήμα 8.3). Το ηλεκτρικό πεδίο κείται στο ισοφασικό επίπεδο και θεωρούμε ότι έχει τη διεύθυνση του άξονα του μορίου. Το ηλεκτρικό πεδίο του κύματος είναι

$$E = E_0 e^{i(lz - \omega t)},$$

Εξίσωση κίνησης των φορτίων μέσα στο μόριο



Σχήμα 8.3: Επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα με ισοφασικά επίπεδα παράλληλα στην ευθεία που ενώνει τα άτομα ενός πολωμένου μορίου ασκεί δυνάμεις στα φορτία του μορίου. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο στις ισοφασικές γραμμές του σχήματος, ενώ το μαγνητικό πεδίο, που ασκεί αμελητέα δύναμη, είναι κάθετο στο επίπεδο του σχήματος. Η κατεύθυνση, λοιπόν, της δύναμης που ασκείται στα άτομα είναι στην ευθεία του μετώπου του κύματος.

όπου z η διεύθυνση διάδοσης του κύματος (η διεύθυνση του βέλους στο Σχήμα), ω η συχνότητα του κύματος και l ο κυματάριθμος του κύματος. Το μαγνητικό πεδίο του κύματος είναι κάθετο στο επίπεδο του σχήματος και ασκεί στο μόριο πολύ μικρότερη δύναμη από αυτήν που ασκεί το ηλεκτρικό πεδίο. Αυτό συμβαίνει επειδή οι ταχύτητες των σωματιδίων είναι πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός $\dot{x} \ll c = \omega/l$. Το γεγονός αυτό μάς επιτρέπει επίσης να περιγράψουμε με ακρίβεια την κίνηση μέσω μη σχετικιστικών εξισώσεων. Έτσι, η εξίσωση κίνησης του μορίου είναι

$$\mathbf{M}\ddot{x} + \mathbf{K}x = F(t), \quad (8.92)$$

όπου η δύναμη που ασκείται στα φορτία είναι

$$F(t) = qE_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}. \quad (8.93)$$

Θεωρούμε ότι το μόριο βρίσκεται στην επιφάνεια $z = 0$, ειδάλλως η λύση πολλαπλασιάζεται με μια σταθερά. Η κίνηση που θα προκληθεί από το ηλεκτρομαγνητικό κύμα διακρίνεται με σαφήνεια, αν εκφράσουμε το πρόβλημα στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες Q που δίνονται συναρτήσει των αρχικών συντεταγμένων από τη σχέση

$$x = \mathbf{A}Q.$$

Επειδή $\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} = \mathbf{I}$ (σχέση ορθογωνιότητας των χαρακτηριστικών τρόπων ταλάντωσης) και $\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} = \mathbf{\Delta}$, όπου

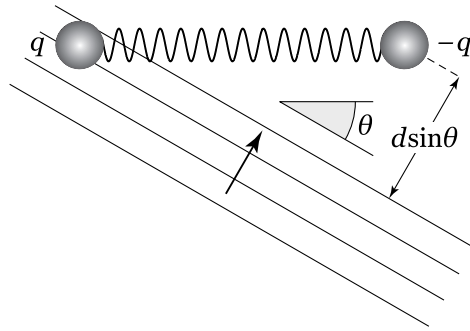
$$\mathbf{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega_2^2 \end{pmatrix} \quad (8.94)$$

είναι ο διαγώνιος πίνακας των αντίστοιχων με τις στήλες του πίνακα \mathbf{A} χαρακτηριστικών συχνοτήτων, αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (8.92) από αριστερά με τον πίνακα \mathbf{A}^T καταλήγουμε στη σχέση

$$\ddot{Q} + \mathbf{\Delta}Q = \mathbf{A}^T F(t), \quad (8.95)$$

η οποία προσδιορίζει άμεσα τις ανεξάρτητες εξαναγκασμένες κινήσεις των δύο χαρακτηριστικών τρόπων ταλάντωσης. Προσέξτε ότι οι συντεταγμένες της εξωτερικής διέγερσης στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες

Ανάλυση στις
χαρακτηριστικές
συντεταγμένες



Σχήμα 8.4: Επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα με ισοφασικές γραμμές υπό γωνία θ ως προς τον άξονα του πολωμένου μορίου.

είναι $\mathbf{A}^T F$ και όχι $\mathbf{A}^{-1} F$. Στην προκειμένη περίπτωση

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T F &= \frac{qE_0}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ &= \frac{\sqrt{2}qE_0}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (8.96)$$

Παρατηρούμε ότι το κύμα, όταν προσπίπτει σε ένα μόριο με αυτό τον τρόπο, διεγείρει μόνο τη δεύτερη χαρακτηριστική συντεταγμένη. Αυτό βεβαίως είναι αναμενόμενο, διότι η συνολική δύναμη που ασκείται στο μόριο είναι μηδενική και ως εκ τούτου το κέντρο μάζας του συστήματος δεν αλλάζει κίνηση. Η μόνη κίνηση που διεγείρεται είναι η ταλαντωτική. Επομένως, η απόκριση του συστήματος, αν αμελήσουμε την ελεύθερη ταλάντωση, είναι

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = \frac{\sqrt{2}qE_0}{\sqrt{m}} \frac{e^{-i\omega t}}{\Omega_2^2 - \omega^2}, \quad (8.97)$$

ή στις αρχικές συντεταγμένες

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \frac{qE_0}{m} \frac{e^{-i\omega t}}{\Omega_2^2 - \omega^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (8.98)$$

Προφανώς, η φυσική λύση είναι το πραγματικό μέρος των x_1, x_2 . Παρατηρούμε ότι, αν η συχνότητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι $\omega = \Omega_2$, η απόκριση είναι άπειρη και εμφανίζεται συντονισμός. Βεβαίως, σε αυτή την περίπτωση πρέπει να συμπεριληφθούν και όροι ανάλωσης που αίρουν τον απειρισμό του πλάτους. Η συχνότητα συντονισμού μπορεί να μετρηθεί πειραματικά, αφού είναι η συχνότητα στην οποία παρουσιάζεται έντονη απορρόφηση της ακτινοβολίας, και με βάση αυτή τη μέτρηση είναι δυνατός ο προσδιορισμός της τιμής της σταθεράς k .

Ας θεωρήσουμε, τώρα, ότι το ηλεκτρομαγνητικό κύμα προσπίπτει υπό γωνία σε σχέση με το μόριο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.4. Σε αυτή την περίπτωση το ηλεκτρικό πεδίο έχει διαφορετική φάση στο ένα άτομο απ' ό,τι στο άλλο. Η διαφορά φάσης είναι ίση με

$$\delta = ld \sin \theta$$

Φαινόμενα
συντονισμού κατά
τη διέγερση

και η δύναμη που ασκείται στα σωματίδια κατά μήκος του μορίου στις αρχικές συντεταγμένες είναι

$$F(t) = qE_0 \cos \theta \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\delta} \end{pmatrix} e^{-i\omega t}. \quad (8.99)$$

Στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες η δύναμη έχει συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T F &= \frac{qE_0 \cos \theta}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\delta} \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ &= \frac{\sqrt{2}qE_0 \cos \theta e^{i\delta/2}}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} -i \sin(\delta/2) \\ \cos(\delta/2) \end{pmatrix} e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (8.100)$$

Συνοπώς, η εξαναγκασμένη απόκριση του συστήματος, αν αμελήσουμε και πάλι την ελεύθερη ταλάντωση, είναι

$$Q_1 = \frac{\sqrt{2}iqE_0 \cos \theta e^{i\delta/2} \sin(\delta/2)}{\sqrt{m}} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2}, \quad (8.101)$$

$$Q_2 = \frac{\sqrt{2}qE_0 \cos \theta e^{i\delta/2} \cos(\delta/2)}{\sqrt{m}} \frac{e^{-i\omega t}}{\Omega_2^2 - \omega^2}, \quad (8.102)$$

ενώ οι φυσικές συντεταγμένες είναι

$$x_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2m}}, \quad x_2 = \frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2m}} \quad (8.103)$$

Η απόκριση του συστήματος εξαρτάται, όπως παρατηρούμε, και από τη γωνία θ και από τη συχνότητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Μάλιστα, σε αυτή την περίπτωση, όπου το ηλεκτρομαγνητικό κύμα προσπίπτει στο μόριο υπό γωνία, διεγείρονται και οι δύο τρόποι ταλάντωσης με διαφορετική όμως απόκριση, ενώ το σύστημα συντονίζεται στις δύο χαρακτηριστικές συχνότητες.

Γενικότερα, ας υποθέσουμε ότι διεγείρουμε με αρμονική μονοχρωματική δύναμη

$$F(t) = fe^{-i\omega t}$$

ένα ευσταθές σύστημα n βαθμών ελευθερίας που βρίσκεται πλησίον κάποιου σημείου ισορροπίας του, όπου η f είναι το διάνυσμα-στήλη που προσδιορίζει το πλάτος της δύναμης σε κάθε συντεταγμένη. Αφού βρούμε τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος, πράγμα που απαιτεί επίπονη εργασία, και σχηματίσουμε τον πίνακα των χαρακτηριστικών τρόπων ταλάντωσης \mathbf{A} , μετασχηματίζουμε τις εξισώσεις κίνησης από τις αρχικές συντεταγμένες q στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες Q μέσω του μετασχηματισμού $q = \mathbf{A}Q$. Οι εξισώσεις κίνησης στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες είναι

$$\ddot{Q} + \Delta Q = \mathbf{A}^T fe^{-i\omega t}, \quad (8.104)$$

όπου Δ είναι ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τις χαρακτηριστικές συχνότητες του συστήματος. Η εξαναγκασμένη κίνηση σε κάθε χαρακτηριστική

συντεταγμένη υπολογίζεται άμεσα από την εξίσωση (8.104) με αθροιστική σύμβαση ως

$$Q_i = A_{ji} \frac{f_j e^{-i\omega t}}{\Omega_j^2 - \omega^2},$$

όπου Ω_j^2 η j -οστή χαρακτηριστική συχνότητα. Η σειρά των δεικτών είναι ορθή, διότι $(\mathbf{A}^T)_{ij} = A_{ji}$. Με τη χρήση πινάκων η εξαναγκασμένη απόκριση των χαρακτηριστικών συντεταγμένων γράφεται

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{\Delta} - \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{f} e^{-i\omega t}.$$

Η εξαναγκασμένη κίνηση ως προς τις αρχικές συντεταγμένες, με χρήση πάλι της αθροιστικής σύμβασης, λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} q_i &= A_{ij} Q_j \\ &= A_{ij} A_{kj} \frac{f_k e^{-i\omega t}}{\Omega_k^2 - \omega^2}, \end{aligned} \quad (8.105)$$

ενώ, αν χρησιμοποιήσουμε πίνακες η κίνηση περιγράφεται από την έκφραση

$$\mathbf{q} = \mathbf{A} (\mathbf{\Delta} - \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{f} e^{-i\omega t}. \quad (8.106)$$

Επομένως, το σύστημα έχει n συχνότητες συντονισμού, οι οποίες είναι οι χαρακτηριστικές συχνότητές του, όπως ακριβώς υποθέσαμε στην αρχή του κεφαλαίου. Πρακτικά, λοιπόν, οι χαρακτηριστικές συχνότητες μπορούν να προσδιοριστούν από πειράματα συντονισμού του συστήματος. Ωστόσο, ο θεωρητικός υπολογισμός των χαρακτηριστικών συχνοτήτων πολύπλοκων συστημάτων είναι επίπονος και πραγματοποιείται με αριθμητικές μεθόδους ή με κάποιον προσεγγιστικό υπολογισμό σαν αυτόν που θα περιγράψουμε στο επόμενο εδάφιο.

8.6 Ιδιοσυχνότητες και πηλίκο Rayleigh

Ο άγγλος φυσικός John William Strutt Rayleigh [1842-1919] το 1873, την εποχή που ερευνούσε τις ιδιότητες των ηχητικών κυμάτων, ανακάλυψε μια ιδιότητα των χαρακτηριστικών συχνοτήτων και τρόπων ταλάντωσης ενός φυσικού συστήματος που έχει ιδιαίτερη θεωρητική σημασία και πρακτική αξία. Απέδειξε ότι το πηλίκο

$$\rho(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}}{\mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q}}, \quad (8.107)$$

που σχηματίζεται από τους σάμμετρικούς πίνακες \mathbf{K} και \mathbf{M} καθίσταται στάσιμο, όταν οι συντεταγμένες \mathbf{q} αντιστοιχούν στους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης και οι στάσιμες τιμές του πηλίκου αυτού, που ονομάζεται *πηλίκο Rayleigh*, είναι τα τετράγωνα των χαρακτηριστικών συχνοτήτων του συστήματος.

Οι συχνότητες συντονισμού είναι οι χαρακτηριστικές συχνότητες

Ορισμός του πηλίκου Rayleigh

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πλαίσιο 8.3. Αρχεί να αποδείξουμε ότι το πηλίκο Rayleigh καθίσταται στάσιμο για τα διανύσματα q που είναι γενικευμένα ιδιοανύσματα των συμμετρικών πινάκων \mathbf{K} και \mathbf{M} , που ικανοποιούν δηλαδή τη σχέση $\mathbf{K}q = \lambda\mathbf{M}q$. Αν ισχύει κάτι τέτοιο, τότε οι ιδιοτιμές λ είναι τα τετράγωνα των χαρακτηριστικών συχνοτήτων και τα ιδιοανύσματα q οι χαρακτηριστικοί τρόποι ταλάντωσης του συστήματος. Οι στάσιμες τιμές του πηλίκου $\rho(q)$ και τα q που καθιστούν το πηλίκο Rayleigh στάσιμο προσδιορίζονται από τις συνθήκες $\partial\rho/\partial q_i = 0$ για $i = 1, \dots, n$. Από την (8.107), αν λάβουμε υπόψη τη συμμετρικότητα των πινάκων \mathbf{K} και \mathbf{M} , βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial\rho}{\partial q_i} = \frac{2}{q^T\mathbf{M}q} (K_{ij}q_j - \rho(q)M_{ij}q_j) = 0. \quad (8.108)$$

Συνεπώς, το πηλίκο Rayleigh καθίσταται στάσιμο για εκείνα τα q που ικανοποιούν τη σχέση

$$\mathbf{K}q = \rho(q)\mathbf{M}q. \quad (8.109)$$

Αυτό σημαίνει ότι οι χαρακτηριστικοί τρόποι ταλάντωσης καθιστούν στάσιμο το πηλίκο Rayleigh, ενώ οι χαρακτηριστικές συχνότητες δίνονται από τις στάσιμες τιμές του πηλίκου αυτού.

Πρακτικές εφαρμογές του πηλίκου Rayleigh

Η ιδιότητα αυτή του πηλίκου Rayleigh, η οποία ονομάζεται και αρχή των Rayleigh-Ritz, έχει πολλές εφαρμογές στον προσεγγιστικό προσδιορισμό των χαρακτηριστικών συχνοτήτων σύνθετων φυσικών συστημάτων όπως για παράδειγμα στον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών συχνοτήτων των ταλαντώσεων του Ήλιου και της Γης ή ακόμη και στον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών συχνοτήτων των ταλαντώσεων έντονα σχετικιστικών και υπερσυμπαγών αντικειμένων όπως είναι οι αστέρες νετρονίων. Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα, εάν έχουμε σφάλμα τάξης ϵ στον προσδιορισμό του χαρακτηριστικού τρόπου ταλάντωσης, το σφάλμα στον καθορισμό της αντίστοιχης χαρακτηριστικής συχνότητας είναι τάξης ϵ^2 ! Με αυτό τον τρόπο έχουμε τη δυνατότητα να προσεγγίσουμε με μεγάλη ακρίβεια τις χαρακτηριστικές συχνότητες του συστήματος, εάν μπορούμε να προτείνουμε, βασισμένοι στη διαίσθησή μας, κάποιον υποψήφιο χαρακτηριστικό τρόπο ταλάντωσης. Εξάλλου, ακόμη και αν δεν είναι δυνατή με κανένα τρόπο η πρόβλεψη της δομής των χαρακτηριστικών τρόπων ταλάντωσης, μερικοί απλοί υπολογισμοί του πηλίκου Rayleigh με τυχαία ανύσματα καταδεικνύουν άμεσα ότι η μέγιστη χαρακτηριστική συχνότητα του συστήματος πρέπει να είναι μεγαλύτερη από όλες τις τιμές των πηλίκων Rayleigh, ενώ η ελάχιστη ιδιοσυχνότητα πρέπει να είναι μικρότερη από όλες τις τιμές των πηλίκων Rayleigh. Αυτό το θεώρημα θα το αποδείξουμε στο επόμενο εδάφιο. Αν είχαμε την υπομονή να εκτελέσουμε αρκετούς υπολογισμούς, θα παρατηρούσαμε ότι, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, οι τιμές του πηλίκου που θα υπολογίζαμε για τυχαία ανύσματα, συσσωρεύονται γύρω από κάποιες συγκεκριμένες τιμές, οι οποίες είναι οι χαρακτηριστικές συχνότητες του συστήματος. Μπορεί να μη σας ικανοποιεί το γεγονός ότι πολλές φορές πρέπει να προσεγγιστικές μεθόδους τέτοιας μορφής, αλλά αυτό είναι αναγκαίο, όταν αντιμετωπίζουμε σύνθετα και δυσεπίλυτα φυσικά προβλήματα.

8.7 Προσεγγιστικός προσδιορισμός της θεμελιώδους ταλάντωσης μιας αλυσίδας που κρέμεται

Ένα σύνθετο εκκρεμές αποτελείται από ένα αβαρές νήμα συνολικού μήκους L στο οποίο ανά διαστήματα μήκους l είναι δεμένες n χάντρες μάζας m η κάθε μία. Το νήμα κρέμεται σε σταθερό πεδίο βαρύτητας. Ας εξετάσουμε τις μικρές κινήσεις που εκτελεί το εκκρεμές γύρω από την κατακόρυφο, η οποία είναι η προφανής κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας του συστήματος. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη θεμελιώδη χαρακτηριστική ταλάντωση τούτου του εκκρεμούς, δηλαδή να προσδιορίσουμε τη μικρότερη χαρακτηριστική συχνότητα και τον αντίστοιχο χαρακτηριστικό τρόπο ταλάντωσης. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το όριο $n \rightarrow \infty$, υπό σταθερή συνολική μάζα του συστήματος M και με συνολικό μήκος L . Το σύνθετο αυτό εκκρεμές μετατρέπεται τότε σε μια αλυσίδα με γραμμική πυκνότητα μάζας $\rho = M/L$ και το κάθε εκκρεμές μετατρέπεται σε ένα εκκρεμές απειροστού μήκους $l = L/n$ με αντίστοιχη μάζα $m = M/n$. Λαμβάνοντας αυτό το όριο στη μελέτη του σύνθετου εκκρεμούς, θα είμαστε σε θέση να περιγράψουμε τις ταλαντώσεις ενός σχοινοῦ ή μιας αλυσίδας στο πεδίο βαρύτητας.

Ας γράψουμε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος των n μαζών. Ως συντεταγμένες της i -οστής μάζας λαμβάνουμε τη γωνία θ_i που σχηματίζει το τμήμα του νήματος, μήκους $l = L/n$, μεταξύ της i -οστής και της $(i-1)$ -οστής μάζας (βλ. Σχήμα 8.5). Εάν θεωρήσουμε καρτεσιανό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο ανάρτησης του νήματος, η θέση της πρώτης χάντρας είναι

$$x_1 = l \sin \theta_1, \quad y_1 = -l \cos \theta_1, \quad (8.110)$$

ενώ η θέση της i -οστής μάζας προσδιορίζεται από την αναδρομική σχέση

$$x_i = x_{i-1} + l \sin \theta_i, \quad y_i = y_{i-1} - l \cos \theta_i \quad \text{με } i = 2, \dots, n. \quad (8.111)$$

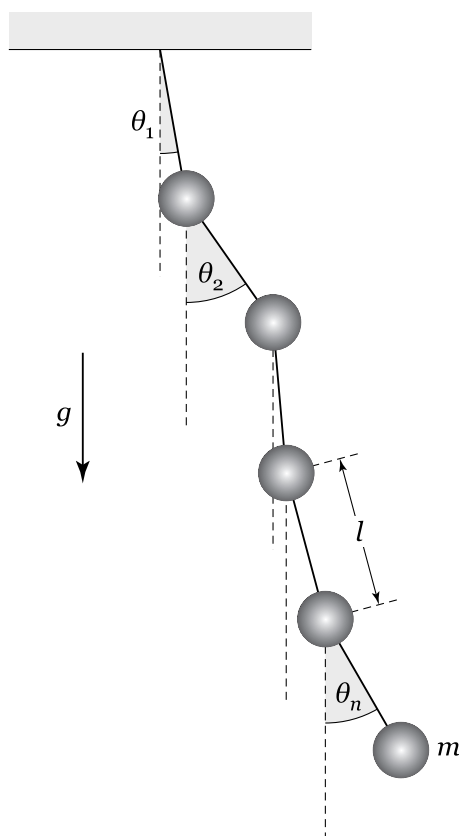
Η Λαγκρανζιανή που περιγράφει τη γενική κίνηση όλου του συστήματος είναι

$$L = \rho l \sum_{i=1}^n \left(\frac{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2}{2} - gy_i \right). \quad (8.112)$$

Για να μελετήσουμε τις μικρές κινήσεις που εκτελεί το σύνθετο εκκρεμές γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας $\theta_1 = \dots = \theta_n = 0$, γραμμικοποιούμε αρχικά τη Λαγκρανζιανή. Η γραμμικοποιημένη Λαγκρανζιανή που περιγράφει την κίνηση του εκκρεμούς μπορεί να λάβει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2} \left[\dot{\theta}_1^2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \dots + (\dot{\theta}_1 + \dots + \dot{\theta}_n)^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{g}{l} \left[\theta_1^2 + (\theta_1^2 + \theta_2^2) + \dots + (\theta_1^2 + \dots + \theta_n^2) \right], \quad (8.113)$$

Η Λαγκρανζιανή της αλυσίδας



Σχήμα 8.5: Η κατάσταση ενός σύνθετου εκκρεμούς προσδιορίζεται πλήρως από τις γωνίες θ_i που σχηματίζουν τα νήματα με την κατακόρυφο.

ή σε μορφή πινάκων

$$L = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \mathbf{M} \dot{\theta} - \frac{1}{2} \theta^T \mathbf{K} \theta, \quad (8.114)$$

όπου $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$. Αν αναπτύξουμε τα τετράγωνα των ταχυτήτων βρίσκουμε ότι ο συμμετρικός πίνακας \mathbf{M} έχει ως στοιχεία τα

$$M_{ij} = n + 1 - j \text{ για } i \leq j,$$

δηλαδή ο πίνακας έχει τη μορφή

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.115)$$

ενώ ο πίνακας \mathbf{K} είναι ο διαγώνιος πίνακας με i -οστό διαγώνιο στοιχείο το

$$K_{ii} = \frac{g}{l} (n + 1 - i),$$

δηλαδή έχει τη μορφή

$$\mathbf{K} = \frac{g}{l} \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.116)$$

Άσκηση 8.9. Επιβεβαιώστε ότι οι μικρές ταλαντώσεις διέπονται πράγματι από τη Λαγκρανζιανή (8.114). ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Αντιλαμβανόμαστε ότι ο υπολογισμός των χαρακτηριστικών συχνοτήτων και των χαρακτηριστικών τρόπων ταλάντωσης αυτού του συστήματος είναι δύσκολος. Μπορούμε, βεβαίως, να υπολογίσουμε άμεσα με τη βοήθεια ενός υπολογιστή τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης για κάθε n εφαρμόζοντας αριθμητικές μεθόδους.

Άσκηση 8.10. Υπολογίστε τις τρεις μικρότερες χαρακτηριστικές συχνότητες του σύνθετου εκκρεμούς για $n = 5, 10, 50$. Θεωρήστε στον υπολογισμό αυτό για όλες τις τιμές του n τη συνολική μάζα σταθερή, $M = nm$, και το συνολικό μήκος σταθερό και ίσο με τη μονάδα, δηλαδή $nl = 1$. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ωστόσο, εμείς θα προσφύγουμε σε προσεγγιστικό υπολογισμό της θεμελιώδους ταλάντωσης, δηλαδή της ταλάντωσης με τη μικρότερη χαρακτηριστική συχνότητα. Αναμένουμε, βασιζόμενοι στην εμπειρία μας, η μικρότερη χαρακτηριστική συχνότητα να προκύπτει, όταν η αλυσίδα ταλαντώνεται κινούμενη εξ ολοκλήρου τότε δεξιά και τότε αριστερά από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας της. Θα υποθέσουμε, ως πρώτη προσέγγιση, ότι το σχήμα του θεμελιώδους χαρακτηριστικού τρόπου ταλάντωσης είναι ευθύγραμμο και επομένως

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n, \quad \text{δηλαδή, } \theta_{\text{πρσ}} = (1, 1, \dots, 1)^T. \quad (8.117)$$

Αν η κίνηση ήταν τέτοια, η συχνότητα της ταλάντωσης, τουλάχιστον στο όριο $n \rightarrow \infty$, θα ήταν γνωστή. Πρόκειται για τη συχνότητα αιώρησης μιας ομογενούς ράβδου, αναρτημένης από το ένα άκρο της, μέσα σε ομογενές βαρυντικό πεδίο

$$\omega_{\text{πρσ}} = \sqrt{\frac{3g}{2L}}.$$

Επιλογή διανύσματος για προσεγγιστικό υπολογισμό της ιδιοσυχνότητας

Ας δούμε, όμως, τι συχνότητα μάς δίνει το πηλίκο Rayleigh. Αντικαθιστώντας το προσεγγιστικό θ της σχέσης (8.117) στο πηλίκο Rayleigh θα λάβουμε

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{g}{l} \frac{\theta^T \mathbf{K} \theta}{\theta^T \mathbf{M} \theta} \\ &= \frac{g}{l} \frac{1 + 2 + \dots + n}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} \\ &= \frac{3g}{2L} \frac{1}{[1 + 1/(2n)]}. \end{aligned} \quad (8.118)$$

Η προσεγγιστική μας, λοιπόν, εκτίμηση όσον αφορά στη χαρακτηριστική συχνότητα της θεμελιώδους ταλάντωσης για $n \gg 1$ είναι

$$\omega \approx \sqrt{\frac{3g}{2L}} \left(1 - \frac{1}{4n}\right). \quad (8.119)$$

Όταν το $n \rightarrow \infty$, η συχνότητα αυτή προσεγγίζει τη συχνότητα ταλάντωσης μιας ομογενούς ράβδου

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}} \approx 1.2247 \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (8.120)$$

Πόσο καλά τα πήγαμε με την προσέγγιση;

Με τι ακρίβεια, άραγε, έχουμε προβλέψει τη χαρακτηριστική συχνότητα της θεμελιώδους ταλάντωσης μιας αλυσίδας, θεωρώντας μια τόσο χοντρική εκτίμηση της κίνησης; Αν υπολογίσει κανείς με ακρίβεια τη θεμελιώδη χαρακτηριστική συχνότητα μιας κρεμασμένης ομογενούς αλυσίδας, θα διαπιστώσει ότι η θεμελιώδης χαρακτηριστική συχνότητα είναι

$$\omega_* = 0.7655 \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} = 1.2024 \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad (8.121)$$

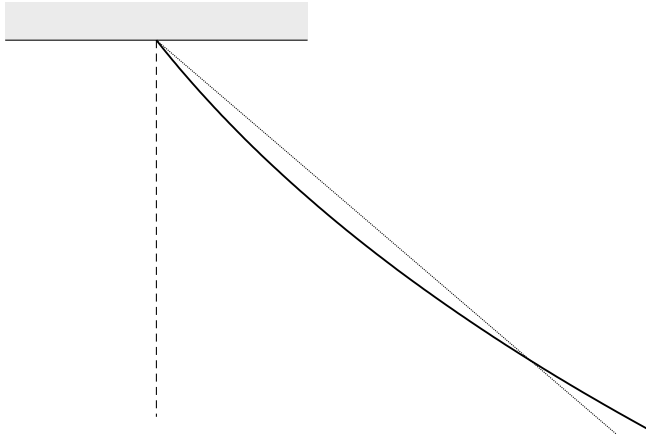
ενώ ο προσεγγιστικός υπολογισμός μέσω του πηλίκου Rayleigh έδωσε $\omega = 1.2247 \sqrt{g/L}$. Αυτό σημαίνει ότι καταφέραμε να προσεγγίσουμε τη χαρακτηριστική συχνότητα με σχετικό σφάλμα μόλις 1.85% και μάλιστα πολύ εύκολα! Η ακριβής μορφή του θεμελιώδους τρόπου ταλάντωσης είναι

$$x = J_0 \left(2\omega_* \sqrt{\frac{l-y}{g}} \right), \quad (8.122)$$

όπου x είναι η μετατόπιση από το σημείο ισορροπίας σε απόσταση y από το σημείο ανάρτησης. Η συνάρτηση $J_0(z)$ είναι η συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης και το ανάπτυγμα αυτής είναι

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2/4}{(1!)^2} + \frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} - \dots \quad (8.123)$$

Το γράφημα του ακριβούς τρόπου ταλάντωσης απεικονίζεται στο Σχήμα 8.6. Στο ίδιο σχήμα απεικονίζεται με εστιγμένη ευθεία γραμμή η προσέγγισή μας για το χαρακτηριστικό τρόπο ταλάντωσης της αλυσίδας.



Σχήμα 8.6: Ο ακριβής θεμελιώδης χαρακτηριστικός τρόπος ταλάντωσης μιας αλυσίδας (συνεχής γραμμή). Η ευθεία εστιγμένη γραμμή αναπαριστά τον υποτιθέμενο τρόπο ταλάντωσης στον οποίο βασίστηκε η προσέγγιση της θεμελιώδους χαρακτηριστικής συχνότητας μέσω του πηλίκου Rayleigh.

Μολονότι η προσέγγιση του χαρακτηριστικού τρόπου ταλάντωσης δεν είναι ιδιαίτερος ακριβής, η χαρακτηριστική συχνότητα που υπολογίζει κανείς από το πηλίκο Rayleigh παρουσιάζει εξαιρετική ακρίβεια, καταδεικνύοντας τη σημασία της προσεγγιστικής μεθόδου που ανακάλυψε ο Rayleigh. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι, αν προσεγγίσουμε τη συνεχή αλυσίδα με 10 μόνο εκκρεμή, ο θεμελιώδης χαρακτηριστικός τρόπος ταλάντωσης που προκύπτει με αριθμητικές μεθόδους από τον ακριβή υπολογισμό των χαρακτηριστικών τρόπων ταλάντωσης είναι πρακτικά απαράλλακτος με τον ακριβή θεμελιώδη χαρακτηριστικό τρόπο ταλάντωσης της συνεχούς αλυσίδας.

Αν θέλαμε να βελτιώσουμε την ακρίβεια της προσεγγιστικής λύσης, θα έπρεπε να επιλέξουμε ως θεμελιώδη χαρακτηριστικό τρόπο ταλάντωσης κάποιο σχήμα που να προσεγγίζει περισσότερο το σχήμα που αποκτά η αλυσίδα όταν ταλαντώνεται. Ο προσεγγιστικός τρόπος ταλάντωσης που ήδη θεωρήσαμε ήταν απόλυτα “άκαμπτος” και οδήγησε σε συγκεκριμένο πηλίκο (συχνότητα). Δεν εκμεταλλευτήκαμε πλήρως το γεγονός ότι οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος είναι τα ακρότατα του πηλίκου Rayleigh. Αν είχαμε θεωρήσει ως προσεγγιστικό τρόπο ταλάντωσης τον

Μπορούμε να κάνουμε κάτι ακόμη καλύτερο;

$$\theta'_{\text{προσ}} = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_k, \underbrace{(s, s, \dots, s)}_{n-k}^T, \quad (8.124)$$

δηλαδή σαν να είχαμε δύο ράβδους με άρθρωση στο k/n ποσοστό του συνολικού μήκους της αλυσίδας, υπολογίζαμε το όριο του πηλίκου για $n \rightarrow \infty$ και στη συνέχεια αναζητούσαμε το ελάχιστο του πηλίκου ως προς τις μεταβλητές k και s , θα λαμβάναμε μια συχνότητα με απόκλιση μόλις 0.56% από την πραγματική· σχεδόν τέσσερις φορές πιο ακριβής τιμή από αυτήν που υπολογίσαμε προηγουμένως εκλαμβάνοντας την αλυσίδα ως ενιαία ράβδο.

8.8 Συμπεριφορά των χαρακτηριστικών συχνοτήτων

Μεταβολή
ταλαντωτικής
συμπεριφοράς
εξαιτίας δεσμών

Σχεδόν πλήρης
δέσμευση του
συστήματος

Το πηλίκο του Rayleigh μπορεί, επίσης, να αποκαλύψει τη γενική συμπεριφορά των χαρακτηριστικών συχνοτήτων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον εμφανίζει η συμπεριφορά των χαρακτηριστικών συχνοτήτων όταν μεταβάλλονται οι παράμετροι ελαστικότητας ή η αδράνεια του συστήματος ή όταν με κάποιο τρόπο δεσμεύουμε ή ελευθερώνουμε κάποιους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος. Ένα παράδειγμα περιορισμού των βαθμών ελευθερίας του συστήματος είναι η δέσμευση των συντεταγμένων του συστήματος έτσι ώστε να μεταβάλλονται όλες μαζί, ενώ ο μεταξύ τους λόγος να διατηρείται σταθερός, να ισχύει δηλαδή για όλους τους χρόνους

$$\frac{q_1}{q_n} = \frac{\beta_1}{\beta_n}, \frac{q_2}{q_n} = \frac{\beta_2}{\beta_n}, \dots, \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{\beta_{n-1}}{\beta_n}. \quad (8.125)$$

Αυτοί οι $n - 1$ δεσμοί μετατρέπουν το σύστημα σε σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας, ενώ η κίνηση του δεσμευμένου συστήματος περιγράφεται από μία μεταβλητή ξ , η οποία σχετίζεται με τις αρχικές συντεταγμένες, μέσω των σχέσεων $q_i = \beta_i \xi$, οι οποίες γράφονται συνοπτικά ως $q = \beta \xi$, όπου $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$ η στήλη των σχετικών αρχικών θέσεων που επιβάλλει η δέσμευση. Θέτοντας $q = \beta \xi$ στις n εξισώσεις κίνησης

$$\mathbf{M}\ddot{q} + \mathbf{K}q = 0,$$

και πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με το διάνυσμα-γραμμή β^T συμπεραίνουμε ότι η δεσμευμένη κίνηση ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\beta^T \mathbf{M} \beta) \ddot{\xi} + (\beta^T \mathbf{K} \beta) \xi = 0, \quad (8.126)$$

η οποία έχει λύσεις της μορφής $e^{i\omega t}$ με

$$\omega^2 = \frac{\beta^T \mathbf{K} \beta}{\beta^T \mathbf{M} \beta} = \rho(\beta). \quad (8.127)$$

Παρατηρούμε ότι η συχνότητα ταλάντωσης του δεσμευμένου συστήματος δίνεται από το πηλίκο Rayleigh, $\rho(\beta)$, του διανύσματος β .

Αν, τώρα, επιβληθεί η δέσμευση $\beta = a^{(i)}$, όπου $a^{(i)}$ ο i -οστός χαρακτηριστικός τρόπος ταλάντωσης, η συχνότητα της ταλάντωσης ω^2 ισούται με την αντίστοιχη χαρακτηριστική συχνότητα Ω_i^2 , ενώ το πηλίκο Rayleigh για αυτή την τιμή του β καθίσταται ακρότατο. Τι τιμές, όμως, μπορεί να λαμβάνει η συχνότητα ω της δεσμευμένης κίνησης για τυχαίο β ;

Ας μετασχηματίσουμε το πηλίκο Rayleigh στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες Q . Θέτοντας $\beta = \mathbf{A}Q$ στην (8.127), λαμβάνουμε

$$\omega^2 = \frac{Q^T \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} Q}{Q^T \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} Q} \quad (8.128)$$

$$= \frac{\Omega_1^2 (Q_1^T Q_1) + \dots + \Omega_n^2 (Q_n^T Q_n)}{(Q_1^T Q_1) + \dots + (Q_n^T Q_n)}. \quad (8.129)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η συχνότητα ταλάντωσης του δεσμευμένου συστήματος ενός βαθμού ελευθερίας πρέπει, επειδή τα $Q_i^T Q_i$ είναι θετικοί αριθμοί, αναγκαστικά να ικανοποιεί την ανισότητα

$$\Omega_1^2 \leq \omega^2 \leq \Omega_n^2, \quad (8.130)$$

όπου με Ω_1^2 έχουμε συμβολίσει την ελάχιστη χαρακτηριστική συχνότητα και με Ω_n^2 τη μέγιστη.

Στη συνέχεια διατάσσουμε τις συχνότητες έτσι ώστε

$$\Omega_1 \leq \Omega_2 \leq \dots \leq \Omega_n.$$

Αποδείξαμε ήδη ότι

1. Το ελάχιστο του πηλίκου Rayleigh $\rho(x)$ ως προς όλα τα ανύσματα x είναι Ω_1^2 .
2. Το μέγιστο του πηλίκου Rayleigh $\rho(x)$ ως προς όλα τα ανύσματα x είναι Ω_n^2 .

Θα αποδείξουμε, τώρα, το γενικότερο θεώρημα:

3. Εάν περιορίσουμε το x με $n - k$ τυχαίους δεσμούς που έχουν τη μορφή $(r^{(i)})^T x = 0$ για $n - k$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $r^{(i)}$ και μεγιστοποιήσουμε το πηλίκο Rayleigh $\rho(x)$ ως προς τα x που ικανοποιούν αυτούς τους δεσμούς, τότε το ελάχιστο ως προς όλα τα δυνατά $r^{(i)}$ μεταξύ όλων αυτών των μεγίστων είναι το τετράγωνο της k χαρακτηριστικής συχνότητας Ω_k^2 .

Ελαχιστο-
μεγιστοποίηση
του πηλίκου Rayleigh

Επειδή η μεγιστοποίηση του πηλίκου Rayleigh διενεργείται ως προς όλα τα διανύσματα x που είναι κάθετα στα συγκεκριμένα διανύσματα $r^{(i)}$, το παραπάνω θεώρημα γράφεται συμβολικά ως

$$\Omega_k^2 = \min_{r^{(i)}} \left(\max_{x \perp r^{(i)}} \rho(x) \right), \text{ με } i = 1, \dots, n - k, \quad (8.131)$$

όπου το $\min_{r^{(i)}}$ συμβολίζει το ελάχιστο ως προς όλες τις επιλογές των $n - k$ διανυσμάτων $r^{(i)}$ και το $\max_{x \perp r^{(i)}}$ συμβολίζει το μέγιστο ως προς όλα τα x που είναι κάθετα σε καθένα από τα $r^{(i)}$.

Πλαίσιο 8.4. Για την απόδειξη αυτού του *min-max* χαρακτηρισμού των χαρακτηριστικών συχνοτήτων παρατηρούμε πρώτα ότι η διαδικασία μεγιστοποίησης μπορεί δίχως έλλειψη της γενικότητας να διενεργηθεί στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες, διότι, δεδομένων των διανυσμάτων $r^{(i)}$, η μεγιστοποίηση του πηλίκου Rayleigh στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες Q πρέπει να διενεργηθεί σε εκείνα τα Q που είναι κάθετα τώρα στα διανύσματα

$$R^{(i)} = \mathbf{A}^T r^{(i)}.$$

Θέτοντας $x = \mathbf{A}Q$ στην

$$\min_{r^{(i)}} \left(\max_{x \perp R^{(i)}} \frac{x^T \mathbf{K}x}{x^T \mathbf{M}x} \right), \quad (8.132)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

διαπιστώνουμε ότι η ελαχιστο-μεγιστοποίηση της παραπάνω έκφρασης ως προς όλα τα $x \perp r^{(i)}$ είναι ίση με την ελαχιστο-μεγιστοποίηση του

$$\min_{R^{(i)}} \left(\max_{Q \perp R^{(i)}} \frac{\Omega_1^2(Q_1^T Q_1) + \dots + \Omega_n^2(Q_n^T Q_n)}{(Q_1^T Q_1) + \dots + (Q_n^T Q_n)} \right), \quad (8.133)$$

ως προς όλα τα $Q \perp R^{(i)}$. Αν αποδείξουμε ότι για τα διανύσματα Q , που ικανοποιούν τις συνθήκες $Q \perp R^{(i)}$, το μέγιστο του πηλίκου Rayleigh είναι μεγαλύτερο ή ίσο του Ω_k^2 , τότε το μέγιστο ως προς όλα τα $Q \perp R^{(i)}$ θα είναι σίγουρα μεγαλύτερο ή ίσο του Ω_k^2 . Επιλέγουμε, λοιπόν, διανύσματα Q με συντεταγμένες

$$Q_1 = \dots = Q_{k-1} = 0. \quad (8.134)$$

Μια τέτοια επιλογή είναι συμβατή με τους δεσμούς, διότι οι δεσμοί

$$(R^{(1)})^T Q = 0, (R^{(2)})^T Q = 0, \dots, (R^{(n-k)})^T Q = 0,$$

αποτελούν $n - k$ ομογενείς γραμμικές εξισώσεις που συνδέουν τις n συντεταγμένες του Q . Επομένως, απομένουν k γραμμικώς ανεξάρτητες συντεταγμένες του Q ως προς τις οποίες μπορούν να εκφραστούν όλες οι υπολοίπες $n - k$. Έχουμε λοιπόν την ελευθερία να θέσουμε τις πρώτες $k - 1$ από αυτές τις συντεταγμένες ταυτοτικά μηδέν, οπότε καταλήγουμε σε μια μονοπαραμετρική (με παράμετρο την Q_k) κατασκευή διανυσμάτων Q , τα οποία είναι κάθετα σε όλα τα $R^{(i)}$. Όμως, για κάθε τέτοιο διάνυσμα Q το πηλίκου που εμφανίζεται στη σχέση (8.133) είναι σαφώς μεγαλύτερο από την Ω_k^2 (είναι ίσο αν $Q_{k+1} = \dots = Q_n = 0$). Αφού, λοιπόν, για τον επιλεγμένο τύπο διανυσμάτων Q ισχύει

$$\rho(Q) \geq \Omega_k^2,$$

το ίδιο θα ισχύει και για τη μέγιστη τιμή του πηλίκου ως προς κάθε δυνατό διάνυσμα Q συμβατό με τους δεσμούς. Συνεπώς, το ελάχιστο ως προς όλους τους $n - k$ δεσμούς θα είναι

$$\min_{r^{(i)}} \left(\max_{x \perp r^{(i)}} \rho(x) \right) = \Omega_k^2. \quad (8.135)$$

Ας δούμε και μια πιο γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω απόδειξης. Έστω ο n -διάστατος χώρος των λύσεων στον οποίο κείται το κάθε διάνυσμα Q . Κατ' αρχάς κατασκευάζουμε τον $(n - k)$ -διάστατο υπόχωρο των διανυσμάτων $R^{(i)}$, τα οποία σημειωτέον είναι τα ίδια με τα αρχικά $r^{(i)}$, απλώς έχουν διαφορετικές συντεταγμένες στη νέα βάση. Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε το πηλίκου Rayleigh για τα διανύσματα που είναι κάθετα στον υπόχωρο αυτό και να επιλέξουμε τη μέγιστη τιμή του πηλίκου. Ο υπόχωρος των κάθετων αυτών διανυσμάτων έχει διάσταση k . Αν τα διανύσματα αυτά παράγονται από κάποια k ιδιοανύσματα του συστήματος, τότε το πηλίκου Rayleigh λαμβάνει τη μεγαλύτερη τιμή όταν το Q γίνει παράλληλο με το ιδιοάνυσμα με τη μεγαλύτερη ιδιοσυχνότητα· εξάλλου, τα Q_i στο πηλίκου της (8.133) δεν είναι τίποτε άλλο από τις προβολές του Q στην κατεύθυνση του i -οστού ιδιοανύσματος. Αν ο υπόχωρος των κάθετων διανυσμάτων δεν μπορεί να περιγραφεί μόνο από k ιδιοανύσματα, τότε η μεγαλύτερη τιμή του πηλίκου είναι μικρότερη από τη μεγαλύτερη ιδιοσυχνότητα που αντιστοιχεί σε κάποιο από τα ιδιοανύσματα που απαιτούνται για την περιγραφή του υποχώρου. Η μεγιστοποίηση, λοιπόν, επιτυγχάνεται όταν το διάνυσμα Q κατευθύνεται προς το ιδιοάνυσμα με τη μέγιστη δυνατή ιδιοσυχνότητα. Στη συνέχεια, θα ελαχιστοποιήσουμε αυτή την τιμή του πηλίκου αλλάζοντας τον υπόχωρο των R και συνεπώς και τον υπόχωρο των κάθετων διανυσμάτων δίχως να πειράξουμε τη διάστασή του. Ποια θα είναι τότε η ελάχιστη τιμή του πηλίκου; Με άλλα λόγια, ποιος χώρος διάστασης k περιγράφεται από k ιδιοανύσματα με όσο το δυνατόν μικρότερες ιδιοσυχνότητες; Φυσικά είναι εκείνος ο χώρος που παράγεται από τα πρώτα k ιδιοανύσματα, οπότε το ζητούμενο είναι η μέγιστη εξ αυτών ιδιοσυχνότητα, δηλαδή η Ω_k^2 .

Ομοίως αποδεικνύεται και το εξής θεώρημα:

4. Εάν περιορίσουμε το x με $k - 1$ δεσμούς της μορφής $(r^{(i)})^T x = 0$ για $k - 1$ διανύσματα $r^{(i)}$ και ελαχιστοποιήσουμε το πηλίκο Rayleigh $\rho(x)$ ως προς τα x που ικανοποιούν αυτούς τους δεσμούς, τότε το μέγιστο, ως προς όλες τις τιμές των $r^{(i)}$, αυτών των ελαχίστων είναι το τετράγωνο της k χαρακτηριστικής συχνότητας Ω_k^2 . Δηλαδή

Μεγιστο-ελαχιστοποίηση του πηλίκου Rayleigh

$$\Omega_k^2 = \max_{r^{(i)}} \left(\min_{x \perp r^{(i)}} \rho(x) \right), \text{ με } i = 1, \dots, k - 1. \quad (8.136)$$

Άσκηση 8.11. Αποδείξτε τον max-min χαρακτηρισμό (8.136) των χαρακτηριστικών συχνοτήτων. [Υπόδειξη: Ουσιαστικά το θεώρημα 4 του max-min χαρακτηρισμού των συχνοτήτων είναι ακριβώς ανάλογο με το θεώρημα 3 του min-max χαρακτηρισμού που αναλύσαμε προηγουμένως. Στη γεωμετρική επιχειρηματολογία, μάλιστα, που παρουσιάστηκε κατά την απόδειξη του θεωρήματος 3 στο παραπάνω Πλαίσιο, αν εναλλαχθούν οι όροι “μεγαλύτερο”-“μικρότερο” και οι αριθμοί $k, (n - k)$, προκύπτει μια πλήρης απόδειξη της νέας πρότασης.]

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οι χαρακτηρισμοί min-max και max-min είναι πολύ χρήσιμοι, διότι αποκαλύπτουν τη συμπεριφορά των χαρακτηριστικών συχνοτήτων σε μεταβολές του αρχικού συστήματος. Ως πρώτο παράδειγμα λαμβάνουμε ένα σύστημα n βαθμών ελευθερίας με χαρακτηριστικές συχνότητες

$$\Omega_1 \leq \Omega_2 \leq \dots \leq \Omega_n,$$

στο οποίο επιβάλλουμε κάποιον περιορισμό της μορφής $r^T q = 0$, όπου r κάποιο δοσμένο διάνυσμα. Το αρχικό σύστημα μετατρέπεται σε σύστημα $n - 1$ βαθμών ελευθερίας με χαρακτηριστικές συχνότητες

$$\Omega'_1 \leq \Omega'_2 \leq \dots \leq \Omega'_{n-1}.$$

Τι σχέση έχουν οι αρχικές (άτονες) χαρακτηριστικές συχνότητες με τις τελικές (τονούμενες); Οι νέες χαρακτηριστικές συχνότητες, όπως θα δείξουμε, βρίσκονται στα διαστήματα μεταξύ των αρχικών

$$\Omega_1 \leq \Omega'_1 \leq \Omega_2 \leq \dots \leq \Omega_k \leq \Omega'_k \leq \Omega_{k+1} \leq \dots \leq \Omega_{n-1} \leq \Omega'_{n-1} \leq \Omega_n. \quad (8.137)$$

Τις χαρακτηριστικές συχνότητες του νέου συστήματος τις βρίσκουμε αν περιορίσουμε το πηλίκο Rayleigh, $\bar{\rho}$, του νέου συστήματος που προκύπτει από το πηλίκο Rayleigh, ρ , του αρχικού συστήματος επιβάλλοντας το συγκεκριμένο δεσμό $r^T q = 0$. Σύμφωνα με το χαρακτηρισμό min-max, η k -οστή χαρακτηριστική συχνότητα του αρχικού συστήματος Ω_k προκύπτει από ελαχιστοποίηση του $\max \rho$ ως προς όλους τους δυνατούς $n - k$ δεσμούς. Το ελάχιστο, όμως, αυτό θα είναι προφανώς μικρότερο από το

Η διαμόρφωση του φάσματος ενός συστήματος με την επιβολή δεσμών

ελάχιστο που θα προκύψει αν λάβουμε τον $r^T q = 0$ ως έναν από τους $n-k$ περιορισμούς –έτσι ώστε το πηλίκο Rayleigh, ρ , του αρχικού συστήματος να γίνει το πηλίκο Rayleigh, $\bar{\rho}$, του νέου συστήματος– και ελαχιστοποιήσουμε ως προς κάθε δυνατό από τους υπόλοιπους $n-1-k$ δεσμούς. Η δεύτερη ελαχιστοποίηση θα δώσει, βέβαια, το τετράγωνο της Ω'_k . Συνεπώς θα ισχύει

$$\Omega_k \leq \Omega'_k .$$

Η άλλη πλευρά της ανισότητας αποδεικνύεται κάνοντας χρήση του αντίστοιχου max-min χαρακτηρισμού. Πράγματι, περιορίζοντας το σύστημα n βαθμών ελευθερίας με $k-1$ δεσμούς, συμπεραίνουμε ότι $\max(\min \rho) = \Omega_k^2$. Το μέγιστο, όμως, $\min \rho$ ως προς όλους τους $k-1$ περιορισμούς θα είναι μεγαλύτερο από το μέγιστο των $\min \rho$, όταν μία από τις συνθήκες λάβει την ειδική μορφή $r^T q = 0$ (και το ρ γίνει $\bar{\rho}$) και η μεγιστοποίηση διενεργηθεί ως προς τους υπόλοιπους $k-2$ περιορισμούς. Από την άλλη πλευρά, η μεγιστοποίηση της $\bar{\rho}$ ως προς $k-2$ περιορισμούς δίνει το τετράγωνο της Ω'_{k-1} . Συνεπώς,

$$\Omega'_{k-1} \leq \Omega_k .$$

Η σχέση (8.137), λοιπόν, αποδείχθηκε.

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι, αν περιορίσουμε ένα σύστημα n βαθμών ελευθερίας με k δεσμούς έτσι ώστε να αποκτήσουμε ένα νέο σύστημα $n-k$ βαθμών ελευθερίας, το νέο σύστημα θα έχει $n-k$ χαρακτηριστικές συχνότητες $\Omega_1^*, \Omega_2^*, \dots, \Omega_{n-k}^*$, οι οποίες δεν θα είναι μεγαλύτερες από την Ω_n ούτε και μικρότερες από την Ω_1 του αρχικού συστήματος. Με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε και πάλι στην πρόταση που ήδη αποδείξαμε, ότι, αν ένα σύστημα n βαθμών ελευθερίας περιοριστεί σε σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας, η χαρακτηριστική συχνότητα Ω_1^* του μονοδιάστατου συστήματος θα ικανοποιεί την ανισότητα

$$\Omega_1 \leq \Omega_1^* \leq \Omega_n .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 8.12. Ένας σεισμός δημιουργεί ρωγμές σε ένα κτήριο. Πώς θα μεταβληθούν οι χαρακτηριστικές συχνότητες του κτηρίου; Ή ισοδυνάμως, αν μια καμπάνα ραγίσει, πώς θα μεταβληθεί η θεμελιώδης συχνότητα του ήχου της; (V. Arnold.)

Και αν παραλλάξουμε τις σταθερές του φυσικού προβλήματος;

Κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό, θα διερευνήσουμε πώς μεταβάλλονται οι χαρακτηριστικές συχνότητες, όταν αυξήσουμε τη σκληρότητα του συστήματος. Ένα σύστημα που χαρακτηρίζεται από το πηλίκο Rayleigh $\rho_1(q)$ θα καλείται πιο σκληρό από ένα άλλο σύστημα με πηλίκο Rayleigh $\rho_2(q)$, αν $\rho_1(q) \geq \rho_2(q)$ για όλα τα q . Εάν στην περίπτωση ενός συστήματος μαζών συνδεδεμένων μεταξύ τους με ελατήρια μεγαλώσουμε όλες τις σταθερές των ελατηρίων, είτε παρομοίως μειώσουμε όλες τις μάζες του συστήματος, το νέο σύστημα που θα δημιουργηθεί θα είναι σκληρότερο από το αρχικό. Επίσης, αν διαταράξουμε τον πίνακα δυναμικής ενέργειας,

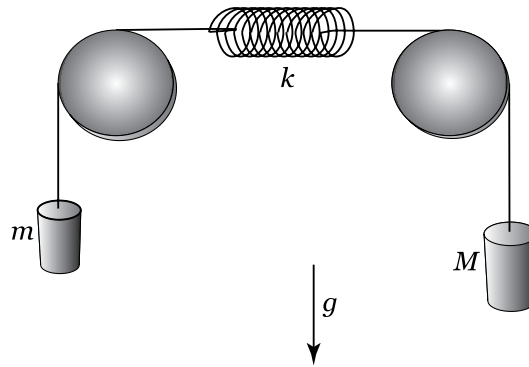
\mathbf{K} , έτσι ώστε το νέο σύστημα να έχει ως πίνακα δυναμικής ενέργειας τον $\mathbf{K} + \mathbf{K}'$, όπου \mathbf{K}' κάποιος θετικός πίνακας, το νέο σύστημα θα είναι σκληρότερο από το αρχικό. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει αμέσως από το χαρακτηρισμό min-max ή max-min των χαρακτηριστικών συχνότητων ότι, μία προς μία οι χαρακτηριστικές συχνότητες του σκληρότερου συστήματος θα πρέπει να είναι μεγαλύτερες ή ίσες με τις αντίστοιχες συχνότητες του αρχικού συστήματος.

8.9 Προβλήματα

1. Το νήμα ενός εκκρεμούς που εκτελεί επίπεδη κίνηση μέσα στο σταθερό πεδίο βαρύτητας της Γης είναι δεμένο στο υψηλότερο σημείο μιας σταθερής (μη περιστρεφόμενης) τροχαλίας ακτίνας R . Το μήκος του νήματος του εκκρεμούς είναι $l > \pi R/2$ με αποτέλεσμα ένα μέρος του να κρέμεται από την τροχαλία. Στο άκρο του αβαρούς νήματος είναι προσαρτημένη μια σημειακή μάζα m . Να γραφεί η λαγκρανζιανή συνάρτηση που διέπει τη κίνηση της μάζας και να υπολογιστεί η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων που εκτελεί η μάζα γύρω από το σημείο ισορροπίας της.
2. *Ισοροπώντας ένα μολύβι.* Τοποθετήστε όρθιο ένα μολύβι επάνω σε ένα τραπέζι με τη μύτη του στραμμένη προς τα κάτω και αφήστε το ελεύθερο. Το μολύβι πέφτει. Θεωρήστε το μολύβι ως μια αβαρή ράβδο μήκους l στο επάνω άκρο της οποίας βρίσκεται μία σημειακή μάζα m . (α) Υποθέστε ότι το μολύβι σχηματίζει αρχικά μια μικρή γωνία θ_0 με την κατακόρυφο και ότι η αρχική γωνιακή του ταχύτητα είναι ω_0 . Με την πάροδο του χρόνου η γωνία θα μεγαλώσει. Υπολογίστε την $\theta(t)$ ενόσω ισχύει η γραμμική πρόσεγγιση ($\sin \theta \approx \theta$). (β) Θα μπορούσατε να υποθέσετε ότι είναι τουλάχιστον θεωρητικά δυνατόν να ισορροπήσει το μολύβι παραμένοντας στην κατακόρυφη θέση για όσο χρόνο θέλετε επιλέγοντας αρκούντως μικρά θ_0 και ω_0 . Αυτό, όμως, δεν είναι ορθό. Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg (που θέτει έναν περιορισμό στο πόσο καλά μπορούμε να γνωρίζουμε τη θέση και την ορμή του μολυβιού) δεν επιτρέπει στο μολύβι να μείνει για απεριόριστο χρόνο στην κατακόρυφη θέση, διότι είναι αδύνατον να πετύχουμε συγχρόνως να τοποθετήσουμε το μολύβι κατακόρυφα και να το αφήσουμε ακίνητο. Στόχος του προβλήματος είναι ο υπολογισμός αυτού του χρόνου. Το αποτέλεσμα θα σας καταπλήξει. Χωρίς να εισέλθουμε σε λεπτομέρειες ας αναφέρουμε απλά ότι στην κβαντικομηχανική θεώρηση το γινόμενο των αβεβαιοτήτων θέσης και ορμής είναι $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ (όπου $\hbar = 1.06 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$). Παρότι είναι λίγο ασαφές πώς μεταφράζεται αυτός ο περιορισμός στο πρόβλημα μας, εμείς θα υποθέσουμε ότι η παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι οι αρχικές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν την ανισότητα $(l\theta_0)(m l \omega_0) \geq \hbar$. Με αυτή τη συνθήκη προσδιορίστε το μέγιστο χρόνο που απαιτείται για να γίνει η γωνία θ 0.1 rad. Με άλλα λόγια προσδιορίστε για πόσο χρόνο μπορεί να μείνει ένα μολύβι σε κατακόρυφη ισορροπία ακόμη και αν τοποθετηθεί στη θέση αυτή με τα τελειότερα μηχανήματα που θα κατασκευαστούν ποτέ. (Θεωρήστε ότι $m = 0.01 \text{ kg}$ και $l = 0.1 \text{ m}$.)
3. Τρεις ίδιες μάζες κινούνται ελεύθερα επάνω σε μια κυκλική στεφάνη ακτίνας R , σε συνθήκες απουσίας βαρύτητας. Μεταξύ κάθε ζεύγους μαζών υπάρχει ένα πανομοιότυπο ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους $2\pi R/3$ που συνδέει τις μάζες. Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος. Ποιο είναι το φυσικό νόημα μηδενι-

σμού της μιας ιδιοσυχνότητας; Περιγράψτε τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος.

4. Βρείτε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος που απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



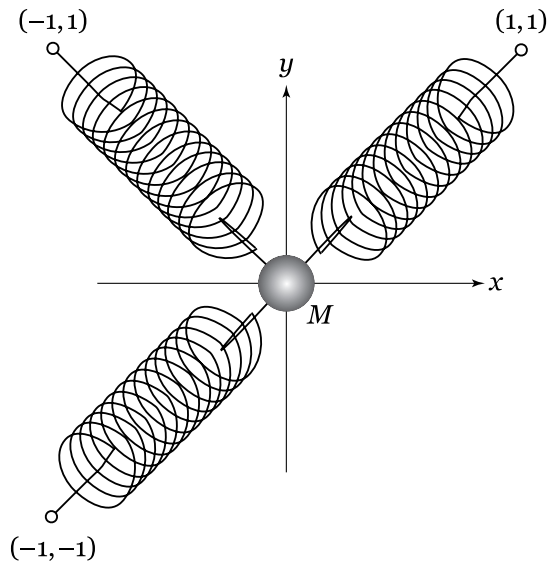
5. Θεωρήστε ένα επίπεδο διπλό εκκρεμές που αποτελείται από δύο αβαρείς ράβδους μήκους l . Οι ράβδοι κρέμονται η μία κάτω από την άλλη, και στα άκρα τους είναι αναρτημένες μάζες m , M , αντίστοιχα. Η κίνηση του συστήματος χαρακτηρίζεται από τη γωνία ϕ που σχηματίζει η πρώτη ράβδος με την κατακόρυφο και τη γωνία θ που σχηματίζει η δεύτερη ράβδος με την κατακόρυφο. Το σύστημα έχει τέσσερα σημεία ισορροπίας· εντοπίστε τα. Προσδιορίστε επίσης τις χαρακτηριστικές ταλαντώσεις και την ευστάθεια της θέσης ισορροπίας $\phi=0$, $\theta=\pi$. Σχεδιάστε, τέλος, τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης και εξηγήστε τη συμπεριφορά τους.
6. (α) Γράψτε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση για ένα σύστημα δύο ανεξάρτητων μονοδιάστατων αρμονικών ταλαντωτών με αντίστοιχες μάζες m_1 , m_2 , και σταθερές σκληρότητας ελατηρίων k_1 , k_2 . Ποια είναι η συχνότητα ταλάντωσης του κάθε ταλαντωτή; (β) Κατασκευάστε έναν απλό 2×2 πίνακα \mathbf{A} , ο οποίος να μην είναι διαγώνιος και να μην έχει μηδενική ορίζουσα. Θεωρήστε το σημειακό μετασχηματισμό από τις αρχικές συντεταγμένες των δύο ταλαντωτών x_1 , x_2 στις νέες συντεταγμένες q_1 , q_2 που υπαγορεύεται από τη σχέση

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Κατασκευάστε την καινούργια Λαγκρανζιανή του συστήματος βάσει των νέων συντεταγμένων. (γ) Υπολογίστε στη συνέχεια από τη νέα Λαγκρανζιανή τις ιδιοσυχνότητες και τα ιδιοανύσματα του συστήματος. Πώς σχετίζονται οι νέες ιδιοσυχνότητες με τις συχνότητες του ερωτήματος α; (δ) Αν το σύστημα είναι τέτοιο ώστε οι άμεσα παρατηρήσιμες ποσότητες να είναι οι q_1 , q_2 , πιστεύετε ότι αυτές θα εκτελούν αρμονική ταλάντωση; Στηριζόμενοι στην παραπάνω ανάλυση, μπορείτε να εξηγήσετε ποιο είναι το νόημα της ανάλυσης ενός

σύνθετου συστήματος που εκτελεί ταλαντώσεις σε χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης;

7. Σωματίδιο μάζας M κινείται στο επίπεδο $x - y$. Το σωματίδιο είναι συνδεδεμένο στο άκρο τριών ελατηρίων, το καθένα από τα οποία έχει σταθερά k . Τα τρία ελατήρια έχουν στερεωμένο το άλλο άκρο τους στα σημεία $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ και έχουν όλα φυσικό μήκος $\sqrt{2}$. (α) Να γραφεί η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου για μικρές κινήσεις



γύρω από την αρχή των αξόνων, το σημείο δηλαδή ισορροπίας του.

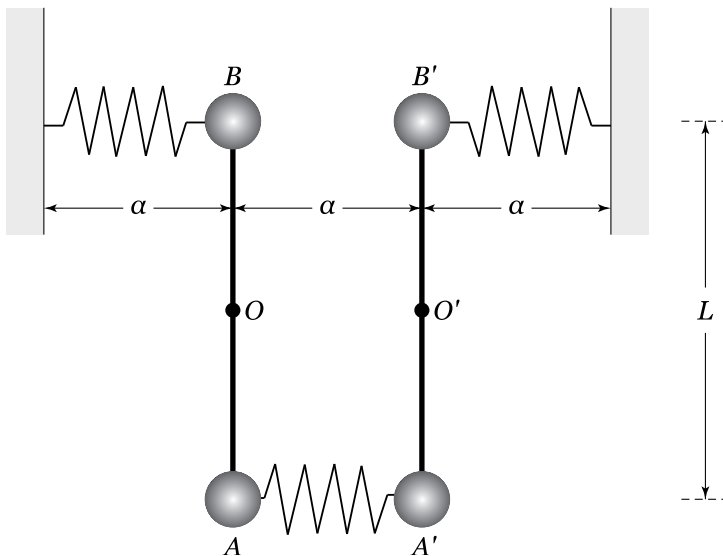
- (β) Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του σωματιδίου, τα ιδιοανύσματα των χαρακτηριστικών τρόπων ταλάντωσης αυτού καθώς και το είδος ευστάθειας του σημείου ισορροπίας. (γ) Πώς θα κινηθεί το σωματίδιο αν αρχικά βρισκόταν ακίνητο στη θέση $(\epsilon, -\epsilon)$, όπου ϵ κάποιος πολύ μικρός θετικός αριθμός; Αναμένεται μία τέτοια εξέλιξη βάσει της γεωμετρικής συμμετρίας του προβλήματος;
8. Σε κάποιο φυσικό πρόβλημα η κινητική ενέργεια γύρω από το σημείο ισορροπίας είναι $T = 2\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} + 5\dot{y}^2$, ενώ η δυναμική ενέργεια είναι $V = x^2 + 4y^2$. Η εξίσωση κίνησης υπό μορφή πινάκων έχει τη μορφή $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = 0$, όπου $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. (α) Προσδιορίστε επίσης τον πίνακα της κινητικής ενέργειας \mathbf{M} και της δυναμικής ενέργειας \mathbf{K} . (β) Προσδιορίστε τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος και τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης του. (γ) Ορίστε τις κανονικές συντεταγμένες. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης, λαμβάνοντας ως συντεταγμένες τις χαρακτηριστικές συντεταγμένες. (δ) Γράψτε υπό μορφή πινάκων το μετασχηματισμό στις χαρακτηριστικές συντεταγμένες. Υπολογίστε, τέλος, χρησιμοποιώντας πίνακες, τη μορφή της Λαγκρανζιανής ως προς τις χαρακτηριστικές συντεταγμένες.
9. Δίνεται ο πίνακας των μαζών \mathbf{M} και της δυναμικής ενέργειας \mathbf{K} ενός συστήματος n βαθμών ελευθερίας κοντά στο σημείο ισορροπίας του.

Η γενική μετατόπιση του συστήματος θα είναι τότε

$$x(t) = \sum_{k=1}^n (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t) x_k,$$

όπου ω_k η χαρακτηριστική συχνότητα του τρόπου ταλάντωσης που προσδιορίζεται από το διάνυσμα x_k . Τα x_k έχουν ορθοκανονικοποιηθεί με μετρική τον πίνακα των μαζών. Υποθέστε ότι γνωρίζετε τις n αρχικές θέσεις του συστήματος $x(0)$ και τις n αρχικές ταχύτητες του συστήματος $\dot{x}(0)$ και προσδιορίστε τους $2n$ συντελεστές A_k και B_k .

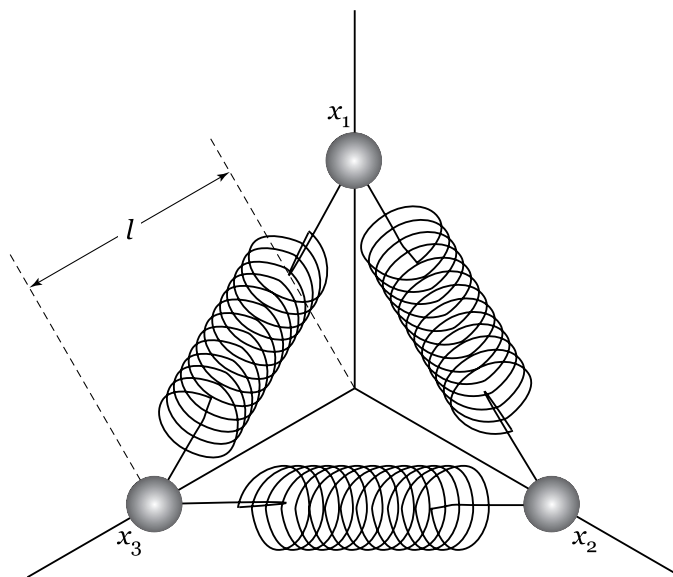
10. Δύο όμοιες αβαρείς ράβδοι μήκους L μπορούν να περιστρέφονται ελεύθερα γύρω από το κέντρο τους O, O' . Οι ράβδοι φέρουν στα τέσσερα άκρα τους A, A', B, B' τέσσερις σημειακές μάζες m . Οι μάζες συνδέονται με ελατήρια σταθεράς k και φυσικού μήκους ίσου με την απόσταση a μεταξύ των αξόνων των δύο ράβδων όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Το κάτω ελατήριο συνδέει τις δύο κάτω μάζες, ενώ τα δύο άνω ελατήρια συνδέουν τις άνω μάζες με σταθερά τοιχώματα. Όταν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ι-



σορροπίας, οι ράβδοι είναι παράλληλες. Οι ράβδοι μπορούν να κινούνται σε ένα επίπεδο και βρίσκονται εκτός του βαρυτικού πεδίου της Γης. (α) Να βρείτε τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιοσυναρτήσεις των χαρακτηριστικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος. (β) Να περιγράψετε την εξέλιξη του συστήματος, αν αρχικά η αριστερή ράβδος είναι ακίνητη και η δεξιά περιστρέφεται σύμφωνα με τη φορά των βελών με γωνιακή ταχύτητα $\omega \ll \sqrt{k/m}$.

11. Τρία σώματα ίσης μάζας, m , που σημειώνονται με τους δείκτες $i = 1, 2, 3$ αναγκάζονται να κινούνται επάνω σε τρία σύρματα, οι άξονες των οποίων βρίσκονται στο επίπεδο και σχηματίζουν ανά δύο γωνία 120° (βλ. Σχήμα). Τα σώματα είναι συνδεδεμένα ανά δύο

με γραμμικά ελατήρια σταθεράς k και φυσικού μήκους $\sqrt{3}l$. Αρχικά τα σώματα βρίσκονται σε ισορροπία σε απόσταση l από την αρχή των αξόνων. Κατόπιν η ισορροπία διαταράσσεται και τα σώματα αρχίζουν να εκτελούν μικρές ταλαντώσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας τους. Θεωρήστε ως συντεταγμένες που προσδιορίζουν τη θέση των σωμάτων την απόσταση εκάστου σώματος από το σημείο ισορροπίας του. (α) Προσδιορίστε τη λαγκρανζιανή συνάρ-

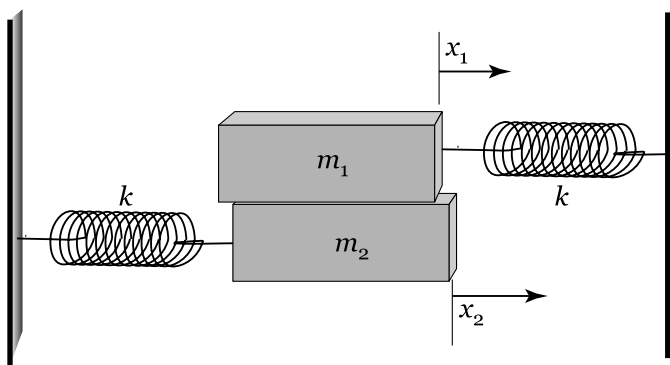


τηση $L(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, x_3, \dot{x}_3)$ που διέπει τις μικρές κινήσεις των σωμάτων γύρω από το σημείο ισορροπίας τους και δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης και για τα τρία σώματα είναι της μορφής

$$m\ddot{x}_i = -Ax_i - B(x_1 + x_2 + x_3).$$

Προσδιορίστε τα A και B . (β) Αποδείξτε ότι μία από τις χαρακτηριστικές ταλαντώσεις είναι απόλυτα συμμετρική $x_1(t) = x_2(t) = x_3(t)$ και υπολογίστε την ιδιοσυχνότητά της. (γ) Αποδείξτε ότι οι άλλες δύο κανονικές ταλαντώσεις έχουν κοινή ιδιοσυχνότητα (είναι εκφυλισμένες) και υπολογίστε τη συχνότητα αυτή. Γράψτε ένα ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων για τις δύο εκφυλισμένες ταλαντώσεις που τις καθιστά ορθογώνιες ανά πάσα στιγμή. [Υπόδειξη: Τα ερωτήματα (β) και (γ) μπορούν να απαντηθούν χωρίς να χρειάζεται να εφαρμοστούν οι γενικές αναλυτικές μέθοδοι για την εύρεση των χαρακτηριστικών τρόπων ταλάντωσης.]

12. Θεωρήστε δύο ίσες μάζες που βρίσκονται σε επαφή και συνδέονται μέσω δύο ίδιων ελατηρίων με δύο σταθερά τοιχώματα σε συνθήκες έλλειψης βαρύτητας. Οι δύο μάζες εκτελούν οριζόντια κίνηση (βλ. σχήμα) και επειδή βρίσκονται σε επαφή ασκείται μεταξύ τους μια δύναμη τριβής ανάλογη με τη διαφορά ταχύτητας των μαζών. Δηλαδή η δύναμη που ασκείται στη πρώτη είναι $F_1 = -\gamma(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$, ενώ η δύναμη που ασκείται στη δεύτερη είναι $F_2 = -F_1$, όπου x_1 η απομάκρυνση της πρώτης από το σημείο ισορροπίας και x_2 αντίστοιχα



η απομάκρυνση της δεύτερης. (α) Γράψτε τις δυναμικές εξισώσεις του Νεύτωνα που περιγράφουν την κίνηση των μαζών. (β) Δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

όπου a, b, ω μιγαδικές, εν γένει, σταθερές, βρείτε τις συχνότητες των κανονικών ταλαντώσεων του συστήματος. Παρατηρήστε ότι η μία συχνότητα είναι πραγματική και η άλλη μιγαδική. Ποια είναι η φυσική σημασία της μιγαδικής συχνότητας; (δ) Περιγράψτε το είδος κίνησης στο οποίο αντιστοιχούν οι δύο κανονικοί τρόποι ταλάντωσης.

13. Έστω δύο ίσες μάζες m με πίνακα κινητικής ενέργειας \mathbf{M} και δυναμικής ενέργειας \mathbf{K} , όπου

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} mg/l + k & -k \\ -k & mg/l + k \end{pmatrix}.$$

Η πρώτη μάζα είναι φορτισμένη, οπότε ένα προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό κύμα ασκεί στις μάζες τη δύναμη

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos \omega t.$$

Θεωρούμε επίσης ότι ασκείται στις μάζες και μια δύναμη τριβής οπότε η εξίσωση κίνησης είναι

$$\mathbf{M}\ddot{X} + \mathbf{M}\Gamma\dot{X} + \mathbf{K}X = F(t),$$

όπου $X = (x_1, x_2)^T$ οι θέσεις των σωματιδίων και Γ ο πίνακας των συντελεστών της τριβής

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Προσδιορίστε το μέσο ρυθμό απορρόφησης ενέργειας από το σύστημα

$$P = \overline{F^T \frac{dX}{dt}},$$

και σχεδιάστε αυτόν συναρτήσει της ω για $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$, $k/m = 3\gamma^2$ και $g/l = 4\gamma^2$. Θεωρήστε τιμές της συχνότητας της εξωτερικής διέγερσης στο διάστημα μεταξύ $\omega = 0$ και $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$.

14. Τρεις μοναδιαίες μάζες συνδέονται με τέσσερα ελατήρια σταθεράς $k = 1$ όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

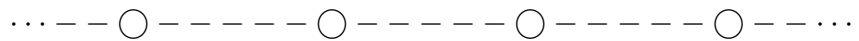


Τα ακραία ελατήρια συνδέονται σε σταθερά τοιχώματα. Προσδιορίστε πειραματικά τις τρεις κανονικές συχνότητες των διαμήκων ταλαντώσεων του συστήματος σχηματίζοντας το πηλίκο Rayleigh

$$R(x) = \frac{x^T \mathbf{K}x}{x^T \mathbf{M}x}$$

και υπολογίζοντάς το για πολλά τυχαία διανύσματα x . Σκεφτείτε πώς θα επιλέξετε τα τυχαία αυτά διανύσματα. Ζωγραφίστε τις τιμές που λαμβάνει το πηλίκο και από τα σημεία συμπύκνωσης που προκύπτουν προσδιορίστε τις χαρακτηριστικές συχνότητες ταλάντωσης. Συγκρίνετε την αριθμητική εκτίμησή σας με την ακριβή τιμή των συχνότητων.

15. Θεωρήστε την άπειρη αλυσίδα



ίσων μαζών m και ίδιων ελατηρίων k . Αριθμούμε τις μάζες από αριστερά προς τα δεξιά με τους ακεραίους n με $-\infty < n < \infty$, έτσι ώστε η n -οστή μάζα να βρίσκεται στη θέση ισορροπίας na , όπου a η απόσταση μεταξύ των μαζών στην κατάσταση ισορροπίας. Δείξτε ότι, αν η μετατόπιση της n -οστής μάζας είναι

$$q_n = \exp[i(\omega t + pna)],$$

τότε οι εξισώσεις κίνησης ικανοποιούνται αν η συχνότητα επιλεγεί να έχει την τιμή

$$\omega(p) = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{pa}{2}\right).$$

Οι συχνότητες αυτές είναι οι χαρακτηριστικές συχνότητες της άπειρης αυτής αλυσίδας. Ποια είναι η φυσική σημασία των αντίστοιχων χαρακτηριστικών τρόπων ταλάντωσης; Προσδιορίστε τη συμπεριφορά των λύσεων στο όριο $pa \rightarrow 0$. Γιατί σε αυτή την περίπτωση καταλήγουμε στην εξίσωση διασποράς ενός ελαστικού καλωδίου;

16. Θεωρήστε μία άπειρη αλυσίδα, όπως στο προηγούμενο πρόβλημα, της οποίας όμως οι μισές μάζες, αριστερά από κάποιο σημείο της αλυσίδας, (περιοχή I) είναι m , ενώ οι άλλες μισές, (περιοχή II), είναι M . Όλα τα ελατήρια έχουν σταθερά k . Η απόσταση μεταξύ

των μαζών στην κατάσταση ισορροπίας είναι a . Μελετήστε την ανάκλαση και διάδοση ενός κύματος συχνότητας ω που προσπίπτει από αριστερά. Θεωρήστε δηλαδή ότι στη περιοχή I η μετατόπιση είναι

$$q_n = \exp[i(\omega t - p_1 n a)] + R \exp[i(\omega t + p_1 n a)] ,$$

ενώ στη περιοχή II είναι

$$q_n = T \exp[i(\omega t - p_2 n a)] .$$

Τι σχέσεις πρέπει να ικανοποιούν τα ω , p_1 και p_2 ; Προσδιορίστε το συντελεστή ανάκλασης R και το συντελεστή διέλευσης T . Πόσος είναι ο συντελεστής ανάκλασης στο συνεχές όριο;

17. Το μόριο του CO_2 μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από τρεις σημειακές μάζες σε ευθεία διάταξη $\text{O} - \text{C} - \text{O}$ συνδεδεμένες με ελατήρια. Το σύστημα αυτό έχει 4 κανονικούς τρόπους ταλάντωσης, δύο διαμήκεις και δύο εγκάρσιους. Θεωρούμε ότι οι ελαστικές σταθερές των αλληλεπιδράσεων έχουν τρεις τιμές: k_1 η ελαστική σταθερά μεταξύ των ατόμων του O και του C, k_2 η ελαστική σταθερά για την αλληλεπίδραση των δύο O όταν αυτά απομακρύνονται κατά μήκος του άξονα του μορίου και k_3 όταν αυτά απομακρύνονται κάθετα στον άξονα του μορίου. Από τα φάσματα απορρόφησης του μορίου εντοπίστηκαν οι εξής τέσσερις συχνότητες συντονισμού του μορίου: $\Omega_1 = 667 \text{ cm}^{-1}$, $\Omega_2 = 667 \text{ cm}^{-1}$, $\Omega_3 = 1337 \text{ cm}^{-1}$, $\Omega_4 = 2349 \text{ cm}^{-1}$ (οι συχνότητες στη φασματοσκοπία δίνονται σε μονάδες αντίστροφου μήκους κύματος του φωτός). Υποθέστε ότι η συνολική ορμή και στροφορμή του μορίου είναι μηδενική και υπολογίστε τις σταθερές k_1, k_2, k_3 .