ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση Μηχανικής ΙΙ

20 Ιουνίου 2023

Απαντήστε στα ακόλουθα 4 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα.
Καλή σας επιτυχία. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

Πρόβλημα Α [25 μονάδες]

Ένα φυσικό σύστημα περιγράφεται μέσω της Λαγκρανζιανής $L = \sin(\dot{x})$.

1. Αφού βρεθεί η φυσική κίνηση του συστήματος που συνδέει τα χωρο-χρονικά σημεία Α,Β με $x_A = 0, t_A = 0, x_B = 1, t_B = 1$, να υπολογιστεί η δράση που αντιστοιχεί στη φυσική του κίνηση για το διάστημα $t \in \{t_A, t_B\}$.
2. Υπολογίστε τώρα τη δράση $\tilde{S}$ που θα αντιστοιχούσε στη μη φυσική διαδρομή $\tilde{AB}$ που περιγράφεται από την κίνηση
$$x(t) = \begin{cases} (1+\epsilon)t, & \text{για } t \in [0, 1/2) \\ (1-\epsilon)(t-1/2) + \frac{1}{2}(1+\epsilon), & \text{για } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$
και συνδέει τα ίδια χωρο-χρονικά σημεία ΑΒ. Η παράμετρος ϵ είναι μια μη μηδενική σταθερά που χαρακτηρίζει την απόκλιση της $\tilde{AB}$ από τη φυσική διαδρομή.
3. Διερευνήστε κατά πόσον η δράση που υπολογίσατε είναι συμβατή με την αρχή στάσιμης δράσης. Θα ήταν ορθό να την αποκαλούσαμε στην περίπτωση αυτή αρχή *ελάχιστης* δράσης;

[Υποδ. Δίδεται η τριγωνομετρική ταυτότητα: $\sin(a+b) = \sin a \ \cos b + \sin b \ \cos a$.]

Πρόβλημα Β [25 μονάδες]

Ένα σωματίδιο μάζας m μπορεί να κινείται χωρίς την παρουσία τριβών σε μια κατακόρυφη παραβολοειδή επιφάνεια που περιγράφεται από τη σχέση $z = \frac{1}{R}\rho^2$, όπου R μια θετική σταθερά με διαστάσεις μήκους. [Το σωματίδιο κινείται εντός του ομογενούς κατακόρυφου βαρυτικού πεδίου έντασης g και z, ρ είναι οι συνήθεις κυλινδρικές συντεταγμένες.]

1. Γράψτε σε κυλινδρικές συντεταγμένες τη Λαγκρανζιανή του σωματιδίου θεωρώντας ότι η κίνηση πραγματοποιείται πάνω στη δισδιάστατη επιφάνεια του παραβολοειδούς (ΕΓΡΑΦΕ ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΑ κυλίνδρου, ΑΛΛΑ ΔΙΟΡΘΩΘΗΚΕ ΠΡΟΦΟΡΙΚΑ ΣΤΟ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟ), χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστή Lagrange για την περιγραφή του δεσμού. Στη συνέχεια γράψτε τις διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange.
2. Αν αρχικά το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $z(0) = R, \phi(0) = 0, \rho(0) = R$ και έχει ταχύτητα $\dot{z}(0) = 0, \dot{\phi}(0) = \Omega, \dot{\rho}(0) = 0$, να βρείτε την τιμή της Ω προκειμένου το σώμα να εκτελεί οριζόντια κυκλική τροχιά της μορφής $\rho(t) = \rho(0) = R, z(t) = z(0) = R$.
3. Αν αρχικά το σωματίδιο βρίσκεται **ακίνητο** στη θέση $z(0) = R, \phi(0) = 0, \rho(0) = R$, να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος Jacobi. Στη συνέχεια υπολογίστε τη δύναμη που θα ασκείται από την παραβολοειδή επιφάνεια στο σωματίδιο όταν αυτό θα διέλθει από το κατώτερο σημείο του παραβολοειδούς, που αντιστοιχεί σε $\rho = z = 0$. Εξηγήστε σύντομα γιατί, στην περίπτωση αυτή, το σωματίδιο θα διέλθει οπωσδήποτε από το κατώτερο αυτό σημείο. [Δίδεται η έκφραση του ανάδελτα βαθμωτού μεγέθους σε κυλινδρικές συντεταγμένες
$$\boldsymbol{\nabla}\Lambda(\rho, \phi, z) = \hat{\boldsymbol{\rho}}(\partial\Lambda/\partial\rho) + \hat{\boldsymbol{\phi}}(1/\rho)(\partial\Lambda/\partial\phi) + \hat{\mathbf{z}}(\partial\Lambda/\partial z).$$

Πρόβλημα Γ [25 μονάδες]

Ένα φυσικό σύστημα περιγράφεται από τη Λαγκρανζιανή:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + 4\dot{x}_2^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2 x_1 x_2) - \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1^2 x_2^2\right)$$

1. Να βρεθούν τα/το σημεία/ο ισσοροπίας του συστήματος και στη συνέχεια να γραμμικοποιήσετε τη Λαγκρανζιανή πέριξ αυτών/ού.
2. Να κατασκευαστούν οι πίνακες κινητικής/δυναμικής ενέργειας και να υπολογιστούν οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης καθώς και οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες πέριξ του σημείου ισορροπίας $x_{1e} = x_{2e} = 0$.
3. Να υπολογιστεί η εξέλιξη του συστήματος αν αρχικά είναι $x_1(0) = x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = \epsilon, \dot{x}_2(0) = 0$. Υπάρχει κάποια προϋπόθεση αναφορικά με την τιμή της σταθεράς ϵ, ώστε η λύση που βρήκατε να περιγράφει ικανοποιητικά την ξέλιξη του συστήματος;

Πρόβλημα Δ [25 μονάδες]

Η Λαγκρανζιανή ενός φυσικού συστήματος έχει τη μορφή

$$L = \dot{x}_1\dot{x}_2 - x_1 x_2$$

1. Να κατασκευαστεί η Χαμιλτονιανή H του συστήματος, καθώς και οι εξισώσεις κίνησης αυτού. Τι φυσικό σύστημα περιγράφει αυτή η Χαμιλτονιανή;
2. Να υπολογιστούν οι αγκύλες Poisson $\{\dot{x}_1, x_2\}$ και $\{p_2^2 + x_1^2, H\}$. Ποιο είναι το συμπέρασμά σας για την ποσότητα $p_2^2 + x_1^2$;
3. Αλλάξτε συντεταγμένες του χώρου των φάσεων ως ακολούθως

   $$P_1 = N(p_1 + p_2), P_2 = -iN(p_1 - p_2), Q_1 = N(x_1 + x_2), Q_2 = iN(x_1 - x_2),$$

   όπου i η φανταστική μονάδα, ρυθμίζοντας κατάλληλα τη σταθερά N, έτσι ώστε $(x_k, p_k) \to (Q_k, P_k)$ να είναι κανονικός μετασχηματισμός. Στη συνέχεια εκφράστε τη Χαμιλτονιανή στις νέες συντεταγμένες. Συμφωνεί η μορφή της Χαμιλτονιανής που βρήκατε με την πρόβλεψή σας του 1ου ερωτήματος;

Λύσεις

Πρόβλημα A

1.
$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \text{const} = 1$$
$$S = \sin(1)$$

2.
$$\dot{x} = 1 \pm \epsilon$$

για $t \in [1, 1/2)$ και $t \in [1/2, 1]$ αντίστοιχα.

$$\tilde{S} = \frac{1}{2}(\sin(1+\epsilon) + \sin(1-\epsilon)) = \sin(1)\cos(\epsilon)$$

3. Για $\epsilon << 1$
$$\tilde{S} \simeq S(1 - \epsilon^2/2)$$
οπότε είναι συμβατή. Δεδομένου όμως ότι $\cos\epsilon < 1$, είναι $\tilde{S} < S$ οπότε η S δεν είναι ελάχιστη. Στάσιμη εδώ δεν σημαίνει ελάχιστη.

Πρόβλημα B

1.
$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz - \lambda(z - \rho^2/R)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} &= m\rho\dot{\phi}^2 + 2\lambda\rho/R \\ m\rho^2\dot{\phi} &= \text{const} \\ m\ddot{z} &= -mg - \lambda \\ z &= \rho^2/2 \end{aligned}$$

2. Για να έχουμε οριζόντια κυκλική τροχιά θα πρέπει $\ddot{\rho} = \ddot{z} = 0$ οπότε

$$\begin{aligned} 0 &= mR\dot{\phi}^2 + 2\lambda \\ mR^2\dot{\phi} &= mR^2\Omega \\ 0 &= -mg - \lambda. \end{aligned} \tag{1}$$

Η 3η οδηγεί σε $\lambda = -mg$ και η 1η σε $\dot{\phi} = \Omega = \sqrt{-2\lambda/(mR)} = \sqrt{2g/R}$.

3.
$$E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + mgz + \lambda(z - \rho^2/R).$$

και επιβάλλοντας τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε $E = mgR$. Για να βρούμε την αντίδραση του δεσμού χρειάζεται να υπολογίσουμε το λ. Έχουμε: Από τη 2η εξίσωση Euler-Lagrange

$$\dot{\phi} = 0 \Rightarrow \phi = \text{const},$$

από την 1η εξίσωση Euler-Lagrange

$$\ddot{\rho} = 2(\lambda/m)\rho/R,$$

από την 3η εξίσωση Euler-Lagrange

$$\ddot{z} = -g - \lambda/m$$

που μέσω του δεσμού (4η εξίσωση Euler-Lagrange) γράφεται

$$2(\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho})/R = -g - \lambda/m$$

και χρησιμοποιώντας την προηγούμενη εξίωση για το $\ddot{\rho}$ βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\dot{\rho}^2 &= -gR/2 - \lambda R/(2m) - \rho(2(\lambda/m)\rho/R)\\ &= -gR/2 - (\lambda/m)(R/2 + 2\rho^2/R)\end{aligned}$$

Με τη χρήση του ολοκληρώματος του Jacobi που στην περίπτωσή μας (με τις προαναφερθείσες δεσμεύσεις) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}E = mgR &= \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + 4(\rho^2/R^2)\dot{\rho}^2) + mg\rho^2/R\\ &= \frac{m}{2}(1 + 4(\rho^2/R^2))\dot{\rho}^2 + mg\frac{\rho^2}{R} \Rightarrow\\ \dot{\rho}^2 &= 2g\frac{R - \rho^2/R}{1 + 4(\rho^2/R^2)},\end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση καταλήγουμε ότι

$$2g\frac{R - \rho^2/R}{1 + 4(\rho^2/R^2)} = -gR/2 - (\lambda/m)(R/2 + 2\rho^2/R).$$

όταν το σωματίδιο φτάσει στο κατώτερο σημείο, (γεγονός αναπόφευκτο αφού $\phi = \text{const}$)

$$\lambda/m = \frac{-5gR/2}{R/2} = -5g.$$

Επομένως $\mathbf{F} = -\lambda\boldsymbol{\nabla}(z - \rho^2/R)|_{z=0,\rho=0} = 5mg\hat{\mathbf{z}}$.

Πρόβλημα Γ

1. Από την απαίτηση $\partial V/\partial x_i = 0$ βρίσκουμε
$$x_1(1+2x_2^2) = x_2(1+2x_1^2) = 0.$$
Μοναδικό σημείο ισορροπίας λοιπόν το $x_{1e} = x_{2e} = 0$. Θέτοντας $\xi_1 = x_1 - 0, \xi_2 = x_2 - 0$ η L γραμμικοποιείται ως ακολούθως
$$L = \frac{1}{2}(\dot{\xi}_1^2 + 4\dot{\xi}_2^2) - \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2).$$

2. $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0 \Rightarrow (1-\omega^2)(1-4\omega^2) = 0.$$
Στη συχνότητα $\omega_1 = 1$ αντιστοιχεί ο κανονικός τρόπος $\Xi_1 = (1,0)^\top$ ενώ στη συχνότητα $\omega_2 = 1/2$ αντιστοιχεί ο κανονικός τρόπος $\Xi_2 = (0,1)^\top$.

3. Η γενική λύση είναι η
$$\Xi(t) = (c_1 \cos t + s_1 \sin t)\Xi_1 + (c_2 \cos(t/2) + s_2 \sin(t/2))\Xi_2$$
και επιβάλλοντας τις δοθείσες αρχικές συνθήκες βρίσκουμε $c_1 = c_2 = 0, s_2 = 0, s_1 = \epsilon$, οπότε
$$x_1(t) = \epsilon \sin t \ , \ x_2(t) = 0.$$
Η παραπάνω λύση είναι προσεγγιστικά σωστή όσον αφορά στο αρχικό σύστημα και γίνεται ακριβέστερη καθώς $\epsilon << 1$.

Πρόβλημα Δ

1. $$p_1 = \dot{x}_2 \ , \ p_2 = \dot{x}_1$$
οπότε
$$H = p_2 p_1 + p_1 p_2 - L = p_1 p_2 + x_1 x_2.$$
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = p_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_1 \\ \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -x_2 \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial p_1} = -x_1 \end{aligned}$$
Παρατηρούμε ότι $\ddot{x}_1 = -x_1, \ddot{x}_2 = -x_2$. Πρόκειται λοιπόν για ιδσότροπο αρμονικό ταλαντωτή στις 2 διαστάσεις.

2.
$$\{\dot{x}_1, x_2\} = \{p_2, x_2\} = -1$$

και
$$\{\frac{p_2^2 + x_1^2}{2}, p_1 p_2 + x_1 x_2\} = p_2\{p_2, x_2\}x_1 + x_1\{x_1, p_1\}p_2 = 0$$

Η τελευταία είναι διατηρούμενη ποσότητα.

3. Θα πρέπει
$$\{Q_i, Q_j\} = \{P_i, Pj\} = 0$$

γεγονός που προκύπτει αβίαστα και
$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$$

που οδηγεί στις σχέσεις
$$\begin{aligned} N(1-a^2) &= 1 \\ N(1+a^2) &= 0 \end{aligned}$$

οπότε καταλήγουμε ότι $a = i$, $N = 1/\sqrt{2}$. Λύνοντας αντιστρόφως τις σχέσεις βρίσκουμε
$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{2}} \\ p_2 &= \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{2}i} \\ x_1 &= \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}} \\ p_2 &= \frac{Q_2 - Q_1}{\sqrt{2}i} \end{aligned}$$

και η Χαμιλτονιανή λαμβάνει τη μορφή