Κεφάλαιο 2

Λογισμός των Μεταβολών

*“Σε πέντε λεπτά θα πείτε ότι όλα
ήταν τόσο απίστευτα απλά”
Sherlock Holmes*

2.1 Πότε ένα συναρτησοειδές καθίσταται στάσιμο

Αναλογία στασιμότητας συναρτησοειδούς και ακροτάτου συνάρτησης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο διατυπώσαμε μια νέα αρχή, την αρχή του Χάμιλτον. Η αρχή αυτή θέτει ένα διαφορετικό μαθηματικό πρόβλημα από εκείνο των νόμων του Νεύτωνα. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα προσδιορίζει την τροχιά του συστήματος επιλύοντας μια διαφορική εξίσωση, ενώ η αρχή του Χάμιλτον προσδιορίζει την τροχιά επιλύοντας το πρόβλημα εύρεσης της συνάρτησης που καθιστά στάσιμη τη δράση. Πιο συγκεκριμένα, η αρχή του Χάμιλτον σχετίζεται μαθηματικά περισσότερο με το πρόβλημα της εύρεσης ακροτάτου μιας συνάρτησης. Αυτό που καθιστά το συγκεκριμένο πρόβλημα πιο περίπλοκο είναι το γεγονός ότι η ποσότητα που επιδιώκουμε να καταστήσουμε στάσιμη δεν είναι μία συνήθης συνάρτηση, αλλά ένα συναρτησοειδές, δηλαδή μία συνάρτηση που κατασκευάζεται από μία άλλη συνάρτηση. Συγκεκριμένα, η δράση S είναι ένα συναρτησοειδές που εξαρτάται από τη διαδρομή $x(t)$ που επιλέγει κανείς για να ενώσει το αρχικό με το τελικό σημείο στο χώρο μέσα στον οποίο εξελίσσεται, με την πάροδο του χρόνου, η θέση του μηχανικού συστήματος, είτε πρόκειται για ένα μόνο σωματίδιο, είτε για ένα πλήθος σωματιδίων που συνδέονται μεταξύ τους ή απλώς αλληλεπιδρούν. Θα δούμε ότι η στασιμοποίηση ενός συναρτησοειδούς είναι ακριβώς ανάλογη με την εύρεση ακροτάτου μιας συνάρτησης και οι εξισώσεις κίνησης στις οποίες θα καταλήξουμε και οι οποίες έχουν την ιδιότητα να καθιστούν το συναρτησοειδές στάσιμο, είναι το ανάλογο του μηδενισμού της παραγώγου των απλών συναρτήσεων, εφαρμοζόμενου στην περίπτωση των συναρτησοειδών.

Τι σημαίνει στάσιμο;

Σε γενικές γραμμές η συνταγή που ακολουθήσαμε, όταν, ξεκινώντας από τη μορφή της δράσης για τα μηχανικά συστήματα, καταλήξαμε στο θεμελιώδη νόμο της δυναμικής, είναι αυτή που θα ακολουθήσουμε και για την εύρεση της συνθήκης που καθιστά ένα συναρτησοειδές στάσιμο. Ας θεωρήσουμε ένα συναρτησοειδές της μορφής

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L dt \ ,$$

όπου η L θα υποθέσουμε ότι είναι συνάρτηση κάποιων άλλων συναρτήσεων του t· των $x_i(t)$ και των παραγώγων των συναρτήσεων αυτών ως προς t,

$\dot{x}_i(t), \ddot{x}_i(t), \ldots$, με τον δείκτη i να υποδηλώνει την i-οστή συντεταγμένη που απαιτείται για τον προσδιορισμό της κατάστασης του φυσικού συστήματος που περιγράφει η Λαγκρανζιανή. Για παράδειγμα, για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σωματιδίου στον τρισδιάστατο χώρο απαιτούνται τρεις συντεταγμένες, που μπορεί να ληφθούν ως οι τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες του σωματιδίου ή οι σφαιρικές συντεταγμένες του ή οποιεσδήποτε άλλες συντεταγμένες. Αντίστοιχα για τον προσδιορισμό της μηχανικής κατάστασης N σωματιδίων στον τρισδιάστατο χώρο απαιτούνται $3N$ συντεταγμένες και το i λαμβάνει τιμές από το 1 μέχρι το $3N$. Ο αριθμός συντεταγμένων που απαιτείται για τον προσδιορισμό ενός φυσικού συστήματος ονομάζεται *βαθμοί ελευθερίας* του φυσικού συστήματος και είναι σημαντικό να τον γνωρίζουμε πριν αρχίσουμε να κατασκευάζουμε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος. Για ευκολία, εδώ, θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση L, την οποία θα ονομάζουμε *Λαγκρανζιανή* (Lagrangian) όταν πρόκειται να περιγράψουμε ένα φυσικό σύστημα, είναι συνάρτηση μόνο των συναρτήσεων $x_i(t)$ και των πρώτων παραγώγων τους $\dot{x}_i(t)$, καθώς επίσης και, εν γένει, του ίδιου του t. Μια τέτοια υπόθεση είναι δικαιολογημένη, όταν πρόκειται για μηχανικά συστήματα, αφού ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα είναι διαφορικός νόμος δεύτερης τάξης και επομένως απαιτείται η γνώση και της αρχικής θέσης και της ταχύτητας ενός σώματος για τον προσδιορισμό της τροχιάς του.[1] Η απαίτηση να λαμβάνει η S ακρότατη τιμή για κάποιες συγκεκριμένες συναρτήσεις $x_i(t)$ σημαίνει, όπως εξηγήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ότι, αν παραλλάξουμε ελαφρώς τις συναρτήσεις αυτές, κρατώντας όμως σταθερές τις αρχικές και τελικές τιμές των συναρτήσεων αυτών, η τιμή της S πρακτικά δεν μεταβάλλεται. Για την ακρίβεια η τιμή της μεταβάλλεται σε δεύτερη, τουλάχιστον, τάξη συγκριτικά με το μέγεθος της μεταβολής των συναρτήσεων, όπως ακριβώς συμβαίνει και με το ακρότατο μιας συνάρτησης: είναι εκείνο το σημείο κοντά στο οποίο η μεταβολή της τιμής της συνάρτησης είναι τουλάχιστον δεύτερης τάξης συγκριτικά με τη μετακίνηση από το εν λόγω σημείο. Φορμαλιστικά, πρέπει

$$\tilde{S} - S = \int_{t_A}^{t_B} L(\tilde{x}_i(t), \dot{\tilde{x}}_i(t), t)dt - \int_{t_A}^{t_B} L(x_i(t), \dot{x}_i(t), t)dt = \mathcal{O}(\epsilon^2) \;, \quad (2.1)$$

Κατασκευή ελαφρώς παραλλαγμένων συναρτήσεων

όπου $\tilde{x}_i(t)$ είναι όλες οι παραλλαγμένες συναρτήσεις από τις οποίες εξαρτάται η συνάρτηση L και ϵ είναι μια πολύ μικρή παράμετρος που καθορίζει το πόσο κοντά είναι οι παραλλαγμένες συναρτήσεις σε εκείνες τις συναρτήσεις $x_i(t)$ που καθιστούν την S ακρότατο

$$\tilde{x}_i(t) = x_i(t) + \epsilon \xi_i(t) \;.$$

Οι συναρτήσεις $\xi_i(t)$ είναι τυχαίες, ομαλά συμπεριφερόμενες και όχι κατ' ανάγκην επιλεγμένες να παίρνουν μικρές τιμές. Η απαίτηση της μικρής παρέκκλισης εξασφαλίζεται από την παράμετρο ϵ που πολλαπλασιάζει αυτές τις συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις $\xi_i(t)$ καθορίζουν με ποιον ακριβώς τρόπο οι παραλλαγμένες συναρτήσεις διαφοροποιούνται από τις συναρτήσεις–λύσεις του προβλήματός μας. Η μόνη απαίτηση για αυτές τις συναρτήσεις, σύμφωνα με την αρχή ελάχιστης δράσης, είναι να ισχύει

$$\xi_i(t_A) = \xi_i(t_B) = 0 \;,$$

για όλες τις ξ_i, ώστε οι παραλλαγμένες συναρτήσεις να έχουν την ίδια τιμή με τις συναρτήσεις–λύσεις στα άκρα της ολοκλήρωσης. Αναπτύσσοντας τώρα τη συνάρτηση L, της οποίας μεταβλητές είναι οι παραλλαγμένες συναρτή-

Ανάλυση της δράσης που αντιστοιχεί στην παραλλαγμένη διαδρομή

[1] Η σύνδεση της τάξης των παραγώγων που εμφανίζονται στην L και της τάξης του διαφορικού νόμου του Νεύτωνα θα αναλυθεί εκτενέστερα στο εδάφιο 3.2. Βλέπε σχετικά το Πρόβλημα 5.

σεις, σε όρους μηδενικής, πρώτης κ.ο.κ. τάξης, ως προς τη μικρή παράμετρο ϵ βρίσκουμε ότι

$$L((\tilde{x}_i(t), \dot{\tilde{x}}_i(t), t) = L(x_i(t), \dot{x}_i(t), t) + \epsilon \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \xi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{\xi}_i \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.2)$$

όπου με το συμβολισμό

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} \xi_i \ ,$$

εννοούμε

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \xi_i \ ,$$

ακολουθώντας την αθροιστική σύμβαση του Αϊνστάιν για τους επαναλαμβανόμενους δείκτες (βλ. Μαθηματικό Παράρτημα). Ομοίως και για τον άλλο αντίστοιχο όρο της σχέσης (2.2). Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση του αναπτύγματος της L, η διαφορά των δύο S που αντιστοιχούν στις παραπλήσιες διαδρομές δίνεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$\tilde{S} - S = \epsilon \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \xi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{\xi}_i \right) dt + \mathcal{O}(\epsilon^2) \ . \quad (2.3)$$

Προκειμένου, λοιπόν, η S να καθίσταται στάσιμη, πρέπει ο όρος πρώτης τάξης ως προς ϵ να είναι ταυτοτικά μηδενικός και μάλιστα για οποιαδήποτε επιλογή των συναρτήσεων ξ_i. Αν μάλιστα επαναλάβουμε το τέχνασμα με την παραγοντική ολοκλήρωση που χρησιμοποιήσαμε και στην πρώτη μας απόπειρα εύρεσης του ακροτάτου της δράσης (βλ. Κεφάλαιο 1), καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_A}^{t_B} \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right] \xi_i dt + \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \xi_i \right) dt \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right] \xi_i dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \xi_i \right]_{t_A}^{t_B} \ . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Όμως, ο τελευταίος όρος είναι μηδενικός, αφού η τιμή των συναρτήσεων ξ_i στα άκρα έχει ληφθεί μηδενική. Η απαίτηση, λοιπόν, το ολοκλήρωμα που απομένει να είναι ταυτοτικά μηδέν μας θυμίζει τη μαθηματική πρόταση που συναντήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, με μια μικρή όμως διαφορά: Στην παρούσα περίπτωση η ποσότητα που μηδενίζεται δεν είναι ένα απλό ολοκλήρωμα, αλλά ένα άθροισμα ολοκληρωμάτων. (Θυμηθείτε την αθροιστική σύμβαση!) Μπορεί, βέβαια, κανείς με μια μικρή τροποποίηση της προηγούμενης απόδειξης να δείξει ότι και σε αυτή την περίπτωση η ποσότητα

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι στάσιμη η δράση

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right)$$

πρέπει να είναι μηδενική για κάθε τιμή του δείκτη i.

Απόδειξη: Η απόδειξη που ακολουθεί είναι κατ' ουσίαν επανάλειψη της αντίστοιχης απόδειξης που δώσαμε στο τέλος του εδαφίου 1.1. Η διαφορά είναι απλώς ότι τώρα αναφερόμαστε σε περισσότερες από μία διαστάσεις. (i) Ας υποθέσουμε ότι η κάθε μία συνάρτηση εντός των τετράγωνων αγκυλών και πιο συγκεκριμένα η πρώτη από αυτές (για $i = 1$) *δεν* είναι μηδενική

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) \neq 0 \,. \tag{2.5}$$

(ii) Επιλέγουμε ως $\xi_i(t)$ το σύνολο των συναρτήσεων $\xi_1(t), \xi_2(t) = 0$, $\xi_3(t) = 0, \ldots$, όπου ειδικά η $\xi_1(t)$ έχει επιλεγεί ώστε να μηδενίζεται οπουδήποτε αλλού εκτός από μια μικρή περιοχή στην οποία η συνάρτηση της έκφρασης (2.5) έχει σταθερό πρόσημο και δεν μηδενίζεται. Κατασκευάζουμε την $\xi_1(t)$ έτσι ώστε να έχει και αυτή σταθερό πρόσημο σε αυτή την περιοχή. (iii) Τότε το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος (2.4) δεν θα είναι μηδενικό, πράγμα το οποίο είναι άτοπο σύμφωνα με την αρχική μας απαίτηση. (iv) Συνεπώς, η παράσταση (2.5) πρέπει να είναι ταυτοτικά μηδέν. (v) Επαναλαμβάνουμε όλα τα προηγούμενα βήματα με τη δεύτερη, τρίτη κ.ο.κ. συνιστώσα της συνάρτησης

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) \,,$$

φροντίζοντας πάντα να μηδενίζουμε όλες τις άλλες συναρτήσεις $\xi_i(t)$ εκτός από αυτή που έχει ίδιο δείκτη με τη συνάρτηση που θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ταυτοτικά μηδέν. Συνάγουμε, λοιπόν, ότι

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0 \,, \tag{2.6}$$

για κάθε τιμή του i.

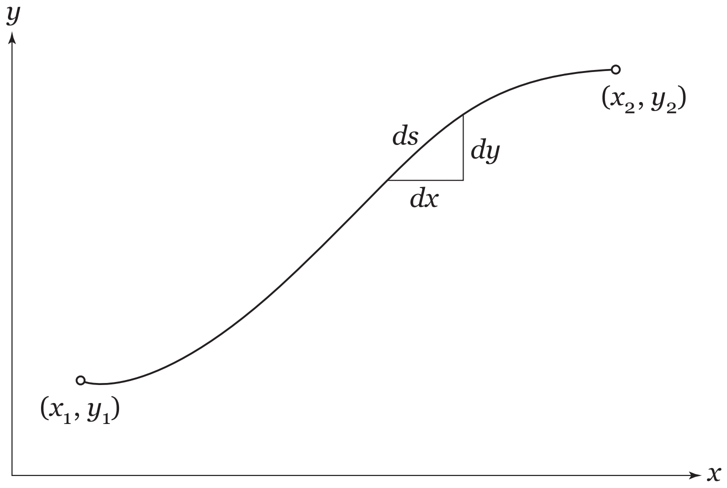
Οι παραπάνω εξισώσεις ονομάζονται *εξισώσεις Euler - Lagrange* και, υπό μία έννοια, μπορούν να θεωρηθούν ως οι παράγωγοι του συναρτησοειδούς S ως προς την κάθε συνάρτηση $x_i(t)$. Αυτές οι εξισώσεις μας οδηγούν στη λύση του ευρύτερου προβλήματός μας. Είναι, δηλαδή, οι διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, οι λύσεις των οποίων καθιστούν το συναρτησοειδές S στάσιμο. Πιο συγκεκριμένα όσον αφορά στα μηχανικά συστήματα οι εξισώσεις Euler - Lagrange είναι οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την κίνηση που πραγματοποιεί το φυσικό σύστημα.

2.2 Παραδείγματα προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν με το λογισμό των μεταβολών

Η συνθήκη στασιμοποίησης που προκύπτει από μεταβολές συναρτήσεων μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε τα ακρότατα γενικότερων συναρτησοειδών. Παραθέτουμε εδώ μερικά παραδείγματα προβλημάτων που μπορούμε να επιλύσουμε χρησιμοποιώντας το *λογισμό των μεταβολών* που αναπτύξαμε στις προηγούμενες παραγράφους.

Γεωμετρικό πρόβλημα. Ποιά επίπεδη καμπύλη που συνδέει δύο δεδομένα σημεία έχει ακρότατο μήκος;

Λόγω του πυθαγορείου θεωρήματος ένα απειροστό τμήμα μιας επίπεδης καμπύλης θα έχει μήκος $ds^2 = dx^2 + dy^2$ (βλ. Σχήμα 2.1). Έτσι, το συνολικό μήκος της τυχαίας καμπύλης, που περιγράφεται από τη συνάρτηση $y(x)$, και



Σχήμα 2.1: Η εύρεση του μήκους μιας επίπεδης καμπύλης που συνδέει δύο σημεία του επιπέδου.

η οποία συνδέει το σημείο A, (x_1, y_1), με το σημείο B, (x_2, y_2), θα είναι

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_A^B dx\sqrt{1 + (y')^2}\ . \tag{2.7}$$

Το ζητούμενο είναι να προσδιορισθεί η συνάρτηση $y(x)$ που καθιστά το συναρτησοειδές

$$S[y] = \int_A^B dx\sqrt{1 + (y')^2}\ , \tag{2.8}$$

του μήκους της καμπύλης που συνδέει τα δύο δεδομένα σημεία του χώρου ακρότατο. Εδώ, η αντίστοιχη συνάρτηση L αυτού του προβλήματος είναι η

$$L(y, y', x) = \sqrt{1 + (y')^2}\ ,$$

η οποία στην περίπτωση αυτή εξαρτάται μόνο από την $y' \equiv dy/dx$ και δεν έχει καμία εξάρτηση ούτε από τη συνάρτηση y, ούτε από την x που παραμετροποιεί την καμπύλη. Η ακροτάτου μήκους καμπύλη θα περιγράφεται από εκείνη τη συνάρτηση $y(x)$, η οποία αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης Euler - Lagrange:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0\ . \tag{2.9}$$

Αφού η L για το δεδομένο πρόβλημα δεν εξαρτάται από τη συνάρτηση $y(x)$ η εξίσωση Euler - Lagrange οδηγεί στη σταθερότητα της $\partial L/\partial y'$, δηλαδή,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = 0\ . \tag{2.10}$$

Με άλλα λόγια, στη συνάρτηση y για την οποία

$$y' = \text{σταθερά}\ . \tag{2.11}$$

Η ακρότατου μήκους επίπεδη "καμπύλη", λοιπόν, που συνδέει δύο σημεία πρέπει να έχει σταθερή κλίση, δηλαδή, είναι μια ευθεία της μορφής $y = y_0 + c(x - x_0)$. Μάλιστα, με τον ίδιο τρόπο που δείξαμε στο Κεφάλαιο 1 ότι η ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση καθιστά ελάχιστη τη δράση ενός ελεύθερου σωματιδίου, μπορούμε να δείξουμε ότι η ευθεία καθιστά το μήκος των καμπυλών που συνδέουν δύο σημεία ελάχιστο. Ο προσδιορισμός των σταθερών παραμέτρων μπορεί να επιτευχθεί από την απαίτηση η ευθεία αυτή να διέρχεται από τα δεδομένα σημεία A, B. Παρατηρούμε ότι η λύση της εξίσωσης Euler - Lagrange δεν καθορίζει την ακριβή έκφραση της συνάρτησης, παρά μόνο τη μορφή της · η ακριβής τιμή των ελεύθερων παραμέτρων, εδώ των x_0, y_0, c, καθορίζεται από τις συνοριακές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος.

Το πρόβλημα του βραχυστόχρονου.[2] Τι σχήμα πρέπει να έχει μια τσουλήθρα, η οποία βρίσκεται σε ένα κατακόρυφο επίπεδο και ενώνει δύο σημεία που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, ώστε ένα σώμα ολισθαίνοντας ελεύθερα επάνω σε αυτή, χωρίς αρχική ταχύτητα, να φτάσει από το ένα άκρο στο άλλο στο συντομότερο δυνατό χρόνο;

Ας θεωρήσουμε ένα απειροστό τμήμα ds της ζητούμενης καμπύλης $y(x)$ με οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα dx και dy αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 2.2). Αν u είναι η στιγμιαία ταχύτητα με την οποία το κινητό διασχίζει το εν λόγω διάστημα, το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το ολισθαίνον σώμα να διατρέξει το ds θα είναι ίσο με ds/u. Επομένως, η ποσότητα που πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε είναι η

$$S[y] = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{u} = \int_A^B dx \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{u} \; .$$

Παράλληλα, γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα u, λόγω διατήρησης της ενέργειας, είναι συνάρτηση μόνο του ύψους y και πιο συγκεκριμένα δίνεται από την έκφραση

$$u(y) = \sqrt{-2gy} \; .$$

Στο πρόβλημα τούτο η αντίστοιχη συνάρτηση L

$$L(y, y', x) = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{-2gy}} \; ,$$

που υπεισέρχεται στο συναρτησοειδές είναι πιο πολύπλοκη απ' ό,τι στο προηγούμενο γεωμετρικό πρόβλημα και εξαρτάται τόσο από την y όσο και από την y'. Ύστερα από μερικές πράξεις η εξίσωση Euler - Lagrange

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \; ,$$

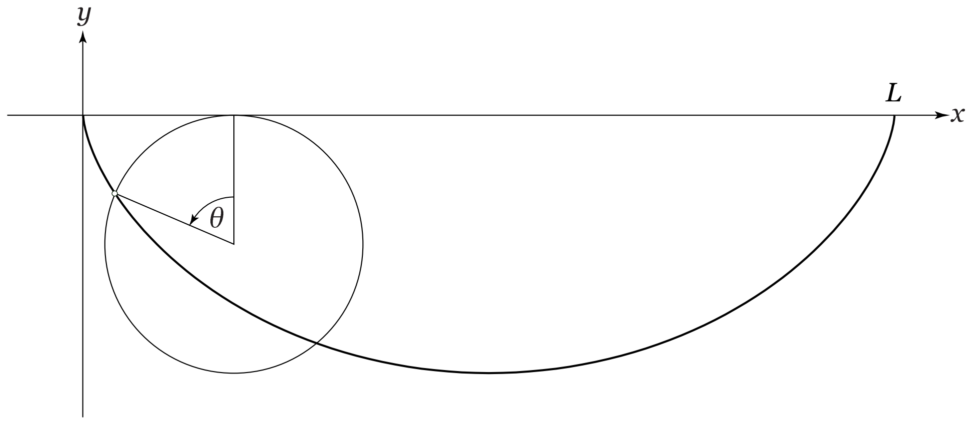
που πρέπει να ικανοποιείται από την καμπύλη του βραχυστοχρόνου καταλήγει στη διαφορική εξίσωση

$$1 + (y')^2 + 2yy'' = 0 \; . \tag{2.12}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την (2.12) με y', η παραπάνω εξίσωση γράφεται απλούστερα ως εξής:

$$\frac{d}{dx}[y(1+(y')^2)] = 0 \; .$$

[2] Το πρόβλημα αυτό τέθηκε την Πρωτοχρονιά του 1697 από τον Johann Bernoulli ως πρόκληση προς "τους καλύτερους μαθηματικούς όλου του κόσμου". Μη λαμβάνοντας απάντηση από τους Γάλλους και τους Ολλανδούς μαθηματικούς, ο Bernoulli απέστειλε το πρόβλημα στη Βασιλική Ακαδημία (Royal Society), η οποία στη συνέχεια το διαβίβασε στο Νεύτωνα. Ο Νεύτων έλυσε το πρόβλημα την ίδια κιόλας ημέρα και έστειλε τη σύντομη αλλά δυσνόητη λύση του ανωνύμως στον Bernoulli, ο οποίος αναγνώρισε από τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος το συγγραφέα της λύσης, αναφωνώντας το περίφημο "εξ όνυχος τον λέοντα".



Σχήμα 2.2: Η κυκλοειδής καμπύλη αποτελεί τη λύση στο πρόβλημα του βραχυστόχρονου.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι

$$y(1+(y')^2) = \text{σταθ} \ .$$

Η τελευταία αυτή σχέση επαληθεύεται από την εξίσωση της κυκλοειδούς καμπύλης (βλ. Σχήμα 2.2) που περιγράφεται από την παραμετρική μορφή:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= A(\theta - \sin\theta) \ , && (2.13) \\ y(\theta) &= A(-1+\cos\theta) \ , && (2.14) \end{aligned}$$

όπου θ είναι μια παράμετρος που λαμβάνει τιμές από 0 έως 2π. *Κυκλοειδής καμπύλη* είναι η καμπύλη που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας ενός κύκλου, ο οποίος κυλίεται επάνω σε ένα επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η τιμή της παραμέτρου A πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε η κυκλοειδής καμπύλη να προσαρμόζεται στα δεδομένα ακραία σημεία. Πιο συγκεκριμένα θα πρέπει

$$A = \frac{L}{2\pi} \ ,$$

όπου L η οριζόντια απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων σημείων.

Πρόβλημα μηχανικής. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου μάζας m που κινείται μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης.

Μάθαμε, ήδη, να γράφουμε τη δράση για τα μηχανικά συστήματα ως το ολοκλήρωμα της διαφοράς μεταξύ της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας. Επομένως, η λαγκρανζιανή συνάρτηση για το πρόβλημα αυτό είναι η

$$L = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}|^2 - (-m\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) - mgz \ .$$

Σύμφωνα με την αρχή της ελάχιστης δράσης, η φυσική διαδρομή πρέπει να είναι τέτοια, ώστε η δράση να καθίσταται στάσιμη και συνεπώς να ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler - Lagrange. Στο πρόβλημα που εξετάζουμε η λαγκρανζιανή συνάρτηση είναι συνάρτηση των τριών καρτεσιανών συντεταγμένων της θέσης του σωματιδίου και των παραγώγων τους. Επομένως, υπάρχουν τρεις εξισώσεις Euler - Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= 0 \ , \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) &= 0 \ , \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) &= 0 \ , \end{aligned}$$

οι οποίες ύστερα από απλές παραγωγίσεις λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \,, \\ m\ddot{y} &= 0 \,, \\ m\ddot{z} + mg &= 0 \,. \end{aligned}$$

Η λύση αυτών των εξισώσεων δίνει τη γνωστή μας παραβολική κίνηση

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + u_x t \,, \\ y(t) &= y_0 + u_y t \,, \\ z(t) &= z_0 + u_z t - \frac{1}{2} g t^2 \,, \end{aligned}$$

όπου (x_0, y_0, z_0) και (u_x, u_y, u_z) η αρχική θέση και ταχύτητα, αντίστοιχα, του σωματιδίου.

2.3 Μερικές πρώτες παρατηρήσεις επί των εξισώσεων Euler - Lagrange

Όπως αναφέραμε παραπάνω, οι εξισώσεις Euler - Lagrange δεν εμπεριέχουν καμία πληροφορία σχετικά με τα ακραία σημεία της διαδρομής. Στην πραγματικότητα, οι εξισώσεις Euler - Lagrange αποτελούν για τα μηχανικά συστήματα μια εναλλακτική παρουσίαση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα· είναι, δηλαδή, διαφορικές εξισώσεις που "υπαγορεύουν" στο μηχανικό σύστημα με ποιο τρόπο να "κινηθεί" σε κάθε χρονική στιγμή. Τα ακραία σημεία απλώς καθορίζουν τις παραμέτρους της φυσικής διαδρομής του συστήματος, ώστε η διαδρομή να διέρχεται από αυτά τα σημεία.

Οι εξισώσεις Euler - Lagrange, σε αντιδιαστολή με τις εξισώσεις του Νεύτωνα, διατηρούν την ίδια μορφή σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων

Μία ακόμη πιο σημαντική παρατήρηση είναι ότι, ενώ ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων λαμβάνει διαφορετική μορφή, οι εξισώσεις Euler - Lagrange μένουν απαράλλακτες. Αυτό που κάθε φορά αλλάζει είναι απλώς η μορφή της Λαγκρανζιανής. Το θέμα αυτό θα το εξετάσουμε διεξοδικότερα στο επόμενο εδάφιο, αλλά ως προοίμιο ας εξετάσουμε, για παράδειγμα, τις εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου σε κάποιο κεντρικό πεδίο δυνάμεων $F(r)$ που περιγράφεται από το δυναμικό $V(r)$, όπου r η απόσταση από την αρχή των αξόνων, ακολουθώντας κάθε φορά την κάθε μία από τις δύο θεωρήσεις.

• **Νευτώνεια θεώρηση:** Η κίνηση του σωματιδίου, που για λόγους απλούστευσης θα θεωρήσουμε ως δεδομένο ότι πραγματοποιείται σε ένα επίπεδο, διέπεται από το διανυσματικό νόμο

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}} \,.$$

Γράφοντας αυτή τη σχέση σε καρτεσιανές συντεταγμένες με κέντρο του συστήματος το κέντρο του πεδίου δυνάμεων, λαμβάνουμε

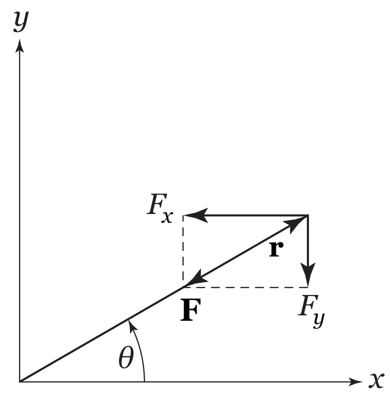
$$m\ddot{x} = F_x = F(r)\frac{x}{r} \,, \tag{2.15}$$

$$m\ddot{y} = F_y = F(r)\frac{y}{r} \,, \tag{2.16}$$

ενώ σε πολικές συντεταγμένες (βλ. Σχήμα 2.3), ύστερα από κάποιες, σχετικά επίπονες, πράξεις διανυσματικής ανάλυσης λαμβάνουμε

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r = F(r) \,, \tag{2.17}$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = F_\theta = 0 \,. \tag{2.18}$$



Σχήμα 2.3: Συσχέτιση καρτεσιανών και πολικών συνιστωσών μιας κεντρικής δύναμης.

Παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση του σωματιδίου έχει διαφορετική μορφή στα δύο συστήματα συντεταγμένων και συνεπώς η νευτώνεια μορφή των εξισώσεων κίνησης αλλάζει μορφή με το σύστημα συντεταγμένων. Θα ήταν καλό οι εξισώσεις κίνησης να μην αλλάζουν μορφή όταν αλλάζουμε σύστημα συντεταγμένων. Αυτό ακριβώς επιτυγχάνεται στη λαγκρανζιανή θεώρηση.

• **Λαγκρανζιανή θεώρηση:** Εξετάζουμε το ίδιο πρόβλημα με λαγκρανζιανό, τώρα, φορμαλισμό. Η Λαγκρανζιανή δίνεται από τη διαφορά κινητικής και δυναμικής ενέργειας του σωματιδίου. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες λαμβάνει τη μορφή

$$L_\kappa = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\sqrt{x^2 + y^2}) \ ,$$

ενώ στις πολικές συντεταγμένες λαμβάνει τη μορφή

$$L_\pi = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \ ,$$

όπου $V(r) = -\int_{r_0}^{r} F(r')dr'$.

Η φυσική κίνηση είναι αυτή που καθιστά τη δράση στάσιμη. Η δράση $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ μιας τροχιάς, όμως, είναι ανεξάρτητη από το σύστημα συντεταγμένων που έχουμε επιλέξει να εκφράσουμε τη Λαγκρανζιανή, διότι οι τιμές της Λαγκρανζιανής επί μιας τροχιάς, οι τιμές δηλαδή της διαφοράς της κινητικής και δυναμικής ενέργειας των σημείων της τροχιάς, δεν μπορεί να εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων. Οι L_κ και L_π, παρότι είναι διαφορετικές συναρτήσεις, λαμβάνουν την ίδια τιμή επί της τροχιάς. Συνεπώς, η τροχιά που καθιστά τη δράση στάσιμη, την καθιστά στάσιμη σε κάθε σύστημα συντεταγμένων και επομένως η φυσική τροχιά σε κάθε σύστημα συντεταγμένων ικανοποιεί τις αντίστοιχες ίδιες εξισώσεις Euler - Lagrange. Δηλαδή οι καρτεσιανές Euler - Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_\kappa}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L_\kappa}{\partial x} \ , \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_\kappa}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L_\kappa}{\partial y} \ ,$$

ενώ οι πολικές Euler - Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_\pi}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial L_\pi}{\partial r} \ , \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_\pi}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L_\pi}{\partial \theta} \ .$$

Οι εξισώσεις κίνησης θα καταλήξουν στις νευτώνειες εξισώσεις που γράψαμε παραπάνω ακολουθώντας τη νευτώνεια θεώρηση, ανάλογα με την εκάστοτε επιλογή του συστήματος αναφοράς (βλ. Άσκηση 2.1).

Οι εξισώσεις Euler - Lagrange, επειδή πηγάζουν από τη θεμελιακότερη αρχή του Χάμιλτον, έχουν αυτόματα ίδια μορφή σε κάθε σύστημα συντεταγμένων. Αυτή η ιδιότητα, εκτός των άλλων, μας διευκολύνει διότι μπορούμε να γράφουμε με άνεση τις εξισώσεις κίνησης σε κάθε σύστημα συντεταγμένων χωρίς να χρειάζεται να απομνημονεύουμε πολλές διαφορετικές εκφράσεις για την επιτάχυνση του σωματιδίου στα διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων.

Άσκηση 2.1 *Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Euler - Lagrange, δείξτε ότι οι δύο παραπάνω Λαγκρανζιανές οδηγούν στις αντίστοιχες νευτώνειες εξισώσεις κίνησης.*
Απάντηση: *Οι πράξεις είναι άμεσες. Βλέπε και εδάφιο 2.4 παρακάτω, όπου γίνεται συζήτηση για τις κυλινδροπολικές συντεταγμένες.*

2.4 Σημειακοί μετασχηματισμοί

Έως τώρα δείξαμε ότι η αρχή του Χάμιλτον είναι ισοδύναμη με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, αν γράψουμε τη Λαγκρανζιανή ενός μηχανικού συστήματος ως τη διαφορά μεταξύ της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας του συστήματος με τις θέσεις και τις ταχύτητες όπως αυτές μετρώνται σε ένα αδρανειακό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς. Τι θα συνέβαινε, όμως, αν αντί των καρτεσιανών συντεταγμένων επιλέγαμε κάποιες άλλες γενικότερες συντεταγμένες; Σε αυτή την περίπτωση η ισοδυναμία των εξισώσεων Euler - Lagrange με τις εξισώσεις του Νεύτωνα δεν είναι προφανής.

Τι είναι σημειακός μετασχηματισμός;

Έστω ένα φυσικό σύστημα, το οποίο διέπεται από τη λαγκρανζιανή συνάρτηση $L(x, \dot{x}, t)$ όπου το x, και αντίστοιχα το $\dot{x}$, μπορεί να συμβολίζει ένα ολόκληρο πλήθος από συντεταγμένες που απαιτούνται για τον καθορισμό της θέσης και αντίστοιχα της ταχύτητας των μερών του συστήματος. Θεωρούμε, τώρα, νέες συντεταγμένες q, τόσες όσες και οι x, οι οποίες συνδέονται με τις αρχικές καρτεσιανές συντεταγμένες μέσω των σχέσεων

$$q_i = q_i(x, t) \ .$$

Οι νέες συντεταγμένες προκύπτουν από τις αρχικές με έναν *σημειακό μετασχηματισμό*, δηλαδή έναν μετασχηματισμό της διαδρομής που ακολουθεί το σύστημα σημείο προς σημείο. Θεωρούμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή κάθε σημείο στις καινούργιες συντεταγμένες αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό σημείο στις αρχικές συντεταγμένες. Μπορούμε, επομένως, να γράψουμε τις αρχικές καρτεσιανές συντεταγμένες συναρτήσει των νέων συντεταγμένων q ως

$$x_i = x_i(q, t) \ .$$

Έχουμε, ήδη, χρησιμοποιήσει σημειακούς μετασχηματισμούς. Για παράδειγμα, στην περίπτωση μελέτης της κίνησης ενός σώματος σε κεντρικό πεδίο, γνωρίζουμε ότι είναι προτιμότερο να επιλέξουμε πολικές συντεταγμένες για την περιγραφή της κίνησης.[3] Σε αυτή την περίπτωση έχουμε το χρονοανεξάρτητο σημειακό μετασχηματισμό από τις συνήθεις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) στις πολικές (r, θ)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \ .$$

[3] Αυτή η προφανής παρατήρηση, δεν οδηγεί πάντα στην απλούστερη ανάλυση. Για παράδειγμα ο ισότροπος αρμονικός ταλαντωτής, αν και περιγράφεται από ένα κεντρικό πεδίο δύναμης, αναλύεται απλούστερα σε καρτεσιανές και όχι σε πολικές συντεταγμένες.

Άλλο παράδειγμα χρονοεξαρτώμενου, αυτή τη φορά, σημειακού μετασχηματισμού είναι η μετάβαση από ένα αδρανειακό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς σε άλλο, μη αδρανειακό, καρτεσιανό σύστημα που κινείται με μεταβαλλόμενη σχετική ταχύτητα $\mathbf{V}(t)$ ως προς το αρχικό. Σε αυτή την περίπτωση οι συντεταγμένες μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \int_0^t \mathbf{V}(\tau) d\tau \ ,$$

όπου $\mathbf{x}'$ οι νέες συντεταγμένες και $\mathbf{x}$ οι αρχικές συντεταγμένες.

Στο προηγούμενο εδάφιο είδαμε ότι μια τέτοια αλλαγή συντεταγμένων διαφοροποιεί τη μορφή των νευτώνειων εξισώσεων, όχι, όμως, και των εξισώσεων Euler - Lagrange. Έχει άραγε το γεγονός αυτό γενική ισχύ; Είναι, δηλαδή, οι εξισώσεις Euler - Lagrange αναλλοίωτες σε οποιονδήποτε σημειακό μετασχηματισμό;

Από τη στιγμή που έχουμε καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η φυσική κίνηση αντιστοιχεί σε εκείνη τη διαδρομή για την οποία η δράση καθίσταται στάσιμη και συνεπώς η διαδρομή είναι εκείνη που ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler - Lagrange, είναι προφανές ότι, αν η δράση

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L(x, \dot{x}, t) dt$$

καθίσταται στάσιμη για τη διαδρομή $x(t)$, θα καθίσταται στάσιμη και για την ίδια διαδρομή εκπεφρασμένη στις συντεταγμένες q, δηλαδή για τη διαδρομή $q(x(t), t)$. Επειδή

Η αρχή του Χάμιλτον δεν ενδιαφέρεται για τις συντεταγμένες στις οποίες γράφεται η διαδρομή του συστήματος

$$\dot{x} = \frac{\partial x(q,t)}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x(q,t)}{\partial t} \ ,$$

θα ισχύουν ταυτοτικά οι ισότητες

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_A}^{t_B} L\left(x(q,t), \frac{\partial x(q,t)}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x(q,t)}{\partial t}, t\right) dt \\ &= \int_{t_A}^{t_B} L'(q, \dot{q}, t) dt \ , \end{aligned}$$

όπου με L' συμβολίσαμε τη Λαγκρανζιανή στις νέες συντεταγμένες

$$L'(q, \dot{q}, t) \equiv L\left(x(q,t), \frac{\partial x(q,t)}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x(q,t)}{\partial t}, t\right) \ , \tag{2.19}$$

η οποία έχει διαφορετική συναρτησιακή έκφραση από την L. Συνεπώς, επειδή η $x(t)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler - Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \ ,$$

θα πρέπει και η $q(x(t), t)$ να ικανοποιεί τις αντίστοιχες εξισώσεις Euler - Lagrange, αφού και αυτή η διαδρομή καθιστά τη δράση ακρότατη. Δηλαδή,

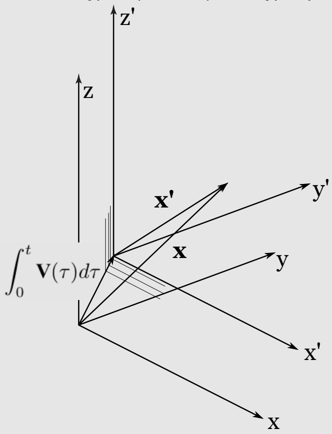
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = 0 \ ,$$

όπου η Λαγκρανζιανή $L'(q, \dot{q}, t)$ που διέπει τη δυναμική του συστήματος στις νέες συντεταγμένες είναι, όπως αναφέραμε, η αρχική Λαγκρανζιανή $L(x, \dot{x}, t)$, εκπεφρασμένη στις νέες συντεταγμένες q. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι

Άσκηση 2.2 *Γράψτε τις εξισώσεις Euler - Lagrange ενός ελεύθερου σωματιδίου στις συντεταγμένες* $\mathbf{x}'$, *όπου*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \int_0^t \mathbf{V}(\tau)d\tau \; .$$

Οι εξισώσεις Euler - Lagrange θα περιγράφουν, τότε, τις εξισώσεις κίνησης του ελεύθερου σωματιδίου σε ένα επιταχυνόμενο, με ταχύτητα $\mathbf{V}(t)$, *σύστημα αναφοράς.*



Απάντηση: *Η ταχύτητα του σωματιδίου στο επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς είναι:* $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$. *Η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου,* $L(\mathbf{v}) = m|\mathbf{v}|^2/2$, *στις συντεταγμένες του επιταχυνόμενου συστήματος γίνεται* $L(\mathbf{v}) = m|\mathbf{v}|^2/2 = m|\mathbf{v}' + \mathbf{V}|^2/2 = L'(\mathbf{v}')$, *δηλαδή η Λαγκρανζιανή του ελεύθερου σωματιδίου στο επιταχυνόμενο σύστημα είναι:* $L'(\mathbf{v}') = m|\mathbf{v}'|^2/2 + m\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} + m|\mathbf{V}|^2/2$, *χωρίς να υπάρχει καμία εξάρτηση από τη θέση του σωματιδίου* $\mathbf{x}'$. *Επειδή* $\partial L'/\partial \mathbf{v}' = m\mathbf{v}' + m\mathbf{V}$ *και* $\partial L'/\partial \mathbf{x}' = 0$, *οι εξισώσεις Euler - Lagrange στο επιταχυνόμενο σύστημα είναι:* $m\dot{\mathbf{v}}' = -m\dot{\mathbf{V}}$. *Δηλαδή, στο επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς ασκείται μια "ψευδοδύναμη" στο ελεύθερο σωματίδιο, αντίθετη στην επιτάχυνση του συστήματος αναφοράς και ανάλογη με τη μάζα του σωματιδίου. Παρατηρήστε ότι ο όρος* $m|\mathbf{V}|^2/2$ *στην* L' *δεν συνέβαλε καθόλου στις εξισώσεις κίνησης και ότι και η Λαγκρανζιανή* $L''(\mathbf{v}') = m|\mathbf{v}'|^2/2 + m\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}$ *παράγει τις ίδιες εξισώσεις κίνησης.*

οι εξισώσεις Euler - Lagrange, σε αντίθεση με τις εξισώσεις του Νεύτωνα, είναι αναλλοίωτες στους σημειακούς μετασχηματισμούς και έχουν την ίδια μορφή σε όλα τα συστήματα αναφοράς ακόμη και εάν αυτά δεν είναι αδρανειακά.[4] Η παραπάνω πρόταση μπορεί να αποδειχθεί, αρκετά πιο επίπονα βέβαια, αν εκτελέσουμε συστηματικά τις παραγωγίσεις των εξισώσεων Euler - Lagrange στη νέα Λαγκρανζιανή L' (βλ. Πρόβλημα 4).

Αν, λοιπόν, το μηχανικό σύστημα περιγράφεται σε ένα καρτεσιανό αδρανειακό σύστημα από τη Λαγκρανζιανή $L = E_{\text{κιν}} - E_{\text{δυν}}$, όπου $E_{\text{κιν}}$ η κινητική και $E_{\text{δυν}}$ η δυναμική ενέργεια του συστήματος, τότε σε οποιεσδήποτε άλλες συντεταγμένες η δυναμική του συστήματος θα περιγράφεται και πάλι από τη Λαγκρανζιανή $L = E_{\text{κιν}} - E_{\text{δυν}}$, όπου η κινητική και η δυναμική ενέργεια του συστήματος θα είναι τώρα εκπεφρασμένες στις νέες συντεταγμένες. Φορμαλιστικά, η Λαγκρανζιανή θα είναι μια νέα συνάρτηση L' των νέων συντεταγμένων. Για παράδειγμα, ένα ελεύθερο σωματίδιο που κινείται στο χώρο θα περιγράφεται από τη λαγκρανζιανή συνάρτηση

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \; ,$$

αν χρησιμοποιηθούν καρτεσιανές συντεταγμένες. Αν, όμως, είχαμε επιλέξει

[4] Στο σημείο αυτό αναρωτιέται κανείς ποια είναι, τότε, η σημασία του πρώτου νόμου του Νεύτωνα; Σε επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα έχει κρίσιμη σημασία για την κατασκευή της λαγκρανζιανής συνάρτησης.

ως συντεταγμένες για την περιγραφή της κίνησης τις κυλινδροπολικές συντεταγμένες (ρ, θ, z), τότε επειδή

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta \ , \\ y &= \rho \sin\theta \ , \end{aligned}$$

θα ήταν

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\rho}\cos\theta - \rho\,\dot{\theta}\sin\theta \ , \\ \dot{y} &= \dot{\rho}\sin\theta + \rho\,\dot{\theta}\cos\theta \ . \end{aligned}$$

Συνεπώς, η κινητική ενέργεια, και επομένως η Λαγκρανζιανή που διέπει τη δυναμική του σωματιδίου, θα δίνεται από την έκφραση

$$L' = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \ .$$

Η κίνηση του σωματιδίου σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες μπορεί να εξαχθεί από τις εξισώσεις Euler - Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial \rho} = 0 \quad &\text{ή} \quad m(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2) = 0 \ , \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial \theta} = 0 \quad &\text{ή} \quad \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\theta}) = 0 \ , \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial z} = 0 \quad &\text{ή} \quad m\ddot{z} = 0 \ . \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε το τέχνασμα του Landau για τον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων. Επειδή η κινητική ενέργεια είναι

Το τέχνασμα του Landau για την κινητική ενέργεια σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2}mu^2 \ ,$$

όπου u το μέτρο της ταχύτητας, και ισχύει ότι

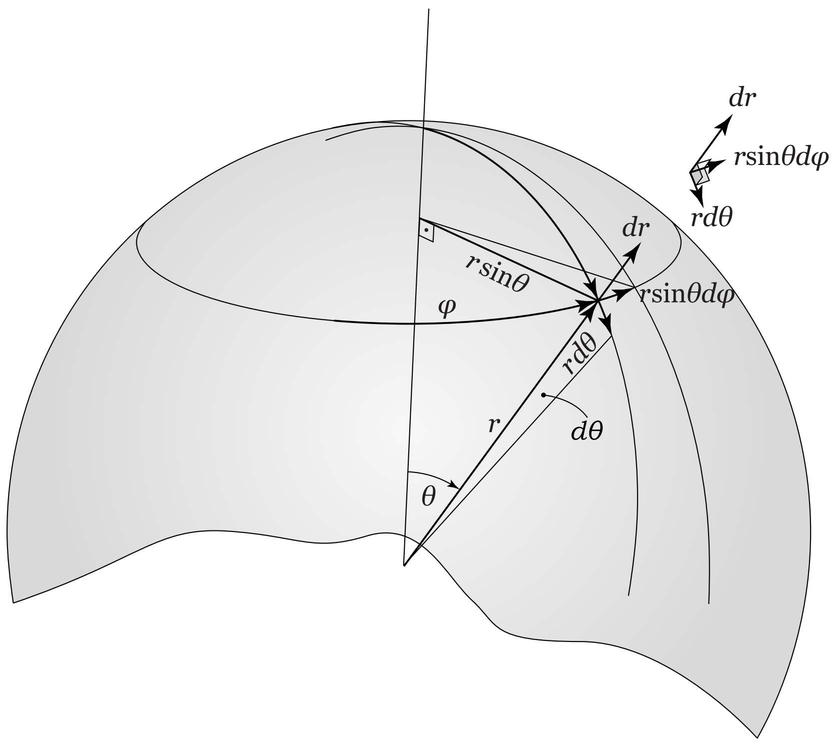
$$u^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{(ds)^2}{(dt)^2} \ ,$$

όπου το ds είναι η διαφορική απόσταση μεταξύ δύο σημείων, για να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων, αρκεί να γράψουμε το τετράγωνο της διαφορικής απόστασης μεταξύ δύο σημείων στο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων. Έτσι, για παράδειγμα, σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων το τετράγωνο της διαφορικής απόστασης μεταξύ των σημείων (x, y, z) και $(x + dx, y + dy, z + dz)$, βάσει του πυθαγορείου θεωρήματος, είναι

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \ .$$

Επομένως, το τετράγωνο της ταχύτητας είναι

$$u^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \ ,$$



Σχήμα 2.4: Οι σφαιρικές συντεταγμένες και η ανάλυση του απειροστού μήκους τρεις κάθετες μεταξύ τους μεταβολές $dr, rd\theta, r\sin\theta d\phi$.

και η κινητική ενέργεια λαμβάνει τη γνώριμη μορφή. Σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς (βλ. Σχήμα 2.4) ότι η διαφορική απόσταση μεταξύ των σημείων (r, θ, ϕ) και $(r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$ είναι

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta(d\phi)^2 \ ,$$

οπότε το τετράγωνο της ταχύτητας είναι

$$u^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\ \dot{\phi}^2 \ .$$

Αφού έχουμε υπολογίσει τη λαγκρανζιανή συνάρτηση σε σφαιρικές συντεταγμένες, είναι εύκολο στη συνέχεια, από τις εξισώσεις Euler - Lagrange, να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης σε σφαιρικές συντεταγμένες. Έτσι, δεν χρειάζεται να απομνημονεύουμε κάθε φορά τον τρόπο με τον οποίο αναλύεται η επιτάχυνση στις διάφορες συντεταγμένες κατά την εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα.

2.5 Η γενίκευση της έννοιας της ορμής και της ενέργειας

Από τα πρώτα στάδια της μαθηματικής μας εκπαίδευσης ερχόμαστε σε επαφή με τη διαδικασία της γενίκευσης. Αρχικά μαθαίνουμε να εκτελούμε πράξεις με φυσικούς αριθμούς, αλλά σύντομα γενικεύουμε την έννοια του αριθμού και αρχίζουμε να χειριζόμαστε τους ακεραίους, τους ρητούς, τους πραγματικούς, τους μιγαδικούς αριθμούς. Ομοίως, αρχικά γνωρίζουμε την έννοια της δύναμης ενός φυσικού αριθμού, αλλά σύντομα τη γενικεύουμε και ορίζουμε συναρτήσεις της μορφής z^w, όπου z και w είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Η ίδια διαδικασία γενίκευσης ακολουθείται και στη φυσική. Ο δυναμικός νόμος του Νεύτωνα

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \ ,$$

όπου $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ είναι η ορμή, με την εφαρμογή της αρχής του Χάμιλτον γενικεύεται, όπως είδαμε, στις εξισώσεις Euler - Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ , \tag{2.20}$$

όπου q_i είναι οι οποιεσδήποτε συντεταγμένες περιγράφουν το μηχανικό σύστημα και $L(q, \dot{q}, t)$ είναι η λαγκρανζιανή συνάρτηση του μηχανικού συστήματος. Ο νέος δυναμικός νόμος (2.20) μετατρέπεται στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, αν περιγράψουμε τη θέση του σωματιδίου με καρτεσιανές συντεταγμένες και ορίσουμε την ορμή p_i που αντιστοιχεί στη συντεταγμένη x_i (με $x_1 = x$, $x_2 = y$ και $x_3 = z$) ως την ποσότητα

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i$$

και την αντίστοιχη συνιστώσα της δύναμης ως

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} \ .$$

Τότε, ο νόμος του Νεύτωνα και οι εξισώσεις Euler - Lagrange είναι ίδιοι

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i \ . \tag{2.21}$$

Σε αντίθεση, όμως, με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η σχέση (2.21) με τις γενικευμένες έννοιες της ορμής και της δύναμης ισχύει σε κάθε σύστημα συντεταγμένων και σε κάθε σύστημα αναφοράς, ακόμη και όταν το σύστημα αναφοράς δεν είναι καρτεσιανό, ή ούτε καν αδρανειακό. Υπό αυτή την έννοια μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια της ορμής και να ορίσουμε για κάθε συντεταγμένη q_i του φυσικού συστήματος την αντίστοιχη σε αυτή γενικευμένη ορμή, η οποία λέγεται και *γενικευμένη ορμή* συζυγής της συντεταγμένης q_i, ως ακολούθως:

Γενικευμένη ορμή και δύναμη

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ .$$

Επίσης, μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \ ,$$

ως τη *γενικευμένη δύναμη* συζυγή της συντεταγμένης q_i . Με αυτό τον τρόπο δεν γενικεύεται μόνο ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, που αποκτά πλέον ισχύ σε κάθε σύστημα συντεταγμένων, αλλά γενικεύονται και τα φυσικά μεγέθη του, δηλαδή η ορμή και η δύναμη.

Ας θεωρήσουμε, ως παράδειγμα, ένα σωματίδιο που κινείται στο χώρο υπό την επίδραση ενός γενικού δυναμικού $V(x, y, z)$. Η τρίτη συνιστώσα της στροφορμής του σωματιδίου, δηλαδή, η z-συνιστώσα αυτής, μετρημένη ως προς την αρχή των αξόνων ορίζεται ως

$$L_z = m\left(\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}\right)_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \ , \tag{2.22}$$

ενώ η τρίτη συνιστώσα της ροπής που ασκείται στο σωματίδιο είναι

$$\tau_z = (\mathbf{x} \times \mathbf{F})_z = -\left(\mathbf{x} \times \boldsymbol{\nabla} V\right)_z = -\left(x\frac{\partial V}{\partial y} - y\frac{\partial V}{\partial x}\right) \ , \tag{2.23}$$

αφού η δύναμη είναι $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$. Αν περιγράψουμε τη θέση του σωματιδίου σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες (r, θ, z), τότε είναι

$$x = r\cos\theta\,, \tag{2.24}$$
$$y = r\sin\theta\,. \tag{2.25}$$

Υπολογίζοντας στη συνέχεια τις $\dot{x}$ και $\dot{y}$, συμπεραίνουμε ότι η τρίτη συνιστώσα της στροφορμής σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες λαμβάνει την απλή μορφή

$$L_z = mr^2\dot{\theta}\,. \tag{2.26}$$

Ομοίως, επειδή

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \theta} &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= r\left(-\sin\theta\frac{\partial V}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial V}{\partial y}\right) \\
&= x\frac{\partial V}{\partial y} - y\frac{\partial V}{\partial x}\,,
\end{aligned}$$

η ροπή τ_z λαμβάνει τη μορφή

$$\tau_z = -\frac{\partial V}{\partial \theta}\,. \tag{2.27}$$

Παράλληλα, σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες η λαγκρανζιανή συνάρτηση ενός σωματιδίου είναι

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - V$$

ενώ η γενικευμένη ορμή, συζυγής της συντεταγμένης θ,

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}\,, \tag{2.28}$$

δεν είναι άλλη από την τρίτη συνιστώσα της στροφορμής (2.22). Η δε γενικευμένη δύναμη

$$F_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}\,, \tag{2.29}$$

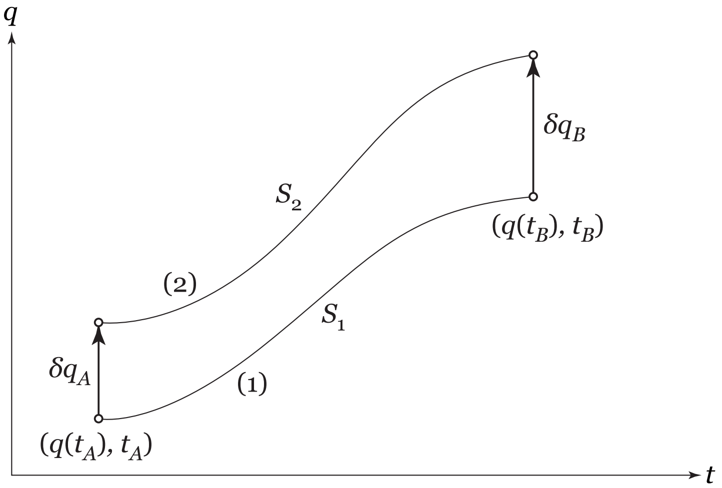
είναι η τρίτη συνιστώσα της ροπής και η εξίσωση, Euler - Lagrange όσον αφορά στη θ συντεταγμένη

$$\frac{dp_\theta}{dt} = F_\theta\,,$$

είναι η γνωστή εξίσωση μεταβολής της στροφορμής του σωματιδίου. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ο δυναμικός νόμος που συσχετίζει τις γενικευμένες ορμές με τις γενικευμένες δυνάμεις περιλαμβάνει άμεσα και δυναμικούς νόμους, οι οποίοι προκύπτουν ως έμμεση συνέπεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα.

Διεύρυνση της ισχύος της αρχής διατήρησης της ορμής

Η γενίκευση της έννοιας της ορμής έχει ιδιαίτερη σημασία. Γνωρίζουμε ότι οι αλληλεπιδράσεις που ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα οδηγούν στη διατήρηση της συνολικής ορμής ενός απομονωμένου συστήματος. Η διατήρηση της ορμής, όμως, είναι βαθύτερη αρχή και αποτελεί απόρροια της ομογένειας του χώρου, όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο. Η αρχή αυτή ισχύει ακόμη και σε φυσικά συστήματα για τα οποία δεν ισχύει ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα, όπως για παράδειγμα η αλληλεπίδραση δύο φορτισμένων



Σχήμα 2.5: Δύο φυσικές διαδρομές με ελαφρώς μετατοπισμένα άκρα, οι οποίες αντιστοιχούν σε δράσεις S_1, S_2. Εάν οι δράσεις είναι ίδιες για κάποιον μετασχηματισμό των συντεταγμένων, ανεξαρτήτως της επιλογής της αρχικής και της τελικής χρονικής στιγμής, τότε διατηρείται σταθερό το γινόμενο της ορμής επί το μετασχηματισμό των συντεταγμένων.

σωματιδίων, τα οποία κινούνται σε μη παράλληλες κατευθύνσεις. Η διατηρούμενη, όπως θα δούμε, ποσότητα είναι η γενικευμένη και όχι η νευτώνεια ορμή του συστήματος.

Την έννοια της ορμής μπορούμε, ωστόσο, να τη γενικεύσουμε ακολουθώντας διαφορετικό δρόμο και συγκεκριμένα μελετώντας τις μεταβολές της δράσης που αντιστοιχούν σε φυσικές τροχιές. Επειδή η φυσική τροχιά $q_\phi(t)$ που συνδέει τα σημεία (t_A, q_A) και (t_B, q_B) είναι δεδομένη, η δράση που αντιστοιχεί σε αυτή την τροχιά

$$S(q_A, t_A, q_B, t_B) = \int_{t_A}^{t_B} L(q_\phi, \dot{q}_\phi, t)dt \ ,$$

δεν είναι πλέον ένα συναρτησοειδές αλλά μια συνάρτηση η οποία έχει εξάρτηση μόνο από τις αρχικές και τελικές θέσεις και χρόνους του συστήματος, διότι η τροχιά προσδιορίζεται πλήρως αν δοθούν οι αρχικές και τελικές θέσεις και συνεπώς είναι μια συνάρτηση της μορφής $q_\phi(t\,; t_A, q_A, t_B, q_B)$[5]. Όμοια, και η ολοκληρωτέα συνάρτηση L, υπολογισμένη επί της φυσικής τροχιάς, γίνεται μια συνάρτηση $L(t\,; t_A, q_A, t_B, q_B)$ έχοντας τις ίδιες εξαρτήσεις με την q_ϕ, όπως επίσης και κάθε ορισμένο ολοκλήρωμα ως προς τον χρόνο εξαρτάται μόνο από το αρχικό και τελικό όριο του ολοκληρώματος.

Θεωρούμε τώρα μία φυσική τροχιά $q_\phi(t)$ με αφετηρία στο χρόνο t_A τη θέση $q_\phi(t_A)$ και τελικό σημείο στο χρόνο t_B τη θέση $q_\phi(t_B)$ και μία παραπλήσια φυσική τροχιά με αντίστοιχο αρχικό και τελικό σημείο στους ίδιους πάλι χρόνους $q_\phi(t_A) + \delta q(t_A)$ και $q_\phi(t_B) + \delta q(t_B)$ (βλ. Σχήμα 2.5). Η παραπλήσια στην (1) φυσική τροχιά (2) μπορεί να γραφεί ως

$$q'_\phi(t) = q_\phi(t) + \epsilon\xi(t) \ ,$$

όπου ϵ είναι ένας αρκούντως μικρός αριθμός, τέτοιος ώστε

$$\epsilon\xi(t_A) = \delta q(t_A) \ , \ \epsilon\xi(t_B) = \delta q(t_B) \ .$$

Υπολογίζουμε, τώρα, τη μεταβολή της συνάρτησης-δράσης σε πρώτη τάξη

[5] Το διαχωριστικό σύμβολο ; χρησιμοποιήθηκε απλώς για να ξεχωρίσει τη μεταβλητή t, από τις παραμέτρους t_A, q_A, t_B, q_B που προσδιορίζουν τη συγκεκριμένη φυσική διαδρομή.

ως προς ϵ. Εφαρμόζοντας την αθροιστική σύμβαση, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} S([q'_\phi]) - S([q_\phi]) &= \int_{t_A}^{t_B} \Big(L(q_\phi + \epsilon\xi, \dot{q}_\phi + \epsilon\dot{\xi}, t) - L(q_\phi, \dot{q}_\phi, t) \Big)\, dt \\ &= \epsilon \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\xi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\xi}_i \right) dt \\ &= \epsilon\xi_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bigg|_{t_A}^{t_B} + \epsilon \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \xi_i dt \;, \end{aligned} \tag{2.30}$$

όπου όλες οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται επί της φυσικής τροχιάς $q_\phi(t)$.

Τα βήματα που μας οδήγησαν στις παραπάνω σχέσεις είναι τα ίδια με εκείνα που ακολουθήσαμε για να προσδιορίσουμε τη συνθήκη που ικανοποιείται από την τροχιά, η οποία καθιστά τη δράση ακρότατη. Υπάρχει όμως μια βασική διαφορά. Στον παραπάνω υπολογισμό οι συναρτήσεις $\xi_i(t)$ δεν είναι τυχαίες, διότι παριστάνουν τη διαφορά μεταξύ των δύο γειτονικών φυσικών τροχιών του συστήματος. Επιπλέον, επειδή η $q_\phi(t)$ είναι φυσική τροχιά, κάθε συνιστώσα της $q_\phi(t)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler - Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \;.$$

Από τη στιγμή, λοιπόν, που συγκρίνουμε τη δράση δύο φυσικών τροχιών, εφαρμόζοντας και πάλι την αθροιστική σύμβαση, βρίσκουμε ότι η διαφορά των δράσεων (2.30) είναι

$$\delta S = p_i(t_B)\, \delta q_i(t_B) - p_i(t_A)\, \delta q_i(t_A) \;, \tag{2.31}$$

όπου

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \;,$$

είναι η γενικευμένη ορμή, ενώ $\delta q_i(t_A) = \epsilon\xi_i(t_A)$ και $\delta q_i(t_B) = \epsilon\xi_i(t_B)$ είναι η απόσταση μεταξύ των αρχικών και των τελικών θέσεων των δύο φυσικών διαδρομών. Επειδή, όμως, και ο τελικός χρόνος και οι τελικές θέσεις του συστήματος έχουν ληφθεί αυθαίρετα, η γενικευμένη ορμή μπορεί να ορισθεί βάσει της σχέσης (2.31) και ως

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}\bigg|_t \;, \tag{2.32}$$

όπου S είναι η δράση που αντιστοιχεί στη φυσική τροχιά του συστήματος που συνδέει κάποιο τυχαίο αρχικό σημείο με το σημείο $(q_1, q_2, \ldots)$ τη χρονική στιγμή t. Στη μερική παραγώγιση η τιμή του χρόνου t διατηρείται σταθερή, όπως επίσης και η αρχική θέση και ο αρχικός χρόνος της τροχιάς του σωματιδίου, τα οποία υπεισέρχονται στη συνάρτηση-δράση.

Μολονότι, στην πράξη ο προσδιορισμός της ορμής με αυτό τον τρόπο είναι επίπονος, αφού απαιτείται να προσδιοριστεί πρώτα η φυσική τροχιά του συστήματος και στη συνέχεια η συνάρτηση-δράση, η γενίκευση του ορισμού της ορμής μέσω της σχέσης (2.32) καταδεικνύει ότι η ορμή του συστήματος προκύπτει από τη δράση με χωρική μετάθεση της τελικής θέσης του συστήματος. Ο ορισμός αυτός μάς οδηγεί, όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, σε βαθύτερη κατανόηση του νόμου διατήρησης της ορμής και θα χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της ορμής πιο αφηρημένων φυσικών οντοτήτων, όπως για παράδειγμα των πεδίων ή των κυμάτων.[6] Στο σημείο αυτό πάντως μπορούμε να πάρουμε μια πρώτη γεύση της συσχέτισης μεταξύ της διατήρησης της ορμής και της αναλλοιότητας της δράσης σε κάποιους μετασχηματισμούς. Έστω ότι ανακαλύπτουμε, για παράδειγμα, ότι, αν τα ακραία σημεία μιας φυσικής τροχιάς μετατεθούν κατά

$$\delta q_i^{(A)} = K_i(q(t_A), t_A) \ , \ \delta q_i^{(B)} = K_i(q(t_B), t_B) \ ,$$

όπου τα $K_i(q,t)$ είναι κάποιες συγκεκριμένες συναρτήσεις, τότε η δράση που αντιστοιχεί στη νέα φυσική τροχιά που συνδέει τα δύο νέα ακραία σημεία είναι ίση με την αρχική δράση (βλ. Σχήμα 2.5). Αν συμβαίνει κάτι τέτοιο, η μηδενική διαφορά της δράσης μεταξύ των δύο φυσικών τροχιών, οι οποίες έχουν μετακινηθεί η μία σε σχέση με την άλλη κατά $K_i(q(t),t)$, θα σημαίνει, σύμφωνα με τη σχέση (2.31), ότι

$$p_i(t_B)\delta q_i^{(B)} = p_i(t_A)\delta q_i^{(A)} \ ,$$

δηλαδή

$$p_i(t_B)K_i(q(t_B), t_B) = p_i(t_A) \ K_i(q(t_A), t_A) \ .$$

Επειδή, όμως, οι χρόνοι t_A και t_B είναι αυθαίρετοι, το γινόμενο των γενικευμένων ορμών p_i επί τις μετατοπίσεις K_i θα διατηρείται κατά την κίνηση, δηλαδή θα είναι

$$\frac{d}{dt}\sum_i p_i K_i(q,t) = 0 \ .$$

Οι μεταθέσεις K_i που δεν αλλοιώνουν τη δράση αποτελούν *συμμετρίες* του συστήματος και θα αναλυθούν διεξοδικά στο Κεφάλαιο 5.

Ως παράδειγμα τέτοιας συμμετρίας ας θεωρήσουμε τη δράση που προκύπτει από τη φυσική κίνηση ενός ελεύθερου σωματιδίου σε μία διάσταση που μεταβαίνει από το (t_1, x_1) στο (t_2, x_2):

$$S(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{m}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} \ .$$

Είναι προφανές ότι κάθε μετάθεση της τροχιάς $x' = x + \delta x$ κατά μια σταθερή απόσταση δx δεν μεταβάλλει τη δράση (είναι συμμετρία το ελεύθερου σωματιδίου). Συνεπώς, η ορμή του σωματιδίου

$$p(t_2) = \frac{\partial S}{\partial x_2} \ ,$$

όπου t_2 οποιαδήποτε τελική τιμή του χρόνου, διατηρείται.

Στη συνέχεια, θα γενικεύσουμε την έννοια της ενέργειας. Θα δείξουμε κατ' αρχάς ότι, όταν η Λαγκρανζιανή δεν έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο και είναι μόνο συνάρτηση των θέσεων και των γενικευμένων ταχυτήτων, δηλαδή είναι της μορφής $L(q,\dot{q})$, διατηρείται κατά τη φυσική κίνηση η ποσότητα

$$E = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L(q, \dot{q}) \ . \tag{2.33}$$

[6] Ίσως αναρωτηθείτε ποιο φυσικό μέγεθος προσδιορίζει κατ' αναλογία η $\partial S/\partial t$, όπου και πάλι η S είναι η συνάρτηση-δράση που αντιστοιχεί σε μια φυσική τροχιά που συνδέει κάποιο αρχικό σημείο με το σημείο $(q_1, q_2, \ldots)$ στον χρόνο t. Θα δείξουμε σε επόμενο κεφάλαιο ότι $E = -\left.\partial S/\partial t\right|_{\mathbf{q}}$, όπου E είναι η γενικευμένη ενέργεια του συστήματος. Μια ειδική περίπτωση της σχέσης αυτής, μεταξύ δράσης και ενέργειας συναντήσαμε στο Πρόβλημα 5 του Κεφαλαίου 1.

Η ποσότητα αυτή ονομάζεται *ολοκλήρωμα του Jacobi* και αποτελεί τη γενίκευση της έννοιας της ενέργειας. Όταν, λοιπόν, η Λαγκρανζιανή δεν έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο, η γενικευμένη ενέργεια (2.33) διατηρείται κατά τη φυσική κίνηση.

Απόδειξη: Υπολογίζουμε τη χρονική μεταβολή της ποσότητας E όταν τα q εξελίσσονται σύμφωνα με τις εξισώσεις Euler - Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} .$$

Πράγματι, η ποσότητα E διατηρείται (είναι, όπως λέγεται, ολοκλήρωμα της κίνησης) διότι

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \cancel{\ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} + \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i} \\ &= \dot{q}_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right] = 0 . \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι για ένα σωματίδιο που κινείται υπό την επίδραση ενός δυναμικού $V(x, y, z)$ η γενικευμένη ενέργεια δίνει τη γνωστή έκφραση της ενέργειας. Σε αυτή την περίπτωση η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(x, y, z) .$$

Επειδή η λαγκρανζιανή συνάρτηση δεν έχει άμεση χρονική εξάρτηση, διατηρείται κατά την κίνηση η ποσότητα της έκφρασης (2.33)

$$\begin{aligned} E &= \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + V(x, y, z) , \end{aligned}$$

η οποία δεν είναι άλλη από τη γνωστή μας έκφραση για την ενέργεια του σωματιδίου. Θα πρέπει να τονίζουμε ότι η διατηρούμενη ποσότητα της έκφρασης (2.33) δεν συνέπεσε με την ενέργεια (άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας) επειδή χρησιμοποιήσαμε καρτεσιανές συντεταγμένες. Όποιες συντεταγμένες και να χρησιμοποιούσαμε θα καταλήγαμε στην έκφραση της ενέργειας.

2.6 Κίνηση ελεύθερου σωματιδίου σε ένα γενικευμένο χώρο

Είδαμε ότι ένα ελεύθερο σωματίδιο στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, δηλαδή οι τροχιές του είναι ευθείες και κινείται πάνω σε αυτές με σταθερή ταχύτητα. Στον χώρο αυτό όμως οι ευθείες είναι εκείνες οι καμπύλες οι οποίες καθιστούν το μήκος που συνδέει δύο σημεία ακρότατο. Γενικότερα οι καμπύλες οι οποίες καθιστούν το μήκος σε ένα γενικευμένο χώρο ακρότατο ονομάζονται *γεωδαισιακές καμπύλες*. Συνεπώς μπορούμε να διατυπώσουμε την πρόταση ότι στον ευκλείδειο χώρο ένα ελεύθερο σωματίδιο κινείται επί των γεωδαισιακών του χώρου με σταθερή ταχύτητα. Η πρόταση αυτή, που βασίζεται στο νόμο της αδρανείας του Γαλιλαίου, έχει γενική ισχύ: σε ένα γενικό χώρο ένα ελεύθερο σωματίδιο εκτελεί ομαλή κίνηση επί των γεωδαισιακών του χώρου. Για παράδειγμα, εάν ο χώρος είναι η επιφάνεια μίας σφαίρας ένα ελεύθερο σωματίδιο θα κινείται με σταθερή ταχύτητα επί των μεγίστων κύκλων της σφαίρας, που δεν είναι άλλο από τις γεωδαισιακές καμπύλες της σφαίρας.

Ένας γενικός χώρος χαρακτηρίζεται από τη μετρική g_{ij} που προσδιορίζει ότι η απειροστή απόσταση σημείων του χώρου είναι:

$$ds^2 = g_{ij}(\mathbf{q})\, dq_i\, dq_j \ ,$$

όπου q_i είναι οι συντεταγμένες που παραμετροποιούν το χώρο. Η μετρική του χώρου $g_{ij}(\mathbf{q})$ εξαρτάται γενικά από τις συντεταγμένες και θεωρείται εκ κατασκευής συμμετρική, δηλαδή

$$g_{ij}(\mathbf{q}) = g_{ji}(\mathbf{q}) \ , \tag{2.34}$$

αφού για παράδειγμα το ζεύγος $dq_1 dq_2$ στην παραπάνω έκφραση για την στοιχειώδη απόσταση ds πολλαπλασιάζεται με τις συνιστώσες της μετρικής g_{12} αλλά και g_{21}, οπότε, αν δεν ήταν ίσα, δεν θα άλλαζε κάτι στην στοιχειώδη απόσταση, αν θεωρούσαμε ότι τα g_{12} και g_{21} είναι ίσα με τον μέσο όρο τους, $(g_{12} + g_{21})/2$. Παραδείγματος χάριν, ο ευκλείδειος τρισδιάστατος χώρος, περιγραφόμενος με καρτεσιανές συντεταγμένες, $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$ έχει ως μετρική τον μοναδιαίο πίνακα $g_{ij} = \delta_{ij}$ και διαφορικό μήκος:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \ .$$

Ενώ αν ο χώρος είναι η δισδιάστατη επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας a, τότε αν παραμετροποιήσουμε τα σημεία της επιφάνειας αυτής με την πολική γωνία $q_1 = \theta$ και την αζιμουθιακή γωνία $q_2 = \phi$, η διαφορική απόσταση μεταξύ σημείων της επιφανείας είναι

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \ ,$$

και η μετρική έχει στοιχεία $g_{11} = a^2$, $g_{21} = a_{12} = 0$, $g_{22} = a^2 \sin^2\theta$.

Η Λαγκρανζιανή ενός σωματιδίου που κινείται ελεύθερα σε ένα γενικευμένο χώρο δίνεται από την κινητική ενέργεια του σωματιδίου και είναι:

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2} g_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}_i\dot{q}_j \ . \tag{2.35}$$

Επειδή η Λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται από το χρόνο, θα διατηρείται η ενέργεια του σωματιδίου (βλ. εδάφιο 2.5) η οποία είναι ίση με την Λαγκρανζιανή. Συνεπώς το σωματίδιο θα κινείται με σταθερή ταχύτητα ds/dt. Αλλά ποιά θα είναι η τροχιά του;

Θα απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό βασιζόμενοι στην εξής παρατήρηση: η τροχιά που καθιστά τη δράση στάσιμη με την Λαγκρανζιανή L (2.35) καθιστά στάσιμη και τη δράση με Λαγκρανζιανή μια δύναμη της L, την L^r όπου r οποιοσδήποτε πραγμαικός αριθμός.

Απόδειξη: Επειδή η Λαγκρανζιανή L^r είναι χρονοανεξάρτητη, η φυσική κίνηση διατηρεί την αντίστοιχη ενέργεια η οποία είναι

$$\begin{aligned} E_r &= \dot{q}_i p_i - L^r \\ &= \dot{q}_i r L^{r-1} m g_{i\beta}(\mathbf{q}) \dot{q}_\beta - L^r \\ &= (2r-1) L^r \ , \end{aligned}$$

δεδομένου ότι η γενικευμένη ορμή της Λαγκρανζιανής L^r είναι:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L^r}{\partial \dot{q}_i} \\ &= r L^{r-1} \frac{\partial (m g_{\alpha\beta}(\mathbf{q}) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta / 2)}{\partial \dot{q}_i} \\ &= r L^{r-1} m (g_{i\beta}(\mathbf{q}) \dot{q}_\beta + g_{ai}(\mathbf{q}) \dot{q}_a)/2 \\ &= r L^{r-1} m g_{i\beta}(\mathbf{q}) \dot{q}_\beta \ . \end{aligned}$$

Έτσι η διατήρηση της ενέργειας συνεπάγεται τη διατήρηση της L^r κατά την κίνηση. Δηλαδή επί της φυσικής τροχιάς ισχύει ότι:

$$\frac{dL^r}{dt} = 0 \ .$$

Λόγω αυτής της διατήρησης, η φυσική κίνηση που ικανοποιεί τις εξισωσεις Euler - Lagrange με Λαγκρανζιανή L^r ικανοποιεί και τις Euler - Lagrange με Λαγκρανζιανή L. Διότι είναι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^r}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L^r}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt}\left[r L^{r-1} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] - r L^{r-1} \frac{\partial L}{\partial q_i} \\ &= r L^{r-1} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right) \ , \end{aligned}$$

εκμεταλλευόμενοι την $dL^r/dt = 0$. Συνεπώς αν η $\mathbf{q}(t)$ ικανοποιεί την

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^r}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L^r}{\partial q_i} = 0 \ ,$$

θα ικανοποιεί και την

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ .$$

Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο.

Συνεπώς η τροχιά που καθιστά τη δράση

$$\int_{t_\mathbf{a}}^{t_\mathbf{b}} \frac{m}{2} g_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) \, dt \ ,$$

που συνδέει το χωροχρονικό σημείο $(t_\mathbf{a}, \mathbf{a})$ με το $(t_\mathbf{b}, \mathbf{b})$ καθιστά και τη δράση

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{t_\mathbf{a}}^{t_\mathbf{b}} \sqrt{g_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t)} \, dt \ ,$$

στάσιμη. Αλλά το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι το μήκος της καμπύλης $\int_\mathbf{a}^\mathbf{b} ds$ που ενώνει τα δύο σημεία (στην περίπτωση αυτή, ο χρόνος t παραμετροποιεί την καμπύλη) και συνεπώς το ακρότατο της δράσης αυτής επιτυγχάνεται από τη γεωδαισιακή του χώρου. Δείξαμε έτσι ότι ελεύθερα σωματίδια σε όλους τους χώρους κινούνται με σταθερή ταχύτητα επί των γεωδαισιακών του χώρου.

Η εύρεση της γεωδαισιακής καμπύλης θα προκύψει από τη λύση των εξισώσεων Euler - Lagrange που θα προέλθουν από τη Λαγκρανζιανή (2.35):

$$\begin{aligned} \frac{d(g_{aj}(\mathbf{q})\dot{q}_j)}{dt} - \frac{\partial g_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_a}\dot{q}_i\dot{q}_j &= 0 \\ g_{aj}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + \left(\frac{\partial g_{aj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} - \frac{\partial g_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_a}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Στις παραπάνω εκφράσεις χρησιμοποιήθηκε η συμμετρικότητα της μετρικής g_{ij}, όταν υπολογίσαμε την $\partial L/\partial \dot{q}_a$.

2.7 Η δεύτερης τάξης μεταβολή της δράσης

Έως αυτό το σημείο της μελέτης μας έχουμε προσδιορίσει τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται για να καθίσταται η δράση στάσιμη. Δεν έχουμε προσδιορίσει, όμως, αν η φυσική διαδρομή καθιστά τη δράση ελάχιστη, μέγιστη ή τίποτε από τα δύο. Για να απαντήσουμε σε τούτο το ερώτημα, πρέπει να θεωρήσουμε τη μεταβολή της δράσης σε προσέγγιση δεύτερης τάξης ως προς τη μεταβολή, όπως για παράδειγμα, αν θέλουμε να μάθουμε το είδος του ακροτάτου μιας συνάρτησης, πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης στη θέση του ακροτάτου. Εάν q είναι η φυσική τροχιά που ικανοποιεί την εξίσωση Euler - Lagrange, τότε η μεταβολή της δράσης δS που αντιστοιχεί σε μεταβολή της τροχιάς $\epsilon\eta(t)$ θα είναι

Ανάπτυξη της δράσης σε δεύτερη τάξη ως προς την παρέκκλιση

$$\delta S = \frac{\epsilon^2}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(L_{\dot{q}\dot{q}}\dot{\eta}^2 + 2L_{\dot{q}q}\eta\dot{\eta} + L_{qq}\eta^2\right)dt + \mathcal{O}(\epsilon^3)\,. \tag{2.37}$$

Η μεταβολή της διαδρομής που έχουμε θεωρήσει είναι και πάλι τέτοια ώστε να αφήνει τις αρχικές και τελικές θέσεις αμετάβλητες ($\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$). Στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήσαμε τον ακόλουθο συμβολισμό για τις παραγώγους της Λαγκρανζιανής

$$L_{\dot{q}\dot{q}} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\,,\ L_{\dot{q}q} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial q}\,,\ L_{qq} = \frac{\partial^2 L}{\partial q^2}\,.$$

Η σχέση (2.37) προκύπτει από το ανάπτυγμα Taylor της Λαγκρανζιανής $L(q+\epsilon\eta, \dot{q}+\epsilon\dot{\eta}, t)$ σε δεύτερη τάξη ως προς ϵ. Ο όρος πρώτης τάξης είναι φυσικά μηδέν, αφού υποθέσαμε ότι η q είναι η φυσική τροχιά. Με μια ολοκλήρωση κατά μέρη του μικτού όρου $\eta\dot{\eta}$ συμπεραίνουμε ότι η μεταβολή της δράσης μπορεί να γραφεί γενικά ως

$$\delta S = \frac{\epsilon^2}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(P\dot{\eta}^2 - Q\eta^2\right)dt + \mathcal{O}(\epsilon^3)\,, \tag{2.38}$$

όπου οι συναρτήσεις $P(t)$ και $Q(t)$ έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$P(t) = L_{\dot{q}\dot{q}}\,,\ Q(t) = -L_{qq} + \frac{d}{dt}L_{\dot{q}q}\,. \tag{2.39}$$

Οι συναρτήσεις $P(t)$ και $Q(t)$ είναι αμιγώς χρονικές συναρτήσεις, διότι έχουν υπολογιστεί στη φυσική τροχιά $q(t)$ που ικανοποιεί την εξίσωση Euler - Lagrange.

Άσκηση 2.3 *Αποδείξτε ότι πράγματι η δεύτερη μεταβολή της δράσης δίνεται από την (2.38) μέσω των συναρτήσεων $P(t)$ και $Q(t)$ της (2.39).*

Απάντηση: *Η δεύτερης τάξης μεταβολή είναι διαδοχικά*

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} \left(L_{\dot q\dot q}\dot\eta^2 + 2L_{\dot q q}\eta\dot\eta + L_{qq}\eta^2\right) dt \\
=&\int_{t_1}^{t_2} \left(P\dot\eta^2 + L_{\dot q q}\frac{d\eta^2}{dt} + L_{qq}\eta^2\right) dt \\
=&\int_{t_1}^{t_2} \left(P\dot\eta^2 + \cancel{\frac{d(L_{\dot q q}\eta^2)}{dt}} - \frac{dL_{\dot q q}}{dt}\eta^2 + L_{qq}\eta^2\right) dt \\
=&\int_{t_1}^{t_2} \left(P\dot\eta^2 - Q\eta^2\right) dt \ ,
\end{aligned}$$

δεδομένου ότι $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$.

Άσκηση 2.4 *Προσδιορίστε τις συναρτήσεις $P(t)$ και $Q(t)$ για τη Λαγκρανζιανή σωματιδίου σε μονοδιάστατο δυναμικό $L = m\dot q^2/2 - V(q)$.*

Απάντηση: *Είναι $P = m$ και $Q = V''(q) \equiv d^2V/dq^2$. Η δεύτερης τάξης μεταβολή της δράσης, λοιπόν, προσδιορίζεται από το πρόσημο του ολοκληρώματος $\int_{t_1}^{t_2}(m\dot\eta^2 - V''(q)\eta^2)dt$, όπου η $V''(q)$ υπολογίζεται επί της φυσικής τροχιάς και οι μεταβολές $\eta(t)$ μηδενίζονται στον αρχικό και τελικό χρόνο: $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$.*

Είμαστε, τώρα πια, σε θέση να προσδιορίσουμε το είδος του ακροτάτου της δράσης. Η φυσική τροχιά οδηγεί τη δράση σε τοπικό ελάχιστο, αν για όλες τις επιτρεπτές μεταβολές η που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ ισχύει

Το κριτήριο για να είναι η φυσική τροχιά τοπικό ελάχιστο

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(P\dot\eta^2 - Q\eta^2\right) dt > 0 \ . \tag{2.40}$$

Αν το ολοκλήρωμα αυτό είναι πάντοτε αρνητικό, τότε η φυσική τροχιά καθιστά τη δράση μέγιστη, ενώ, αν το πρόσημο του ολοκληρώματος εξαρτάται από την επιλογή της συνάρτησης η, η φυσική τροχιά αποτελεί σαγματική συνάρτηση, δηλαδή για άλλου τύπου παρεκκλίσεις από τη φυσική τροχιά η δράση μεγαλώνει, ενώ για άλλες μικραίνει.

Για αρκούντως μικρό χρονικό διάστημα, το ολοκλήρωμα είναι αρνητικό, αν $P > 0$

Το κατά πόσο, λοιπόν, η φυσική τροχιά καθιστά ελάχιστη τη δράση σχετίζεται άμεσα με το πρόσημο του ολοκληρώματος (2.40). Η εξέταση του προσήμου είναι γενικά μια δύσκολη υπόθεση· το πρόσημο, όπως θα δούμε στη συνέχεια, εξαρτάται καθοριστικά από το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$. Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή [1873-1950] απέδειξε ότι, για αρκούντως μικρά χρονικά διαστήματα, η δράση είναι πάντα ελάχιστη αν $P > 0$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο, διότι επειδή η συνάρτηση η οφείλει να είναι μηδέν στα άκρα του χρονικού διαστήματος, η $\dot\eta^2$ γίνεται ολοένα και μεγαλύτερη από την η^2 όσο το χρονικό διάστημα Δt μικραίνει, οπότε ο πρώτος όρος της ολοκληρωτέας ποσότητας στη σχέση (2.40) για αρκούντως μικρό Δt θα υπερισχύσει του δεύτερου όρου και το ολοκλήρωμα θα είναι θετικό. Η συνθήκη $P > 0$ είναι αναμενόμενο να ισχύει, αφού για φυσικά προβλήματα η συνάρτηση P, όντας η γενικευμένη μάζα, είναι πάντοτε θετική.

Το θεώρημα Καραθεοδωρή μπορεί να αποδειχθεί κάνοντας χρήση της κομψής ανισότητας του Jules Henri Poincaré [1854-1912]

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\eta}^2 dt \geq \frac{\pi^2}{(t_2-t_1)^2} \int_{t_1}^{t_2} \eta^2 dt \,, \tag{2.41}$$

η οποία συνδέει τις τιμές της παραγώγου μιας συνάρτησης που μηδενίζεται στα άκρα ενός διαστήματος με τις τιμές της ίδιας της συνάρτησης στο διάστημα αυτό. Η ανισότητα αυτή έχει ρίζες στη Φυσική και είναι πολύ χρήσιμη, την αποδεικνύουμε με τη μέθοδο του πηλίκου Rayleigh στο Μαθηματικό Παράρτημα.

Στο Μαθηματικό Παράρτημα του βιβλίου παρουσιάζεται, επίσης, ο τρόπος προσδιορισμού των συνθηκών που καθιστούν τη δράση ελάχιστη. Εδώ εμείς θα αρκεστούμε να αναφέρουμε ότι η αναγκαία συνθήκη για να είναι η φυσική τροχιά ελάχιστη είναι $P(t) > 0$ σε κάθε σημείο του διαστήματος $[t_1, t_2]$. Διότι, αν η $P(t)$ λάμβανε αρνητικές τιμές σε κάποια περιοχή $D = [t_1', t_2']$, θα αρκούσε η συνάρτηση $\eta(t)$ να είναι μη μηδενική σε ένα μικρό μόνο διάστημα $D_1 \subset D$ της περιοχής αυτής, πλάτους δt, για να καταστεί η δεύτερη μεταβολή της δράσης αρνητική. Επιλέγοντας το δt αρκούντως μικρό, μπορούμε να καταστήσουμε, βάσει της ανισότητας του Poincaré, τον πρώτο όρο της (2.38) κυρίαρχο και μάλιστα αρνητικό. Η αναγκαία συνθήκη $P(t) > 0$ για να είναι η τροχιά ελάχιστη ονομάζεται *συνθήκη Legendre* και ικανοποιείται πάντοτε στα μηχανικά προβλήματα, αφού η συνάρτηση P είναι η γενικευμένη μάζα που εισέρχεται στην έκφραση της κινητικής ενέργειας, η οποία με τη σειρά της είναι πάντοτε θετική ποσότητα. Ωστόσο, η συνθήκη αυτή δεν είναι ικανή να καταστήσει τη φυσική τροχιά σε κάθε περίπτωση (για οποιαδήποτε χρονική έκταση) ελάχιστο της δράσης. Τούτο θα φανεί στο παράδειγμα του αρμονικού ταλαντωτή που θα αναλύσουμε στη συνέχεια, προκειμένου να δείξουμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζει κανείς στην προσπάθειά του να προσδιορίσει το πρόσημο της ποσότητας (2.40).

$P(t) > 0$: αναγκαία, αλλά όχι ικανή συνθήκη για να είναι η δράση ελάχιστη

Ο αρμονικός ταλαντωτής σε μια διάσταση διέπεται από τη Λαγκρανζιανή

Ο αρμονικός ταλαντωτής ως παράδειγμα εξέτασης του προσήμου της δεύτερης μεταβολής της δράσης

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) \,.$$

Ας θεωρήσουμε τη φυσική τροχιά του ταλαντωτή από το $t_1 = 0$ στο $t_2 = T$. Το είδος του ακροτάτου της δράσης κρίνεται από το πρόσημο της (2.40), η οποία, στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή είναι (αν αγνοήσουμε τη θετική σταθερά m)

$$\int_0^T \left(\dot{\eta}^2 - \omega^2 \eta^2\right) dt \,. \tag{2.42}$$

Από την ανισότητα Poincaré παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος της (2.42) ικανοποιεί την ανισότητα

$$\int_0^T \dot{\eta}^2 dt \geq \frac{\pi^2}{T^2} \int_0^T \eta^2 dt \,,$$

και συνεπώς ισχύει ότι

$$\int_0^T \left(\dot{\eta}^2 - \omega^2 \eta^2\right) dt \geq \left(\frac{\pi^2}{T^2} - \omega^2\right) \int_0^T \eta^2 dt \,.$$

Επειδή το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι μια θετική ποσότητα, η δεύτερη μεταβολή της δράσης θα είναι πάντοτε θετική εφόσον

$$T < \frac{\pi}{\omega} \,.$$

Αυτό σημαίνει ότι, όταν το χρονικό διάστημα T στο οποίο πραγματοποιείται η κίνηση είναι μικρότερο από μία ημιπερίοδο, η φυσική τροχιά ελαχιστοποιεί τη δράση. Τι συμβαίνει, όμως, όταν το διάστημα T είναι μεγαλύτερο από μία ημιπερίοδο; Θα δείξουμε αμέσως παρακάτω ότι σε αυτή την περίπτωση η φυσική τροχιά δεν ελαχιστοποιεί τη δράση. Αρκεί να βρούμε κάποια μεταβολή, η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $\eta(0) = \eta(T) = 0$ και συγχρόνως καθιστά τη δεύτερη μεταβολή αρνητική. Επιλέγουμε τη μεταβολή

$$\eta = \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) ,$$

η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Η (2.42), τότε, λαμβάνει την τιμή

$$\int_0^T \left(\dot{\eta}^2 - \omega^2\eta^2\right) dt = \left(\frac{\pi^2}{T^2} - \omega^2\right)\frac{T}{2} ,$$

η οποία είναι αρνητική δεδομένου ότι $T > \pi/\omega$. Συνεπώς, η φυσική τροχιά, όταν αντιστοιχεί σε διάστημα κίνησης μεγαλύτερο από μία ημιπερίοδο, δεν καθιστά τη δράση ελάχιστη. Μήπως, όμως, σε αυτή την περίπτωση η φυσική διαδρομή καθιστά τη δράση μέγιστη; Αν θεωρήσουμε τη μεταβολή

$$\eta_k = \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) ,$$

όπου k κάποιος ακέραιος, η ποσότητα (2.42) λαμβάνει την τιμή

$$\int_0^T \left(\dot{\eta}^2 - \omega^2\eta^2\right) dt = \left(\frac{k^2\pi^2}{T^2} - \omega^2\right)\frac{T}{2} .$$

Έτσι, αν $T > \pi/\omega$, για $k > \omega T/\pi > 1$ η παραπάνω ποσότητα είναι θετική, ενώ για $k < \omega T/\pi$ η ποσότητα είναι αρνητική. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι για τέτοιες τιμές του T η τροχιά δεν καθιστά τη δράση ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη· πρόκειται απλώς για σαγματικό “σημείο”[7] της δράσης. Άλλες παρεκκλίσεις μεγαλώνουν τη δράση και άλλες τη μειώνουν.

2.8 Το σχήμα ενός υμενίου σαπωνοδιαλύματος που συνδέει δύο δακτυλίους

Ας φτιάξουμε μια σαπουνόφουσκα η οποία να συνδέει τα κυκλικά άκρα δύο σωλήνων ακτίνας r, οι οποίοι βρίσκονται σε απόσταση $2l$ ο ένας από τον άλλο. Η σαπουνόφουσκα είναι ένα υμένιο διαλύματος σαπουνιού μικροσκοπικού πάχους,[8]της τάξης των 0.0001 cm,[9] που συμπεριφέρεται ως μια μεμβράνη υπό σταθερή τάση.[10] Για να μεγαλώσουμε την επιφάνεια της σαπουνόφουσκας, θα πρέπει να καταναλώσουμε έργο με αποτέλεσμα η επιφανειακή ενέργεια της σαπουνόφουσκας να είναι

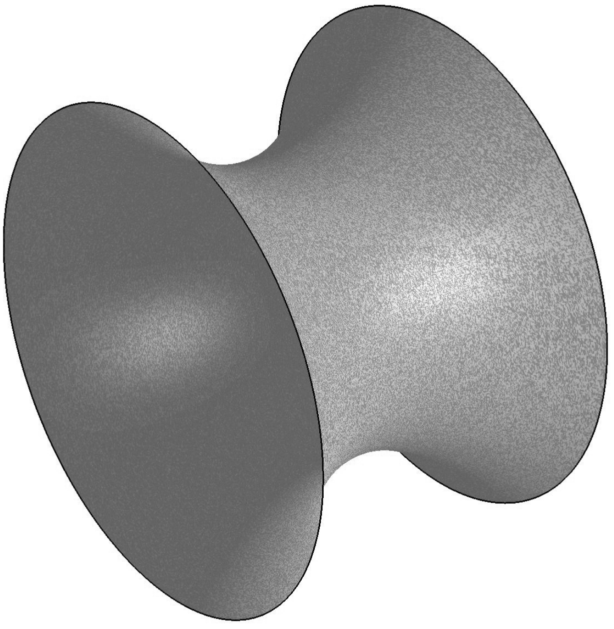
$$E = \sigma S , \tag{2.43}$$

[7]Η δράση ως συναρτησοειδές των δυνατών διαδρομών μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση με πεδίο ορισμού το χώρο των συναρτήσεων. Έτσι μια συγκεκριμένη διαδρομή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σημείο στο πεδίο ορισμού της δράσης.

[8]Πρόκειται για ένα από τα μικρότερης διάστασης αντικείμενα που μπορούμε να διακρίνουμε με γυμνό μάτι.

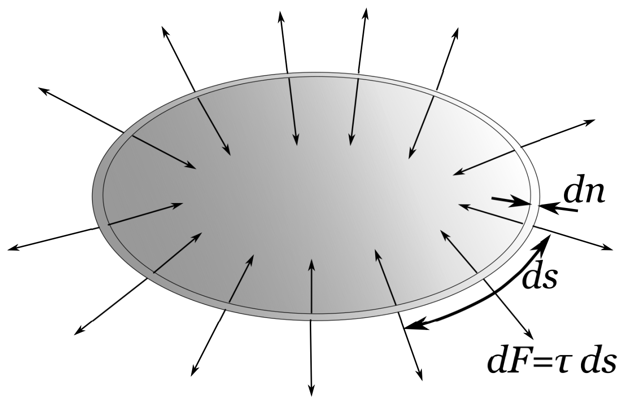
[9]Το πάχος του υμενίου εξαρτάται από το μέγεθος της σαπουνόφουσκας.

[10]Αυτή η σταθερή τάση είναι ανάλογη της σκληρότητας ενός ελατηρίου.



Σχήμα 2.6: Το σχήμα που αποκτά ένα υμένιο σαπωνοδιαλύματος το οποίο συνδέει δύο παράλληλους κυκλικούς δακτυλίους ίδιας ακτίνας.

όπου σ είναι ο συντελεστής της επιφανειακής τάσης (για μια σαπουνόφουσκα είναι $\sigma \approx 2.5 \times 10^{-2}\mathrm{J/m^2}$ [11]). Φανταστείτε μια νοητή, κλειστή καμπύλη γ επάνω στην επιφάνεια της σαπουνόφουσκας. Εξαιτίας της επιφανειακής τάσης, που είναι αποτέλεσμα των διαμοριακών δυνάμεων στην επιφάνεια του υμενίου, στη σαπουνόφουσκα ασκείται μια δύναμη εφαπτομενική στην επιφάνειά της και κάθετη στην καμπύλη γ σε κάθε σημείο αυτής. Η δύναμη αυτή



Σχήμα 2.7: Προκειμένου να κρατήσουμε μια επιφάνεια σαπωνοδιαλύματος τεντωμένη θα πρέπει να ασκούμε δυνάμεις ακτινικές προς τα έξω προκειμένου να εξισορροπήσουμε τις δυνάμεις λόγω επιφανειακής τάσης που είναι ακτινκές προς τα έσω.

έχει την τάση να συρρικνώσει την επιφάνεια που περικλείεται από την καμπύλη, ενώ η τιμή της τ, ανά μονάδα μήκους της περιβάλλουσας καμπύλης αποδεικνύεται ότι είναι ακριβώς ο συντελεστής της επιφανειακής τάσης σ (τώρα σε μονάδες $\mathrm{N/m}$).[12] Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε υπολογίζοντας τη διαφορική μεταβολή της επιφάνειας που περικλείεται από την κα-

[11] Η ακριβής τιμή εξαρτάται από την πυκνότητα του διαλύματος και τη θερμοκρασία του.

[12] Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, σε αντίθεση με τις τάσεις που εμφανίζονται στο σύνορο ενός τρισδιάστατου αντικειμένου και οι οποίες μπορούν να είναι διαφορετικές σε διαφορετικές κατευθύνσεις ανάλογα με το ποια κατεύθυνση εφελκύεται περισσότερο, η επιφανειακή τάση είναι ίδια σε όλες τις κατευθύνσεις. Ενώ οι ελαστικές τάσεις αναπτύσσονται σε ολόκληρο τον όγκο ενός ελαστικού σώματος, η επιφανειακή τάση έχει θερμοδυναμική προέλευση και σχετίζεται με την ομοιογένεια της εξωτερικής επιφάνειας του υγρού.

μπύλη. Εάν η επιφάνεια αυτή τεντωθεί κατά δn στην κατεύθυνση της καθέτου σε κάθε σημείο της καμπύλης, τότε η μεταβολή της επιφανειακής ενέργειας θα είναι

$$\delta E = -\delta W = \oint_\gamma \tau ds \delta n \ ,$$

όπου W το έργο των ασκούμενων στην επιφάνεια δυνάμεων. Επειδή η τάση είναι σταθερή σε κάθε σημείο της καμπύλης και το $\oint_\gamma ds\delta n$ ισούται με τη μεταβολή της επιφάνειας δS, συμπεραίνουμε ότι η μεταβολή της επιφανειακής ενέργειας είναι

$$\delta E = \tau \delta S \ ,$$

οπότε, συγκρίνοντας με την σχέση (2.43), αντιλαμβανόμαστε ότι η επιφανειακή τάση τ (η δύναμη ανά μονάδα μήκους) είναι ίση με το συντελεστή επιφανειακής τάσης σ.[13]

Άσκηση 2.5 *Εκτιμήστε το λόγο της δύναμης της βαρύτητας, προς τη δύναμη λόγω επιφανειακής τάσης, που ασκείται από τα τοιχώματα σε μία σαπουνόφουσκα διαστάσεων* $S = 100\ \mathrm{cm}^2$ *και πάχους* $d = 10^{-4}\ \mathrm{cm}$ *στο πεδίο βαρύτητας της Γης. Υποθέστε ότι η πυκνότητα της σαπουνόφουσκας είναι* $\rho = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ *και ο συντελεστής επιφανειακής τάσης* $\sigma = 5 \times 10^{-2}\ \mathrm{N/m}$.

Απάντηση: *Η δύναμη της βαρύτητας είναι*

$$W = \rho S d g = 10^{-4}\ \mathrm{N} \ ,$$

ενώ αυτή της επιφανειακής τάσης από κάθε ακμή του πλαισίου που τη συγκρατεί, αν υποθέσουμε ότι αυτό είναι τετραγωνικό,

$$F \approx \sqrt{S}\sigma = 50 \times 10^{-4}\ \mathrm{N} \ .$$

Αν το πλαίσιο είναι οριζόντιο, οι τέσσερις δυνάμεις από ολόκληρο το πλαίσιο θα πρέπει, για να συγκρατούν το βάρος του υμενίου, να παρουσιάζουν μια ελαφριά κλίση θ *προς τα πάνω και αντίστοιχα και η επιφάνεια του υμενίου θα πρέπει να καταλήγει στο πλαίσιο με μια αντίστοιχη ελαφρά κλίση* θ *ώστε*

$$4F\theta = W \ .$$

Η βαρύτητα είναι, λοιπόν, 200 φορές μικρότερη από την επιφανειακή τάση $4F$ *και αυτός είναι και ο λόγος που το υμένιο θα είναι σχεδόν επίπεδο αν κρατήσουμε οριζόντιο το επίπεδο του πλαισίου (η γωνιακή απόκλιση* θ *είναι της τάξης των* $0.3°$*).*

Θέλουμε τώρα να προσδιορίσουμε το σχήμα της σαπουνόφουσκας όταν αυτή βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Απαιτούμε το συνολικό άθροισμα των ασκούμενων σε αυτήν δυνάμεων να μηδενίζεται. Τη δύναμη της βαρύτητας τη θεωρούμε αμελητέα αφού είναι περί τις δύο με τρεις τάξεις μεγέθους μικρότερη από τις επιφανειακές δυνάμεις (βλ. Άσκηση 2.5), οπότε σε κάθε διαφορικό τμήμα της σαπουνόφουσκας, η κάθετη στην επιφάνεια συνισταμένη των τάσεων $dF_\perp$ στο σύνορο αυτής από την υπόλοιπη επιφάνεια της

[13] Επειδή η επιφανειακή τάση, ως δύναμη ανά μονάδα μήκους, έχει την προέλευση της στις δύο επιφάνειες του υμενίου, συνηθίζεται να γράφεται $\sigma = dF/(2ds)$. Εμείς εδώ, εφόσον θα ασχοληθούμε μόνο με σαπουνόφουσκες που χαρακτηρίζονται από δύο επιφάνειες, για λόγους απλοποίησης, θα αγνοήσουμε τον παράγοντα 2. Η αριθμητική τιμή $2.5 \times 10^{-2}\mathrm{J/m^2}$, που δόθηκε παραπάνω, εμπεριέχει τον παράγοντα 2, επομένως η αριθμητκή αυτή τιμή είναι το ήμισυ της τιμής που θα πρέπει εμείς να λάβουμε υπόψη στην ανάλυσή μας αν χρειαστεί να ποσοτικοποιήσουμε τα αποτελέσματά μας.

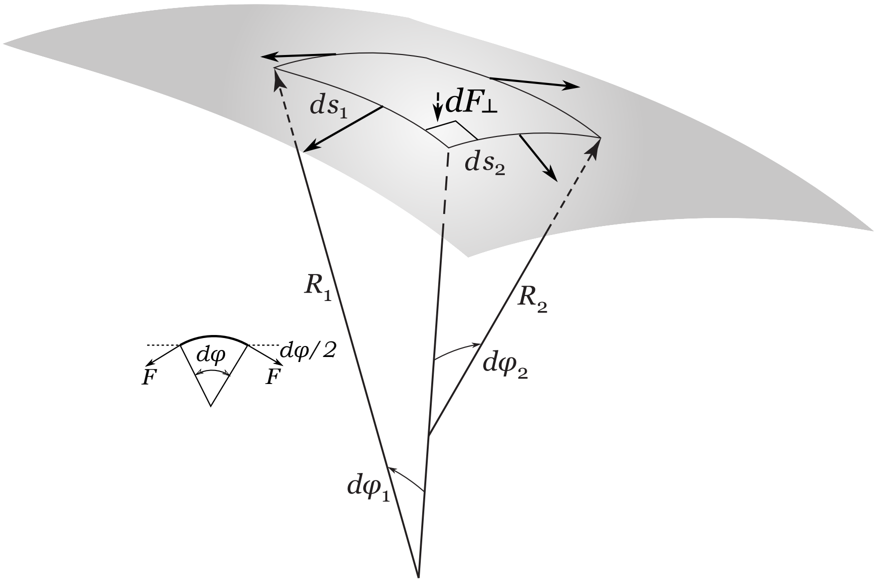
σαπουνόφουσκας, πρέπει να εξισορροπείται από τη δύναμη που ασκείται ανά μονάδα επιφάνειας εξαιτίας της διαφοράς της πίεσης του αέρα δp μεταξύ των δύο πλευρών της σαπουνόφουσκας. Για μία επιφάνεια, δηλαδή, διαφορικού εμβαδού dS ισχύει

$$\frac{dF_\perp}{dS} = \delta p \; .$$

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τη συνισταμένη των τάσεων F_n που ασκούνται σε μια διαφορική επιφάνεια $dS = ds_1 ds_2$, οι πλευρές ds_1, ds_2 της οποίας θεωρούμε ότι είναι απειροστά τόξα κατά μήκος των κάθετων μεταξύ τους κύριων κύκλων καμπυλότητας της επιφάνειας[14] (βλ. Σχήμα 2.8). Τα τόξα αυτά είναι $ds_1 = R_1 d\phi_1$ και $ds_2 = R_2 d\phi_2$, όπου R_1, R_2 είναι οι ακτίνες των αντίστοιχων κύκλων. Ας θεωρήσουμε τις δύο πλευρές που έχουν μήκος ds_2. Η επιφανειακή τάση είναι κάθετη σε αυτές τις πλευρές –συνεπώς είναι εφαπτόμενη στον κύριο κύκλο καμπυλότητας με ακτίνα R_1– και έχει μέτρο σds_2. Με απλή γεωμετρική ανάλυση υπολογίζουμε τη συνισταμένη αυτών των δυνάμεων κάθετα στην επιφάνεια.

$$dF_\perp^{(ds_2)} = 2\sigma ds_2 \frac{d\phi_1}{2} = \sigma ds_2 \frac{ds_1}{R_1} \; .$$[15]

Ομοίως, η συνισταμένη των τάσεων που ασκούνται στις πλευρές μήκους ds_1



Σχήμα 2.8: Οι δυνάμεις που ασκούνται λόγω επιφανειακής τάσης σε ένα στοιχειώδες παραλληλόγραμμο του υμενίου. Τα δύο τόξα των κύριων κύκλων που διαγράφουν το παραλληλόγραμμο είναι κάθετα το ένα στο άλλο. Η συνολική δύναμη $dF_\perp$ που ασκείται κάθετα στην επιφάνεια είναι το διανυσματικό άθροισμα των τεσσάρων δυνάμεων που ασκούνται από το υπόλοιπο υμένιο στο περίγραμμα του παραλληλογράμμου. Στη λεπτομέρεια έχει σχεδιαστεί το ένα ζεύγος δυνάμεων που εμφανίζεται στα τοξωτά άκρα του παραλληλογράμμου στα οποία καταλήγει το ζεύγος των άλλων δύο τόξων που έχουν άνοιγμα $d\phi_1$ ή $d\phi_1$.

είναι

$$dF_\perp^{(ds_1)} = 2\sigma ds_1 \frac{d\phi_2}{2} = \sigma ds_1 \frac{ds_2}{R_2} \; ,$$

[14]Αποδεικνύεται ότι για κάθε ομαλή δισδιάστατη επιφάνεια, υπάρχουν σε κάθε σημείο αυτής δύο, κάθετες μεταξύ τους, διευθύνσεις εφαπτομενικές στην επιφάνεια, τέτοιες ώστε οι αντίστοιχες ακτίνες καμπυλότητας να αποτελούν ακρότατα όλων των δυνατών ακτίνων καμπυλότητας της επιφάνειας στο σημείο αυτό. Οι ακτίνες καμπυλότητας στις διευθύνσεις αυτές ονομάζονται κύριες ακτίνες καμπυλότητας της επιφάνειας στο εν λόγω σημείο.

[15]Ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας 2 οφείλεται στις δύο απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου που συνεισφέρουν δυνάμεις επιφανειακής τάσης. Ο παράγοντας 2 στον παρονομαστή οφείλεται στη γωνία $d\phi_1/2$ ή $d\phi_2/2$ που σχηματίζει η κάθε μία από αυτές τις δυνάμεις με την χορδή του τόξου ds_1 ή ds_2, αντίστοιχα (βλ. τη λεπτομέρεια του Σχήματος 2.8).

και η συνολική κάθετη στην επιφάνεια δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας είναι

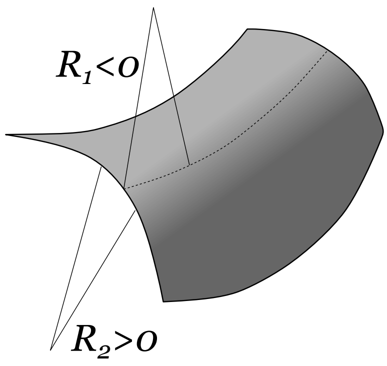
$$\frac{dF_\perp}{\delta S} = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) .$$

Ύστερα από αυτή την ανάλυση συνάγουμε ότι η επιφάνεια της σαπουνόφουσκας, όταν βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση που πρώτος έγραψε ο Pierre Simon Laplace [1749-1827]:[16]

Μια σαπουνόφουσκα σε ισορροπία

$$\delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) , \qquad (2.44)$$

όπου δp είναι η διαφορά πίεσης μεταξύ των δύο πλευρών της σαπουνόφουσκας. Στην παραπάνω έκφραση οι κύριες ακτίνες καμπυλότητας μπορεί να έχουν θετικό ή αρνητικό πρόσημο· αντίθετα πρόσημα έχουν όταν οι κύριοι κύκλοι καμπυλότητας βρίσκονται εκατέρωθεν της επιφάνειας (βλ. Σχήμα 2.9).



Σχήμα 2.9: Αρνητικές και θετικές ακτίνες καμπυλότητας σε μια σαγματοειδή επιφάνεια.

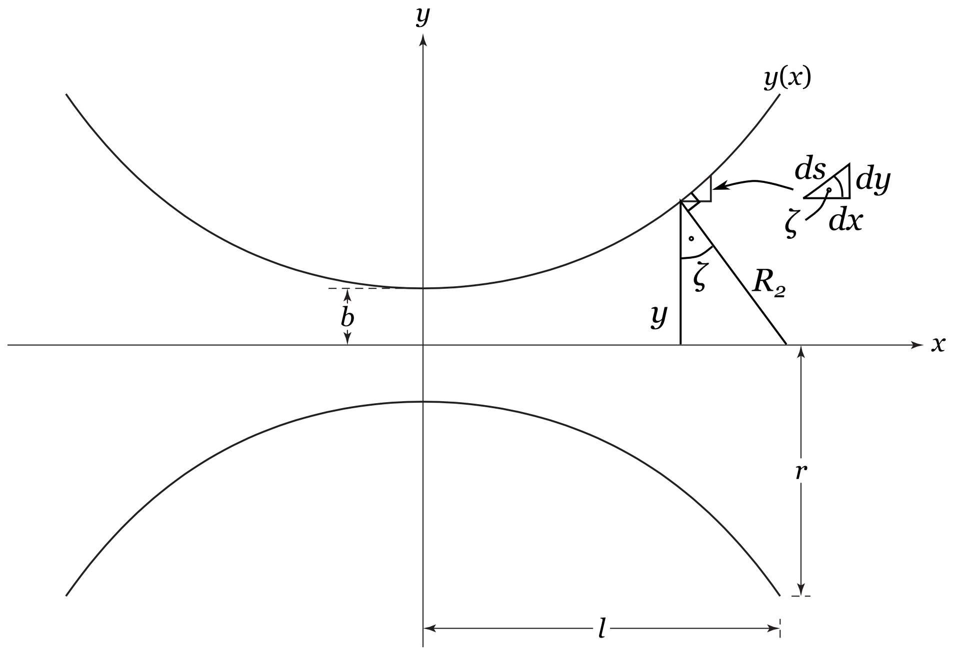
Στο αρχικό μας πρόβλημα, της σαπουνόφουσκας που σχηματίζεται μεταξύ δύο ανοικτών δακτυλίων, δεν υπάρχει διαφορά πίεσης ανάμεσα στις δύο πλευρές της επιφάνειας της σαπουνόφουσκας, όπως θα συνέβαινε σε μια κλειστή σαπουνόφουσκα στην οποία ο εσωτερικός αέρας θα είχε υψηλότερη πίεση από τον εξωτερικό προκειμένου να κρατιέται η σαπουνόφουσκα φουσκωμένη. Ως εκ τούτου η επιφάνεια που αναζητούμε έχει την εξής ιδιότητα: οι κύριες ακτίνες καμπυλότητας σε κάθε σημείο της θα πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση

$$R_1 = -R_2 .$$

Μια σαπουνόφουσκα έχει το μικρότερο δυνατό εμβαδόν

Υπάρχει ένας άλλος, όμως, ισοδύναμος χαρακτηρισμός της συνθήκης ισορροπίας της σαπουνόφουσκας, ο οποίος σχετίζεται άμεσα με το πρόβλημα στασιμοποίησης ενός συναρτησοειδούς που εξετάζουμε στο παρόν κεφάλαιο. Η σαπουνόφουσκα ισορροπεί, όταν η επιφανειακή ενέργειά της καθίσταται στάσιμη και, άρα, όταν το εμβαδόν της επιφάνειάς της καθίσταται στάσιμο. Η κατάσταση ισορροπίας της σαπουνόφουσκας είναι ευσταθής όταν το εμβαδόν της επιφάνειας της σαπουνόφουσκας είναι τοπικό ελάχιστο. Αυτός ο προσδιορισμός του σχήματος ισορροπίας της σαπουνόφουσκας θέτει ένα καινούργιο πρόβλημα μεταβολών. Το πρόβλημα προσδιορισμού της επιφάνειας που δημιουργείται μεταξύ δύο δοσμένων δακτυλίων και παρουσιάζει το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν.

[16] Η σχέση αυτή είναι γνωστή και ως φόρμουλα των Young-Laplace, αφού ο Laplace έγραψε το 1805 τη μαθηματική έκφραση της σχέσης που περιέγραψε πρώτος ο Thomas Young [1773-1829] σε σχετική εργασία του το 1804.



Σχήμα 2.10: Η τομή μιας σαπουνόφουσκας που σχηματίζεται μεταξύ δύο ανοικτών δακτυλίων ακτίνας r που βρίσκονται σε απόσταση $2l$ ο ένας από τον άλλο. Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ αντιδιαμετρικών σημείων της επιφάνειας είναι $2b$. Στο Σχήμαέχει σχεδιαστεί η λεπτομέρεια ενός στοιχειώδους ορθογωνείου τρίγωνου με την υποτείνουσά του επί της επιφάνειας της σαπουνόφουσκας, καθώς και ένα δεύτερο όμοιο οπρθογώνειο τρίγωνο, η υποτείνουσα του οποίου είναι η μία από τις δύο κύριες ακτίνες καμπυλότητας, R_2, της επιφάνειας του υμενίου στο συγκεκριμένο σημείο.

Οι υπολογισμοί σ' αυτό το πρόβλημα είναι πολύπλοκοι, αλλά μπορούν να απλοποιηθούν σημαντικά αν παρατηρήσουμε ότι η ζητούμενη επιφάνεια πρέπει να έχει κυλινδρική συμμετρία ως προς τον άξονα x που συνδέει τα κέντρα των δακτυλίων. Τότε η επιφάνεια μπορεί να προσδιοριστεί μόνο από μία συνάρτηση μιας μεταβλητής, την $y(x)$, όπου y η ακτίνα της επιφάνειας σε απόσταση x από το μέσο μεταξύ των κέντρων των δύο δακτυλίων (βλ. Σχ. 2.10). Αν συμβολίσουμε με ds το διαφορικό μήκος τόξου επί της $y(x)$, τότε η διαφορική επιφάνεια εκ περιστροφής που σχηματίζεται από αυτό το μήκος τόξου είναι

$$dS = 2\pi y ds = 2\pi y\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 2\pi y\sqrt{1 + (y')^2}dx \ ,$$

όπου με y' έχουμε συμβολίσει την παράγωγο dy/dx. Θέλουμε να προσδιορίσουμε την καμπύλη $y(x)$ με συνοριακές συνθήκες $y(\pm l) = r$ που καθιστά την ποσότητα

$$S = 2\pi\int_{-l}^{l} y\sqrt{1 + (y')^2}dx \ ,$$

ελάχιστη. Αυτό είναι ένα πρόβλημα λογισμού μεταβολών με αντίστοιχη "Λαγκρανζιανή" την

$$L(y, y') = y\sqrt{1 + (y')^2} \ .$$

Η εξίσωση Euler - Lagrange που πρέπει να ικανοποιείται από τη συνάρτηση $y(x)$, η οποία παράγει τη στάσιμη αυτή καμπύλη είναι η

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y} \ ,$$

που οδηγεί μετά από κάποιες πράξεις στη διαφορική εξίσωση

$$yy'' = 1 + (y')^2 \ . \tag{2.45}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να ξαναγραφεί στη μορφή

$$-\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}+\frac{1}{y[1+(y')^2]^{1/2}}=0$$

και να αναγνωριστεί ως η συνθήκη ισορροπίας που προκύπτει από τη σχέση του Laplace (2.44), αφού η επιφάνεια εκ περιστροφής $y(x)$ έχει ως πρώτη κύρια ακτίνα καμπυλότητας την

$$R_1=-\frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''},$$

η οποία είναι η ακτίνα καμπυλότητας της καμπύλης $y(x)$ και λαμβάνεται ως αρνητική, διότι κείται στην "εξωτερική" πλευρά της κυλινδρόμορφης επιφάνειας, αφού η $y(x)$ είναι κυρτή και ως δεύτερη ακτίνα καμπυλότητας την

$$R_2=y[1+(y')^2]^{1/2},$$

που αντιστοιχεί σε κύκλο που έχει το κέντρο του επί του άξονα x και εφάπτεται στην καμπύλη $y(x)$. [17]

Ξαναγράφοντας τη διαφορική εξίσωση (2.45) ως

$$\frac{y''}{\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y},$$

μαντεύουμε, σχετικά εύκολα, ότι η λύση της θα είναι της μορφής

$$y(x)=b\cosh(x/b+c)\ .$$

Επιπλέον, λόγω της συμμετρικής συνθήκης $y(\pm l)=r$, θα πρέπει $c=0$ και συνεπώς η λύση της (2.45) θα έχει τη συμμετρική μορφή

Το σχήμα του υμενίου που ενώνει δύο δακτυλίους

$$y(x)=b\cosh(x/b)\ . \tag{2.46}$$

Η σταθερά b που δίνει την ακτίνα της επιφάνειας στο $x=0$ (στο λαιμό του κυλινδροειδούς υμενίου) προσδιορίζεται από τη συνθήκη

$$r/b=\cosh(l/b)\ . \tag{2.47}$$

Η σχέση αυτή συνδέει τις δύο κλίμακες μήκους του υμενίου, την ακτίνα των δακτυλίων, r, και την απόσταση των δακτυλίων, l, μέσω της κλίμακας μήκους b που είναι η ελάχιστη ακτίνα της επιφάνειας της σαπουνόφουσκας. Έτσι, προκειμένου να εργαστούμε με αδιάστατες ποσότητες, θα ορίσουμε τις αδιάστατες ποσότητες $a=l/r$ και $\xi=r/b$, και η εξίσωση (2.47) θα λάβει τη μορφή

$$\xi=\cosh(a\xi)\ . \tag{2.48}$$

Εφόσον τα μοναδικά δοθέντα μήκη είναι τα r,l, από τις δύο αδιάστατες ποσότητες που ορίσαμε παραπάνω η μία, η a, είναι γνωστή, ενώ η άλλη, η ξ θα πρέπει να προσδιοριστεί.

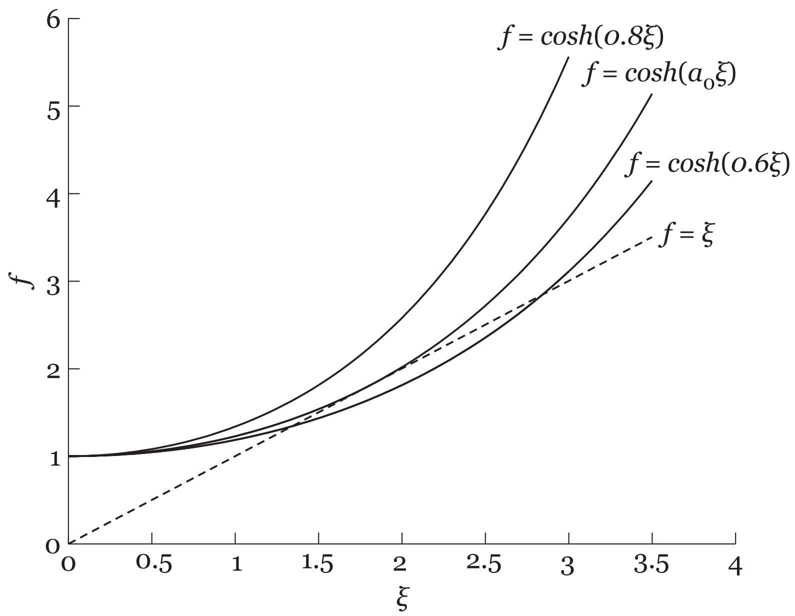
---

[17] Είναι εύκολο να φανταστείτε μια σφαίρα ακτίνας R_2 να εφάπτεται στο "εσωτερικό" της κυλινδρόμορφης επιφάνειας που σχηματίζει το υμένιο. Η σφαίρα αυτή θα έχει το κέντρο της, λόγω αξονικής συμμετρίας του υμενίου, στον άξονα x (βλ. Σχήμα 2.10) και θα εφάπτεται στην εφαπτομένη της επιφάνειας. Επομένως η ακτίνα R_2 θα είναι η απόσταση του κέντρου της σφαίρας από το σημείο επαφής $(x,y(x))$ με την επιφάνεια, δηλαδή, $R_2=y/\cos\zeta=y\sqrt{1+\tan^2\zeta}=y\sqrt{1+(y')^2}$.

Στο Σχήμα 2.11 έχουν σχεδιαστεί τα δύο σκέλη της εξίσωσης (2.48), ως συναρτήσεις του ξ, απ' όπου προκύπτει ένα ιδιόμορφο αποτέλεσμα. Παρατηρούμε ότι για μικρά $a = l/r$, μικρές, δηλαδή, σχετικές αποστάσεις των δακτυλίων, υπάρχουν δύο ρίζες της (2.48)· υπάρχουν, δηλαδή, δύο επιφάνειες που έχουν ακρότατο εμβαδόν. Αντίθετα, για μεγάλα $a = l/r$, δεν υπάρχει λύση της (2.48)· δεν υπάρχει, δηλαδή, επιφάνεια της οποίας το εμβαδόν να καθίσταται ακρότατο. Η οριακή τιμή της παραμέτρου a_0, κατά την οποία οι δύο γραφικές παραστάσεις εφάπτονται (υπάρχει μοναδική διπλή ρίζα για το ξ), καθορίζεται πέραν της (2.48) από την επιπλέον συνθήκη εξίσωσης των κλίσεων των δύο συναρτήσεων που εμφανίζονται στο αριστερό και το δεξιό μέλος της (2.48):

$$1 = a_0 \sinh(a_0 \xi_0) \; , \tag{2.49}$$

όπου ξ_0 η τιμή της ξ στο σημείο επαφής και a_0 η ειδική τιμή της παραμέτρου



Σχήμα 2.11: Γραφική επίλυση της εξίσωσης (2.48). Όταν $a = l/r < 0.66$, η εξίσωση έχει δύο λύσεις, ενώ, όταν $a > 0.66$, η εξίσωση δεν έχει καμία πραγματική λύση.

που οδηγεί στην εφαπτομενική επαφή. Διαιρώντας τις (2.48) και (2.49) στην ειδική αυτή περίπτωση, λαμβάνουμε

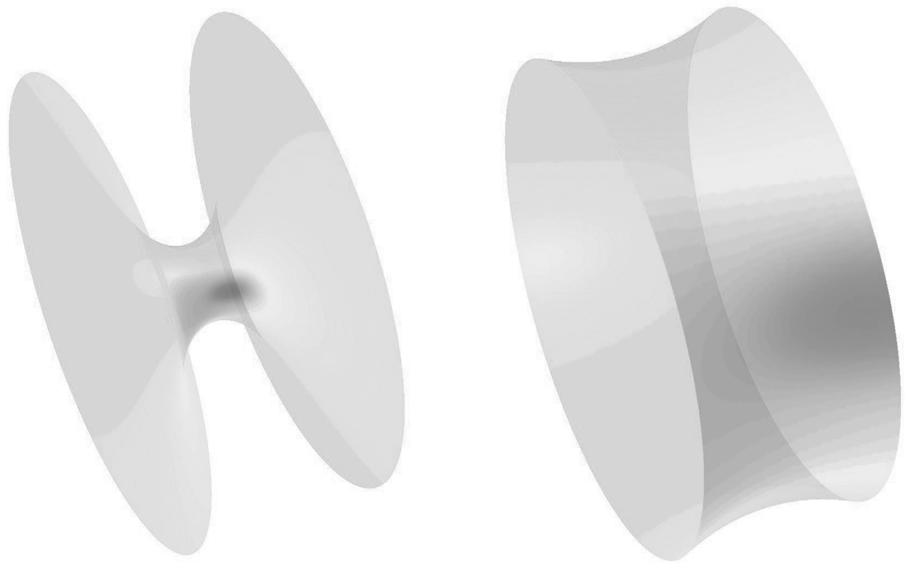
$$a_0 \xi_0 \tanh(a_0 \xi_0) = 1 \; . \tag{2.50}$$

Η υπερβατική αυτή εξίσωση ικανοποιείται για $a_0 \xi_0 \simeq 1.20$. Εισάγοντας αυτή την τιμή στην (2.49), βρίσκουμε ότι η κρίσιμη (μέγιστη) τιμή της παραμέτρου a για την οποία υπάρχει λύση στο πρόβλημά μας είναι η

$$a_0 \simeq 0.66 \; ,$$

η οποία οδηγεί στην τιμή $\xi_0 \simeq 1.81$. Όπως ήδη αναφέραμε, αν $a < a_0$, υπάρχουν δύο επιφάνειες με ακρότατο εμβαδόν. Οι επιφάνειες αυτές παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.12.

Τώρα που γνωρίζουμε τα σχήματα της επιφάνειας του υμενίου που καθιστούν την επιφάνεια αυτού ακρότατη, μπορούμε να υπολογίζουμε και τα



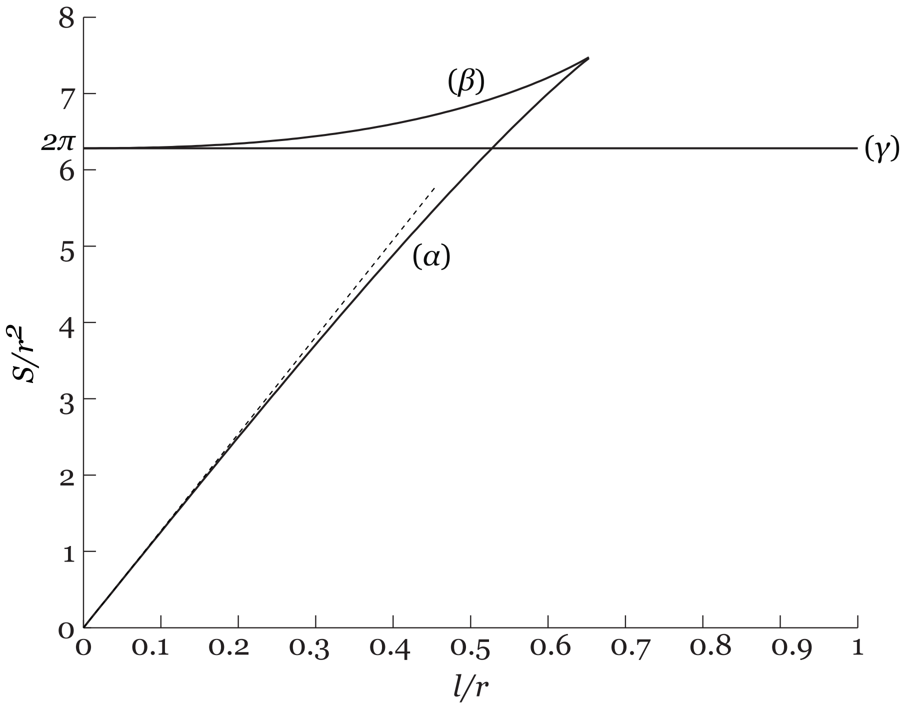
Σχήμα 2.12: Στο σχήμα παριστάνονται οι μορφές των δύο στάσιμων λύσεων για $a = l/r = 0.4$. Η αριστερή αντιστοιχεί σε τιμή $\xi = b/r = 0.16$ (έντονα κυρτωμένη), ενώ η δεξιά σε $\xi = b/r = 0.91$ (ελαφρώς κυρτωμένη). Η αριστερή μορφή δεν δημιουργείται στην πραγματικότητα λόγω της αστάθειάς της, όπως θα δείξουμε αργότερα.

αντίστοιχα εμβαδά S των επιφανειών αυτών:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-l}^{l} y\sqrt{1+y'^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-l}^{l} b\cosh(x/b)\sqrt{1+\sinh^2(x/b)}\, dx \\ &= 2\pi b \int_{-l}^{l} \cosh^2(x/b) dx \\ &= 2\pi b l \left(1 + \frac{\sinh(2l/b)}{(2l/b)}\right) \\ &= 2\pi r^2 (a/\xi)\left(1+\frac{\sinh(2a\xi)}{(2a\xi)}\right), \end{aligned} \tag{2.51}$$

όπου κατά την ολοκλήρωση χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα $2\cosh^2(w) = 1+\cosh(2w)$. Η συνάρτηση S/r^2 απεικονίζεται στο Σχήμα 2.13 ως συνάρτηση της αδιάστατης ποσότητας $a = l/r$. Όπου για κάθε τιμή της παραμέτρου a έχει λυθεί η εξίσωση (2.48) ως προς ξ και έχει αντικατασταθεί στην (2.51). Όπως συζητήθηκε παραπάνω, για κάθε τιμή του $a > a_0 \simeq 0.66$, υπάρχουν δύο λύσεις για το ξ, που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές κυλινδροειδείς επιφάνειες, μια που στενεύει πολύ στο λαιμό και μια με πιο ανοιχτό λαιμό. Αυτή με το μεγαλύτερο λαιμό b (μικρότερο ξ), που αντιστοιχεί στην καμπύλη (α) (την δεξιά καμπύλη του σχήματος 2.12), έχει πάντοτε μικρότερη επιφάνεια από την άλλη λύση με το μικρότερο λαιμό b (μεγαλύτερο ξ) που αναπαρίσταται με την αριστερή επιφάνεια του σχήματος 2.12) και η οποία αντιστοιχεί στην καμπύλη (β). Θυμίζουμε ότι η παράμετρος b είναι η ακτίνα του στενότερου σημείου του λαιμού που σχηματίζει το υμένιο. Καθώς η απόσταση μεταξύ των δακτυλίων μικραίνει ($a \to 0$), η στάσιμη λύση με το μικρότερο εμβαδόν προσεγγίζει μια κυλινδρική επιφάνεια με εμβαδόν $S \to 2\pi r^2 a \times 2 = 4\pi r l$ (βλ. Σχήμα 2.14). [18] Η άλλη λύση με το μεγαλύτερο εμβαδόν (καμπύλη (β)) προσεγγίζει, για

[18] Καθώς $a \to 0$, η λύση με το μικρότερο ξ (αυτή με το μεγαλύτερο b) τείνει στο $\xi \to 1$, οπότε $\sinh(2a\xi)/(2a\xi) \to 1$.



Σχήμα 2.13: Το εμβαδόν της επιφάνειας των στάσιμων λύσεων συναρτήσει του λόγου $a = l/r$. Για τιμές του λόγου $a > a_0 = 0.66$ δεν υπάρχει συνεχής λύση της εξίσωσης Euler - Lagrange. Η καμπύλη (γ) αντιστοιχεί στο εμβαδόν $2\pi r^2$ δύο ξεχωριστών κυκλικών δίσκων ακτίνας r. Η τιμή του $a = l/r$ όπου η καμπύλη (γ) τέμνει την (α) είναι $a = 0.53$. Η διακεκομμένη ευθεία που εφάπτεται στην καμπύλη (α), στην αρχή της, παριστάνει την επιφάνεια ενός κυλίνδρου $S_\kappa = 2\pi r \times (2l)$ ακτίνας r και ύψους $2l$. Η γειτνίασή της με την καμπύλη (α) υποδεικνύει ότι η λιγότερο κυρτή λύση είναι σχεδόν κυλινδρική.

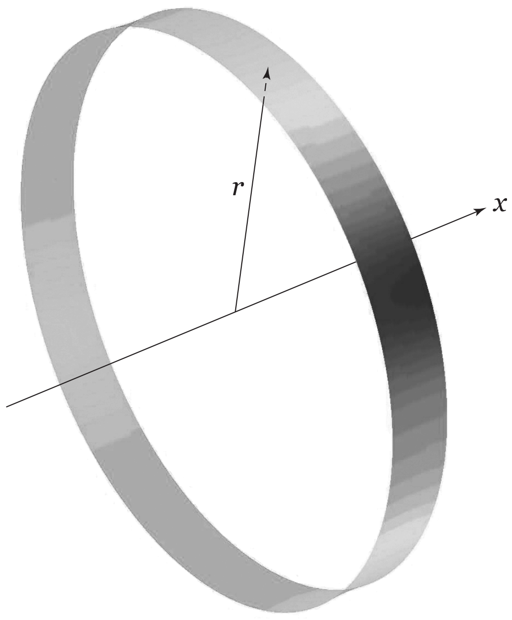
$a \to 0$, την τιμή $2\pi r^2$,[19] που αντιστοιχεί στο εμβαδόν δύο ξεχωριστών κυκλικών υμενίων επάνω στον κάθε δακτύλιο (βλ. Σχήμα 2.16). Στο Σχήμα 2.13 έχει σχεδιαστεί και το εμβαδόν της τοπολογικά διαφορετικής αυτής λύσης, η οποία, μολονότι δεν προκύπτει ως λύση της Euler - Lagrange, όντας μη συνεχής, έχει μικρότερη επιφάνεια από τη στάσιμη λύση με το μικρότερο εμβαδόν για $a > 0.53$. Αυτή η τοπολογικά μη συνεκτική λύση αποτελεί μια πιθανή κατάληξη της σαπουνόφουσκας, όταν αυτή γίνει ασταθής, πράγμα το οποίο συμβαίνει όταν η απόσταση μεταξύ των δακτυλίων ξεπεράσει το $l = ra_0$. Κάνουμε λόγο για πιθανή κατάληξη της σαπουνόφουσκας, διότι υπάρχει και άλλη μια διαφορετική τοπολογική λύση με μηδενικό εμβαδόν κατά την οποία το υγρό της σαπουνόφουσκας εξαπλώνεται στην περιφέρεια των δακτυλίων χωρίς να σχηματίζεται κανένα υμένιο.

Περί της ευστάθειας του υμενίου

Ας ελέγξουμε τώρα την ευστάθεια αυτών των επιφανειών. Αν κάποια από τις παραπάνω επιφάνειες αποτελεί ελάχιστο μεταξύ των παραπλήσιων επιφανειών, τότε η οποιαδήποτε διαταραχή της σαπουνόφουσκας, όπως για παράδειγμα ένα τράνταγμα, θα επιφέρει αύξηση της επιφάνειάς της. Η σαπουνόφουσκα τότε, στην προσπάθειά της να μειώσει την επιφανειακή της ενέργεια, θα επανέλθει στην αρχική της αδιατάραχτη κατάσταση. Στην πραγματικότητα η σαπουνόφουσκα θα εκτελέσει κάποιες ταλαντώσεις γύρω από την

[19]Για $a \to 0$ η λύση της (2.48) με το μεγαλύτερο ξ είναι ένας πολύ μεγάλος αριθμός που μεγαλώνει απεριόριστα καθώς το a μικραίνει. Δεδομένου ότι ο πολύ μεγάλος αυτός αριθμός ικανοποιεί την $\xi = \cosh(a\xi)$, μπορούμε να γράψουμε το λόγο $\sinh(2a\xi)/(2a\xi) = 2\sinh(a\xi)\cos(a\xi)/(2a\xi) = \sqrt{\xi^2-1}\,\xi/(a\xi) = (\sqrt{\xi^2-1})/a$ και να υπολογίσουμε από την (2.51) το όριο

$$\lim_{a\to 0,\xi\to\infty} S_\beta/r^2 = 2\pi \lim_{a\to 0,\xi\to\infty}[(a/\xi) + (\sqrt{\xi^2-1}/\xi)] = 2\pi\ .$$



Σχήμα 2.14: Όταν η απόσταση μεταξύ των δακτυλίων είναι μικρή, η μία λύση προσεγγίζει την παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλίνδρου ακτίνας r και ύψους $2l$· θα έχει λοιπόν επιφάνεια ίση κατά προσέγγιση με $S = 4\pi r l$.

επιφάνεια ισορροπίας της, εκπέμποντας την ενέργεια που προκλήθηκε από το τράνταγμα στο περιβάλλον υπό μορφή θερμότητας. Αν, όμως, το σχήμα της σαπουνόφουσκας καθιστά την επιφάνεια στάσιμη αλλά όχι τοπικό ελάχιστο, τότε το παραμικρό τράνταγμα θα προκαλέσει στη σαπουνόφουσκα μια παραμόρφωση, η οποία θα έχει την τάση να μεγαλώσει καθώς η σαπουνόφουσκα θα προσπαθεί να μικρύνει την επιφάνειά της ακολουθώντας εκείνο το παραμορφωμένο σχήμα που θα καθιστά την επιφάνεια μικρότερη της στάσιμης. Αν, λοιπόν, υπάρχει κάποια λύση με μικρότερη επιφάνεια η σαπουνόφουσκα θα καταλήξει τελικά σε αυτήν. Προκειμένου να ελέγξουμε το είδος του ακροτάτου των λύσεων που κατασκευάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, θα πρέπει να εξετάσουμε το πρόσημο της δεύτερης μεταβολής της επιφάνειας. Αν παραγωγίσουμε το ολοκλήρωμα της επιφάνειας δύο φορές ως προς μικρές διαταραχές της λύσης (2.46)

$$y(x) = b\cosh\left(\frac{x}{b}\right) + \epsilon\eta(x)\ ,$$

θα έχουμε

$$\delta S = \frac{\epsilon^2}{2} 2\pi \int_{-\alpha\xi}^{\alpha\xi} dz \frac{1}{\cosh^2 z}\left[\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2 - \eta^2\right]\ . \qquad (2.52)$$

Την παραπάνω έκφραση την κατασκευάσαμε ακολουθώντας τις γενικές εκφράσεις που γράψαμε στην αρχή του προηγούμενου εδαφίου όσον αφορά στη μελέτη του προσήμου της δεύτερης μεταβολής ενός συναρτησοειδούς.

Άσκηση 2.6 *Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.39) για τις συναρτήσεις P, Q, κατασκευάστε τη δεύτερη παράγωγο της επιφάνειας της σαπουνόφουσκας γύρω από τη λύση (2.46) που στασιμοποιεί την επιφάνεια αυτή. Αλλάζοντας, τέλος, τη μεταβλητή της ολοκλήρωσης από x σε $z = x/l$, δείξτε ότι η δεύτερη μεταβολή της επιφάνειας δίνεται συνοπτικά από το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.52).*

Απάντηση: *Κατόπιν παραγωγίσεων της $L = y\sqrt{1 + (y')^2}$, βρίσκουμε*

$$
\begin{aligned}
L_{y'} &= 2\pi \frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}} \\
P = L_{y'y'} &= 2\pi \frac{y}{(\sqrt{1+(y')^2})^3} \\
L_{yy} &= 0 \\
Q = (L_{y'y})' - L_{yy} &= 2\pi \left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \right)' = 2\pi \frac{y''}{(\sqrt{1+(y')^2})^3}
\end{aligned}
$$

Εισάγοντας τη λύση που καθιστά στάσιμη την S, $y = b\cosh(x/b)$ στις εκφράσεις για τα P, Q βρίσκουμε

$$
P = 2\pi \frac{b}{\cosh^2(x/b)}\;,\; Q = 2\pi \frac{1}{b\cosh^2(x/b)}\;.
$$

Επομένως η γενική έκφραση που δίνει τη δεύτερη μεταβολή της επιφάνειας της σαπουνόφουσκας όταν αυτή λάβει το σχήμα μίας από τις στάσιμες λύσεις της θα είναι σύμφωνα με τη γενική σχέση (2.38)

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \frac{\epsilon^2}{2} 2\pi \int_{-l}^{l} \frac{dx}{\cosh^2(x/b)} \left[b(\eta')^2 - \frac{\eta^2}{b} \right] \\
&= \frac{\epsilon^2}{2} 2\pi \int_{-l}^{l} \frac{d(x/b)}{\cosh^2(x/b)} \left[\left(\frac{d\eta}{d(x/b)} \right)^2 - \eta^2 \right] \\
&= \frac{\epsilon^2}{2} 2\pi \int_{-l/b}^{l/b} \frac{dz}{\cosh^2 z} \left[\left(\frac{d\eta}{dz} \right)^2 - \eta^2 \right]
\end{aligned}
$$

που δεν είναι άλλη από τη ζητούμενη σχέση, αφού $l/b = (l/r)(r/b) = a\xi$.

Αν η διαφορά μεταξύ των δύο ολοκληρωμάτων, του ενός με τον όρο $(d\eta/dz)^2$ και του άλλου με τον όρο η^2, είναι θετική για οποιαδήποτε συνάρτηση η, τότε η μεταβολή της επιφάνειας από την ακρότατη τιμή της είναι θετική και επομένως η επιφάνεια είναι ελάχιστη. Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυσή μας (θεώρημα Καραθεοδωρή) αυτό θα ισχύει σίγουρα για πολύ μικρό διάστημα ολοκλήρωσης. Μικρό, σχεδόν μηδενικό διάστημα ολοκλήρωσης $[-a\xi, a\xi]$ έχουμε στη μία μόνο από τις δύο λύσεις της (2.48), σε αυτή με τη μικρότερη ρίζα ξ, δηλαδή την πιο "ρηχή" καμπύλη. Η άλλη λύση, η "βαθιά" αντιστοιχεί σε τιμή του $a\xi$ μεγαλύτερη της $a_0\xi_0 \simeq 1.20$, αφού, όπως φαίνεται και από τη γραφική παράσταση στο Σχήμα 2.11, ισχύει ότι $\cosh(a_2\xi_2) \geq \cosh(a_0\xi_0)$[20]. Επίσης θα δείξουμε ότι η ακραία λύση του προβλήματός μας με $a = a_0$ και $\xi = \xi_0$ έχει δεύτερη μεταβολή της επιφάνειας θετική ή μηδέν. Με άλλα λόγια, θα δείξουμε ότι για οποιαδήποτε συνάρτηση $\eta(z)$ το ολοκλήρωμα (2.52) για $a\xi = a_0\xi_0$ είναι θετικό, ενώ υπάρχει μια συγκεκριμένη συνάρτηση η που καθιστά το ολοκλήρωμα αυτό μηδέν. Αν ακολουθήσουμε την ανάλυση του πηλίκου Rayleigh που παρουσιάζεται στο Μαθηματικό Παράρτημα, διαπιστώνουμε ότι ένας πολύ κομψός τρόπος εύρεσης του προσήμου του εν λόγω ολοκληρώματος είναι η εύρεση των στάσιμων τιμών του πηλίκου των δύο ετερόσημων όρων της (2.52)

Το ρηχό υμένιο, σε αντίθεση με το βαθύ, είναι ευσταθές

$$
R[\eta] = \frac{\int_{-a\xi}^{a\xi} \left(\dot{\eta}^2/\cosh^2 z \right) dz}{\int_{-a\xi}^{a\xi} \left(\eta^2/\cosh^2 z \right) dz}\;, \tag{2.53}
$$

όπου $\dot{\eta} = d\eta/dz$, το οποίο επιτυγχάνεται με την εύρεση των ιδιοτιμών λ του

[20]Όταν $a \to 0$ το γινόμενο $a\xi$, όπου ξ η μεγαλύτερη ρίζα της $\xi = \cos(a\xi)$, τείνει προσεγγιστικά στο $(1/a)\log(2/a)$.

ακόλουθου προβλήματος Sturm-Liouville

$$-\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\cosh^2 z}\frac{d\eta}{dz}\right) = \lambda\frac{1}{\cosh^2 z}\eta\,, \tag{2.54}$$

ή

$$-\frac{d^2\eta}{dz^2} + 2\tanh(z)\frac{d\eta}{dz} = \lambda\eta\ \ , \tag{2.55}$$

με τον περιορισμό $\eta(\pm a\xi) = 0$. Το πρόβλημα αυτό έχει πραγματικές ιδιοτιμές που είναι όλες εξ' ορισμού (από την (2.53) θετικές.

Ειδικά στην περίπτωση που $a\xi = a_0\xi_0$, για την οποία γνωρίζουμε ότι $a_0\xi_0\tanh(a_0\xi_0) = 1$ δεν είναι δύσκολο να μαντέψουμε την πιο απλή ιδιοσυνάρτηση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης. Δοκιμάζοντας συναρτήσεις της μορφής

$$\eta_0(z) = (z\tanh z - 1)f(z)\ ,$$

που ικανοποιούν τις ζητούμενες συνοριακές συνθήκες, συμπεραίνουμε ότι η απλούστερη ιδιοσυνάρτηση της (2.55) είναι η[21]

$$\eta_0(z) = (z\tanh z - 1)\cosh(z)\ . \tag{2.56}$$

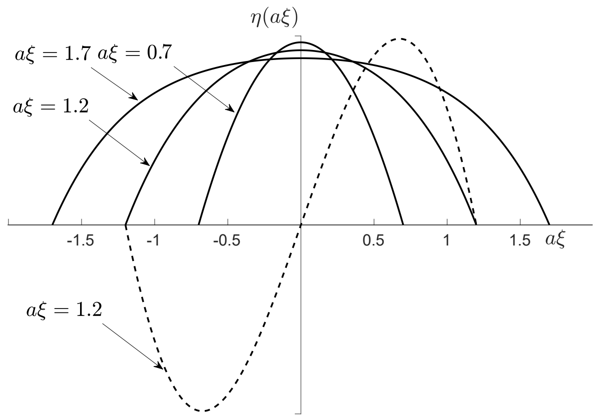
Μιλώντας για απλούστερη ιδιοσυνάρτηση εννοούμε εκείνη που δεν έχει καμία ρίζα στο διάστημα που ορίζεται από τα σύνορά της. Από τη θεωρία Sturm-Liouville γνωρίζουμε ότι η απλούστερη τέτοια ιδιοσυνάρτηση θα αντιστοιχεί και στη μικρότερη ιδιοτιμή, λ_0, που εδώ, όπως διαπιστώνει κανείς εκτελώντας τις παραγωγίσεις, είναι η $\lambda_0 = 1$. Από τη θεωρία γνωρίζουμε επίσης ότι το πηλίκο Rayleigh είναι μεγαλύτερο ή ίσο με τη μικρότερη δυνατή ιδιοτιμή του αντίστοιχου προβλήματος Stum-Liouville. Συνεπώς, η δεύτερη μεταβολή της επιφάνειας που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση μεταξύ των δακτυλίων στην οποία αντιστοιχεί μια λύση ακροτάτου, είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν (αφού ο αριθμητής του πηλίκου Rayleigh είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον παρονομαστή) · είναι ίση με μηδέν όταν η $\eta(z)$ έχει τη μορφή της (2.56). Η ακρότατη αυτή επιφάνεια παρουσιάζει δηλαδή ουδέτερη ευστάθεια, υπό την έννοια ότι όλες οι μεταβολές αυξάνουν την επιφάνεια πλην αυτών της μορφής της ιδιοσυνάρτησης (2.56), οι οποίες αφήνουν το εμβαδόν σταθερό σε δεύτερη τάξη.

Η επιφάνεια που αντιστοιχεί στην ακραία τιμή $a = 0.66$ παρουσιάζει ουδέτερη ευστάθεια

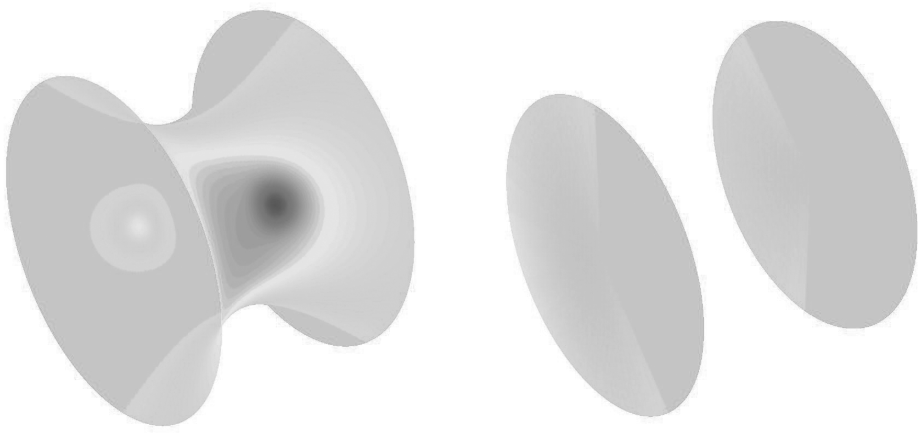
Για μικρότερα διαστήματα μεταξύ των συνόρων $[-a_1\xi_1, a_1\xi_1]$, με $0 < a_1\xi_1 < a_0\xi_0$, η δεύτερη μεταβολή της επιφάνειας είναι αμιγώς θετική αφού, τότε, μπορεί κανείς από τις ιδιοσυναρτήσεις της προηγούμενης περίπτωσης, οι οποίες έχουν όλες ιδιοτιμές μεγαλύτερες ή ίσες της μονάδας, να κατασκευάσει την απλούστερη λύση της εξίσωσης (2.55) η οποία θα υπακούει στις νέες συνοριακές συνθήκες. Αυτή η κατασκευή είναι πάντα εφικτή αφού οι ιδιοσυναρτήσεις της (2.55) αποτελούν μια πλήρη βάση για την κατασκευή οποιασδήποτε συνάρτησης που μηδενίζεται στα όρια του διαστήματος $[-a\xi_0, a\xi_0]$. Αυτή η νέα αυτή συνάρτηση, όντας γραμμικός συνδυασμός των ιδιοσυναρτήσεων του αρχικού προβλήματος, θα έχει ιδιοτιμή οπωσδήποτε μεγαλύτερη από τη μικρότερη ιδιοτιμή του αρχικού προβλήματος (βλ. Σχ. 2.15).[22] Τούτο

[21] Για την ακρίβεια δεν χρειάζεται να καταβάλουμε κάποια ιδιαίτερη προσπάθεια. Η $f(z)$ πρέπει να είναι κάποια άρτια συνάρτηση, δεδομένων των συμμετρικών συνοριακών συνθηκών και της συμμετρίας της διαφορικής εξίσωσης (2.55 στην εναλλαγή $z \to -z$. Δεδομένων των υπερβολικών συναρτήσεων που παρουσιάζονται κατά κόρον στο πρόβλημά μας, η $\cosh z$ είναι η δεύτερη συνάρτηση που θα δοκίμαζε κανείς μετά τη σταθερή συνάρτηση (η οποία δεν οδηγεί σε λύση τη διαφορική εξίσωση).

[22] Η απαίτηση να μηδενίζεται η θεμελιώδης ιδιοσυνάρτηση του νέου προβλήματος στα άκρα του διαστήματος $[-a\xi_1, a\xi_1]$ σημαίνει ότι ο ζητούμενος γραμμικός συνδυασμός θα περιλαμβάνει σίγουρα και άλλες ιδιοσυναρτήσεις της (2.55) πέραν της θεμελιώδους με ιδιοτιμή 1, που μηδενίζεται μόνο στα άκρα του $[-a\xi_0, a\xi_0]$.



Σχήμα 2.15: Οι πρώτες δύο ιδιοκαταστάσεις της (2.55) για $a_0\xi_0 = 1.2$ με ιδιοτιμές $\lambda_0^{(1.2)} = 1$ (η αντίστοιχη ιδιοκατάσταση είναι σχεδιασμένη με συνεχή καμπύλη) και $\lambda_1^{(1.2)} = 6.44$ (η ιδιοκατάσταση είναι σχεδιασμένη με διακεκομμένη καμπύλη). Έχουν σχεδιαστεί επίσης επίσης οι θεμελιώδεις ιδιοκταταστάσεις για $a\xi = 0.7$ στα άκρα, με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda_0^{(0.7)} = 4.16$ και για $a\xi = 1.7$ στα άκρα, με ιδιοτιμή $\lambda_0^{(1.7)} = 0.31$.



Σχήμα 2.16: Όταν η απόσταση των δύο δακτυλίων υπερβεί την τιμή $l/r = 0.66$, η ακραία δυνατή ευσταθής λύση (αριστερό διάγραμμα) σπάει και το σύστημα μεταβαίνει στην κοντινότερη ευσταθή λύση. Σχηματίζονται έτσι δύο κυκλικά υμένια γύρω από κάθε δακτύλιο. Για μεγάλα $a = l/r$ αυτή η μη συνεκτική λύση που δεν προκύπτει από τις εξισώσεις Euler - Lagrange αντιστοιχεί στην κατάσταση ελάχιστης επιφανειακής ενέργειας.

μπορεί να το διαπιστώσει κανείς βασιζόμενος στην ιδιότητα του πηλίκου Rayleigh που αναφέραμε παραπάνω, σύμφωνα με την οποία το πηλίκο Rayleigh είναι μεγαλύτερο από τη μικρότερη δυνατή ιδιοτιμή, η οποία, όπως δείξαμε, είναι η μονάδα. Αντίστοιχο επιχείρημα μπορεί να χρησιμοποιήσει κανείς για την περίπτωση που το διάστημα των συνόρων $[-a_2\xi_2, a_2\xi_2]$ είναι μεγαλύτερο από την οριακή περίπτωση ($a_2\xi_2 > a_0\xi_0$). Τότε, η απλούστερη ιδιοσυνάρτηση θα έχει ιδιοτιμή μικρότερη της μονάδας, με αποτέλεσμα η δεύτερη μεταβολή να μπορεί να γίνει αρνητική (βλ. Σχ. 2.15). Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι, αν αρχικά η σαπουνόφουσκα είχε το σχήμα που αντιστοιχεί στη δεύτερη λύση, η παραμικρή διαταραχή της επιφάνειάς της θα μεγάλωνε ακριβώς με τον τρόπο που αντιστοιχεί στην απλούστερη αυτή ιδιοσυνάρτηση και τελικά η σαπουνόφουσκα θα κατέληγε στη λύση με τη μικρότερη συνολικά επιφάνεια (βλ. Σχήμα 2.13).

Αν οι δακτύλιοι απομακρυνθούν περισσότερο από 0.66 ακτίνες, το υμένιο σπάει

Τέλος, οποιαδήποτε απόπειρα να απομακρύνουμε περισσότερο τους δακτυλίους πέρα από την οριακή τιμή $a_0 = l_{\text{max}}/r = 0.66$, για την οποία υπάρχει, όπως δείξαμε, λύση τοπικά ελάχιστης επιφάνειας, θα προκαλέσει τέτοιες διαταραχές στη σαπουνόφουσκα, ώστε αυτή στην προσπάθειά της να μικρύνει την επιφάνειά της θα γίνεται ολοένα και πιο στενή στο “λαιμό” της. Τελικά, η σαπουνόφουσκα θα καταλήξει στην τοπολογικά διαφορετική λύση των δύο ξεχωριστών υμενίων στους δύο δακτυλίους, η οποία αποτελεί λύση τοπικού ελαχίστου, ή θα διαλυθεί τελείως καταλήγοντας στην περιφέρεια των δύο δακτυλίων.

Ξεκινώντας λοιπόν με τους δύο δακτύλιους πολύ κοντά τον ένα στον άλλο το υμένιο θα είναι εξαιρετικά ευσταθές σχηματίζοντας μια περίπου κυλινδρική επιφάνεια. Καθώς μεγαλώνουμε την απόσταση και μέχρι να φτάσουμε σε απόσταση $l = a_0 r \simeq 0.66r$ το υμένιο θα είναι ευσταθές για πολύ μικρές διαταραχές (τραντάγματα) του σχήματός του. Μάλιστα για $l > 0.53r$, εκεί που η καμπύλη (α) τέμνει την καμπύλη (γ) στο Σχήμα 2.13, η αρκετά κυρτή επιφάνεια του υμενίου θα συνεχίσει να αποτελεί ευσταθή λύση σε μικρές διαταραχές, παρά το γεγονός ότι υπάρχει μια άλλη λύση με χαμηλότερη ενέργεια, αυτή των δύο ξεχωριστών υμενίων, από ένα στον κάθε δακτύλιο. Στις αποστάσεις αυτές θα πρέπει να είμαστε πιο προσεκτικού με τα τραντάγματα, γιατί αν και τα πολύ ελαφρά τραντάγματα δεν πρόκειται να μικρύνουν της επιφάνεια του, κάπως πιο έντονα τραντάγματα ενδέχεται να ρίξουν την επιφάνεια στην πιο ευσταθή κατάσταση των δύο δίσκων. Στην οριακή κατάσταση $l \simeq 0.66r$ η ευστάθεια είναι πλέον εξαιρετικά εύθραυστη.Υπάρχουν διαταραχές, αλλοιώσεις του υμενίου που δεν αλλάζουν καθόλου την επιφάνεια αυτού. Όταν αυτές βρεθούν κοντά στην πολύ ευσταθέστερη λύση των δύο ξεχωριστών υμενίων θα προτιμηθεί αυτή η χαμηλότερης ενέργειας λύση. Σαπουνόφουσκα πιο επιμήκη από $0.66r$ είναι αδύνατο να φτιάξετε. Θα καταρρεύσει.

Προβλήματα

1. Γράψτε την έκφραση για το στοιχειώδες μήκος τόξου επάνω σε μια σφαίρα μοναδιαίας ακτίνας χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες. Στη συνέχεια ορίστε το ολοκλήρωμα που περιγράφει το μήκος μιας τυχαίας διαδρομής που έχει αφετηρία το Βόρειο Πόλο $(\theta = 0, \phi = 0)$ και καταλήγει σε ένα σημείο του Ισημερινού $(\theta = \pi/2, \phi = 0)$. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Euler - Lagrange δείξτε ότι το μήκος της διαδρομής καθίσταται ακρότατο όταν $\phi =$σταθερό. Η συνθήκη αυτή συνεπάγεται δύο δυνατές διαδρομές: μια κατά μήκος του μεσημβρινού $\phi = 0$ απευθείας από το Βόρειο Πόλο προς τον Ισημερινό και μία κατά μήκος του ίδιου μεσημβρινού μέσω όμως του Νότιου Πόλου. Από τις δύο διαδρομές η πρώτη είναι ολικό ελάχιστο σε σχέση με κάθε άλλη δυνατή διαδρομή, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς από τη μορφή του ολοκληρώματος. Η δεύτερη διαδρομή είναι άραγε κάποιο τοπικό ελάχιστο; Ή μήπως μέγιστο; [Υπόδειξη: Ως εναλλακτική της δεύτερης διαδρομής θεωρήστε (α) μια διαδρομή που ακολουθεί έναν άλλο μεσημβρινό από το Βόρειο μέχρι το Νότιο Πόλο και συνεχίζει κατά μήκος του μεσημβρινού μέχρι το τελικό σημείο, (β) την αρχική μεγάλη διαδρομή αντικαθιστώντας όμως ένα πολύ μικρό τόξο αυτής (σχεδόν ευθύγραμμο τμήμα) με μια μικρή τεθλασμένη γραμμή και (γ) τη μεγαλύτερη από τις δύο τοξοειδείς κυκλικές διαδρομές που προκύπτουν, αν τμήσουμε τη σφαίρα με ένα επίπεδο που περιέχει το αρχικό και το τελικό σημείο και διέρχεται σε μικρή απόσταση από το κέντρο της σφαίρας. Σκεφτείτε ότι ο κύκλος που προκύπτει από την τομή αυτή έχει περιφέρεια μικρότερη από έναν μέγιστο κύκλο της σφαίρας, ενώ παράλληλα το μικρότερο τόξο αυτού έχει μήκος μεγαλύτερο από το ένα τέταρτο του μέγιστου κύκλου.]

2. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή σωματιδίου που κινείται υπό την επίδραση κεντρικού δυναμικού $V(r)$ σε σφαιρικές συντεταγμένες. Διατυπώστε κατόπιν τις εξισώσεις κίνησης. Επιβεβαιώστε από τις εξισώσεις αυτές ότι η κίνηση περιορίζεται σε ένα επίπεδο, το οποίο μπορεί να προσδιοριστεί από τις αρχικές συνθήκες.

3. Θεωρήστε τη Λαγκρανζιανή $L = \frac{1}{2}e^{\gamma t/m}\left(m\dot{x}^2 - kx^2\right)$. Γράψτε την εξίσωση κίνησης και, αφού τη λύσετε, περιγράψτε την κίνηση για διάφορες τιμές των παραμέτρων. Τι φυσικό σύστημα περιγράφει η Λαγκρανζιανή;

4. Ένα φυσικό σύστημα περιγράφεται από τη μονοδιάστατη Λαγκρανζιανή $L(q, \dot{q}, t)$. Έστω τώρα μια νέα συντεταγμένη $q' = f(q, t)$. Η Λαγκρανζιανή του φυσικού συστήματος στη νέα συντεταγμένη θα είναι $L'(q', \dot{q}', t) = L'(f, \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t}, t) = L(q, \dot{q}, t)$. Η τελευταία ισότητα υπονοεί ίση τιμή των δύο συναρτήσεων L, L'. Δείξτε ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial q}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'}\right)\frac{\partial L'}{\partial q'}\right].$$

   Σε ποιο συμπέρασμα καταλήγετε όσον αφορά στην αναλλοιότητα των εξισώσεων Euler - Lagrange σε σημειακούς μετασχηματισμούς; Τι είδους μετασχηματισμοί είναι επιτρεπτοί για να παραμείνουν οι εξισώσεις Euler - Lagrange αναλλοίωτες;

5. Αν η Λαγκρανζιανή ενός φυσικού συστήματος δίνεται από μία συνάρτηση $L(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)$, η αρχή του Hamilton γενικεύεται ως εξής: "Οι τροχιές του συστήματος στο χώρο των θέσεων του συστήματος $x(t)$ που ικανοποιούν τις συνθήκες $x(t_1) = x_1$ και $x(t_2) = x_2$, καθώς και $\dot{x}(t_1) = v_1$, $\dot{x}(t_2) = v_2$ (με $t_2 > t_1$) καθιστούν τη δράση

$$\int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) dt$$

ακρότατη". Γράψτε την εξίσωση κίνησης (το αντίστοιχο της εξίσωσης Euler-Lagrange). Γενικεύστε για την περίπτωση που στη Λαγκρανζιανή υπεισέρχονται και παράγωγοι ανώτερης τάξης. Τι τάξης είναι πάντοτε η εξίσωση κίνησης;

6. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη η ταχύτητα ενός κινητού είναι ανάλογη της δύναμης που ασκείται σε αυτό. Εξετάστε κατά πόσο είναι δυνατόν να προκύψει ένας τέτοιος δυναμικός νόμος από την αρχή του Χάμιλτον;

7. Θεωρήστε έναν ταλαντωτή που περιγράφεται από τη Λαγκρανζιανή $L = \dot{q}^2 - q^2$. Προσδιορίστε τη φυσική διαδρομή μεταξύ των σημείων ($t = 0$, $q = 1$) και ($t = \tau$, $q = \cos\tau$) και τη δράση που αντιστοιχεί σε αυτή τη διαδρομή. Μελετήστε για ποιούς χρόνους τ, η δράση είναι πραγματικά ελάχιστη και για ποιούς είναι απλώς στάσιμη, αλλά όχι ελάχιστη.

8. Η ταχύτητα του φωτός σε ένα υλικό με σφαιρικά συμμετρικό δείκτη διάθλασης $n(r)$ είναι $c/n(r)$ (α) Εάν το φως ακολουθεί τη διαδρομή που καθιστά στάσιμο το χρόνο μετάβασης από σημείο σε σημείο (αρχή Fermat) αποδείξτε ότι το φως ακολουθεί την τροχιά

$$\theta = \pm \int \frac{dr}{r\sqrt{(rn(r)/a)^2 - 1}} ,$$

όπου a μία σταθερά και (r, θ) οι πολικές συντεταγμένες της τροχιάς του φωτός (η κίνηση χωρίς έλλειψη της γενικότητας μπορεί να θεωρηθεί επίπεδη). (β) Θεωρήστε τώρα ότι ο δείκτης διάθλασης είναι της μορφής

$$n(r) = \sqrt{1 + \frac{\epsilon a^3}{r^3}} ,$$

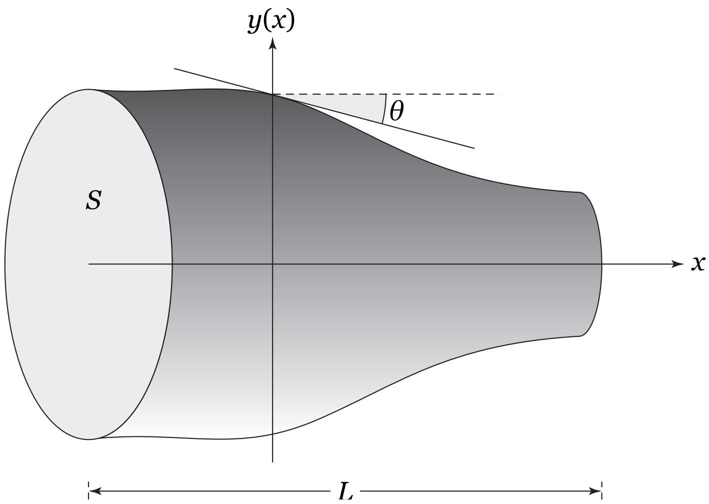
με ϵ πολύ μικρό. (Η κίνηση του φωτός σύμφωνα με τη γενική θεωρία της σχετικότητας είναι ισοδύναμη με την κλασική κίνηση σε ένα μέσο με μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης.) Υπολογίστε πρώτα τη γωνία στροφής του φωτός $\theta_0(r \to \infty)$, όταν $\epsilon = 0$. Είναι αναμενόμενο το αποτέλεσμα; [Υπόδειξη: Χωρίστε την ολοκλήρωση σε δύο μέρη· από $r = \infty$ μέχρι $r = r_{min}$ και από $r = r_{min}$ μέχρι $r = \infty$. Τα δύο ολοκληρώματα είναι ίδια. Ίσως σας βοηθήσει στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων η αντικατάσταση: $r = a/\cos\phi$.] (γ) Ποια είναι η φυσική σημασία της σταθεράς a; (δ) Υπολογίστε στη συνέχεια τη γωνία στροφής του φωτός για μια μικρή τιμή του ϵ και δείξτε ότι

$$\theta_0(r \to \infty) = \pi + 2\epsilon .$$

[Υπόδειξη: Επαναλάβετε την προηγούμενη ολοκλήρωση χρησιμοποιώντας ως νέα μεταβλητή ολοκλήρωσης το $y = rn(r)/a$ και αντικαθιστώντας στην ολοκλήρωση τα r και dr με τις αντίστοιχες συναρτήσεις του y

αναπτυγμένες ως προς ϵ. Κρατήστε στα αναπτύγματα όρους μόνο πρώτης τάξης ως προς ϵ. Στο τελικό ολοκλήρωμα ο ίδιος μετασχηματισμός που χρησιμοποιήσατε στο ερώτημα (β) είναι πάλι χρήσιμος.]

9. *Κατασκευή ενός βλήματος.* (α) Υπολογίστε την αντίσταση που δέχεται ένας κύλινδρος και μία σφαίρα ίδιας ακτίνας, όταν κινούνται με ταχύτητα v κατά μήκος του άξονα συμμετρίας τους μέσα σε ένα αέριο. Υποθέστε ότι η αντίσταση είναι αποτέλεσμα της κρούσης των υποτιθέμενων ακίνητων μορίων του αερίου πάνω στην επιφάνεια του σώματος. (β) Αν το κινούμενο αντικείμενο είναι ένας κόλουρος κώνος, δεδομένης ακτίνας βάσης, ποια είναι η κλίση της παράπλευρης επιφάνειας που οδηγεί στην ελάχιστη αντίσταση; Τι τιμή λαμβάνει αυτή η γωνία στο όριο που ο κώνος έχει απειροστό ύψος; (γ) Δείξτε ότι ένα αξονικά συμμετρικό στερεό σώμα (βλ. Σχήμα), δοσμένης διατομής S και μήκους L (κατά τον άξονα συμμετρίας), παρουσιάζει το πιο αεροδυναμικό σχήμα όταν η καμπύλη, η οποία παράγει εκ περιστροφής το στερεό, είναι η ακόλουθη:
$$y \cos\theta \sin^3\theta = \text{σταθερό}$$



(θ είναι η γωνία μεταξύ της εφαπτομένης της καμπύλης και του άξονα συμμετρίας). Υπολογίστε πρώτα την αντίσταση του σώματος, που περιγράφεται από μια τυχαία συνάρτηση $y(x)$, όταν το σώμα κινείται με ταχύτητα v παράλληλα με τον άξονά του. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια των εξισώσεων Euler - Lagrange, αναζητήστε τη συνάρτηση που καθιστά την αντίσταση ελάχιστη. [Το πρόβλημα αυτό επιλύθηκε για πρώτη φορά από τον Νεύτωνα (Principia, Scholium to Proposition XXXIV) και είναι από τα δυσκολότερα που κατόρθωσε να επιλύσει ο μεγάλος άγγλος επιστήμονας. Το γεγονός μάλιστα ότι κατάφερε να υπολογίσει και την ελεύθερη παράμετρο που προκύπτει από την παραπάνω σχέση, τη γωνία θ στο μπροστινό κόλουρο μέρος του βλήματος, αποκαλύπτει την ξεχωριστή μαεστρία του.]

10. Σχηματίζουμε μια σαπουνόφουσκα που έχει σαν σύνορο έναν κυκλικό δακτύλιο ακτίνας R τον οποίο κρατάμε οριζόντιο. Θεωρώντας ότι το υμένιο θα καμπυλώσει λόγω βαρύτητας πολύ λίγο, να υπολογίσετε το σχήμα του ώστε η συνολική δυναμική του ενέργεια (βαρυτική και ελαστική) να είναι η ελάχιστη δυνατή.