



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Μηχανικής II
20 Ιουνίου 2025

Απαντήστε στα ακόλουθα 4 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα.
Σύνολο μονάδων 110. Καλή σας επιτυχία.

Πρόβλημα Α [35 μονάδες]

- (α) Ένα σύνολο N ελεύθερων σωματιδίων κινούνται στον τριδιάστατο χώρο σε τυχαίες κατευθύνσεις διανύοντας όλα διάστημα $s = 1$ σε χρόνο $t = 1$. Να υπολογιστεί η δράση του συστήματος των σωματιδίων για το διάστημα αυτό, αν η συνολική μάζα των σωματιδίων είναι M .
- (β) Όταν εισάγουμε σε μια Λαγκρανζιανή πολλαπλασιαστές Lagrange, προκειμένου να περιγράψουμε ένα σύστημα που υπόκειται σε δεσμούς, αυξάνουμε ή μειώνουμε τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος που υπεισέρχονται στη Λαγκρανζιανή; Κατά τι πλήθος τους αυξάνουμε ή τους μειώνουμε, αν οι δεσμοί είναι 2 και το σύστημα είναι ένα σωματίδιο στον τριδιάστατο χώρο το οποίο εξαιτίας των δεσμών περιγράφεται τελικά από την κίνηση πάνω σε μια καμπύλη;
- (γ) Αν η μάζα ενός φορτισμένου σωματιδίου διπλασιαστεί, κατά πόσο πρέπει να αυξηθεί το φορτίο του ώστε να διαγράψει ακριβώς την ίδια τροχιά μέσα σε κάποιο δοσμένο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο;
- (δ) Αν οι ποσότητες $F(x, p)$, $G(x, p)$ διατηρούνται σε ένα σύστημα που περιγράφεται από τη Χαμιλτονιανή $H(x, p)$, ελέγξτε αν διατηρείται, επίσης, η αγκύλη Poisson $\{F, G\}$.
- (ε) Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε δυναμικό $V(\vec{x})$. Αν στην Λαγκρανζιανή αυτού προσθέσουμε ένα όρο της μορφής $df(\vec{x})/dt$, όπου f μια βαθμωτή συνάρτηση, η καινούργια Λαγκρανζιανή θα περιγράφει το ίδιο φυσικό σύστημα. Γιατί; Ποια θα είναι η νέα μορφή της Χαμιλτονιανής που θα αντιστοιχεί στη νέα Λαγκρανζιανή;

Πρόβλημα Β [25 μονάδες]

Η δράση ενός σωματιδίου για το χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$ όταν αυτό εκτελεί την, όχι κατ' ανάγκη φυσική, διαδρομή $\vec{x}(t)$ είναι

$$S[\vec{x}(t)] = A \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{x}} \cdot d\vec{x} + B \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{x} \cdot \hat{n}$$

όπου A, B κάποιες σταθερές και $\hat{n}$ κάποιο σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα.

- (α) Να αναγνωρίσετε ποιο είναι το δυναμικό στο οποίο υπόκειται το σωματίδιο. Ποια είναι η φυσική του κίνηση;

- (β) Υπολογίστε την τιμή της δράσης του για τη φυσική διαδρομή στο χρονικό διάστημα $[0, 1]$, αν $A = 1$, $B = 2$, $\hat{n} = \hat{z}$ και οι συνοριακές του θέσεις είναι $\vec{x}(0) = (0, 0, 0)$, $\vec{x}(1) = (1, 0, 1/2)$. Υπολογίστε πώς θα αλλάξει η τιμή της δράσης που βρήκατε, αν η διαδρομή που ακολουθηθεί στον υπολογισμό της δράσης αλλάξει από $\vec{x}_\varphi(t)$ σε $\vec{x}_\varphi(t) + \hat{y}t(1-t)\delta$ για δ αρκετά μικρό. [$\vec{x}_\varphi(t)$ είναι η φυσική διαδρομή που σας έδωσε την τιμή της δράσης που υπολογίσατε.]
- (γ) Με τα δεδομένα του ερωτήματος (β) δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \epsilon \hat{y}$ αποτελεί συμμετρία της δράσης και υπολογίστε την αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα.

Πρόβλημα Γ [25 μονάδες]

Πάνω στην εσωτερική επιφάνεια ενός κατακόρυφου αναποδογυρισμένου κώνου με άνοιγμα θ_0 κινείται χωρίς τριβές ένα σωματίδιο μάζας m . Ο άξονας του κώνου είναι κατακόρυφος και το σύστημα βρίσκεται εντός του ομογενούς βαρυτικού πεδίου g .

- (α) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή σε σφαιρικές συντεταγμένες χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστή Lagrange για να πετύχετε τη δέσμευση της κίνησης του σωματιδίου πάνω στον κώνο.
- (β) Λύστε τις εξισώσεις κίνησης απαιτώντας κυκλικές τροχιές σταθερού r και υπολογίστε γι' αυτές και την αντίδραση του δεσμού. [Δίδεται ότι η θ συνιστώσα του ∇ είναι $(1/r)(\partial/\partial\theta)$.]
- (γ) Υπάρχει, στη γενική περίπτωση κίνησης του σωματιδίου διατηρούμενη ορμή του συστήματος; Αν ναι βρείτε την κοντινότερη στη μύτη του κώνου απόσταση, $r_{\min}$, που μπορεί να φτάσει ένα σωματίδιο που αρχικά βάλεται από το σημείο $r(0) = a$, $\theta(0) = \theta_0$, $\phi(0) = 0$ με ταχύτητα $\dot{r}(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = \omega_0$.

Πρόβλημα Δ [25 μονάδες]

Έστω ένα μονοδιάστατο σύστημα που διέπεται από τη Χαμιλτονιανή

$$H = p^A + x^A.$$

- (α) Αν A άρτιος θετικός αριθμός σχεδιάστε στο χώρο των φάσεων την κίνηση του συστήματος ποιοτικά, αν αρχικά είναι $x(0) = p(0) = 1$. Σημειώστε χαρακτηριστικά σημεία απ' όπου διέρχεται η αντίστοιχη καμπύλη (π.χ. τομές με τους άξονες).
- (β) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής των ποσοτήτων $f(x) = x^{2-A}$, και $g(p) = p^{2-A}$ με χρήση αγκυλών Poisson.
- (γ) Θεωρήστε στη συνέχεια $A = 2$ και χρησιμοποιήστε, αντί των συντεταγμένων x, p , τις νέες συντεταγμένες $Q = ax$, $P = p/a$ (a κάποια θετική σταθερά). Δείξτε ότι οι νέες αυτές συντεταγμένες είναι κανονικές και ξαναγράψτε τη Χαμιλτονιανή στις νέες αυτές συντεταγμένες. Γράψτε και λύστε τις εξισώσεις Hamilton για τη νέα μορφή της Χαμιλτονιανής θεωρώντας αρχικές συνθήκες $Q(0) = 1$, $P(0) = 0$.

Λύσεις

Πρόβλημα Α

- α. $S = M/2$. [Υπήρχε λάθος αρχικά στο αποτέλεσμα.]
- β. Τους αυξάνουμε. Αν αρχικά έχουμε 3 βαθμούς ελευθερίας και το σύστημα υπόκειται σε 2 δεσμούς οι βαθμοί ελευθερίας αυξάνονται σε 5 αν και τελικά έχουμε μια μονοδιάστατη κίνηση. Οι βαθμοί ελευθερίας συμπεριλαμβάνουν τις παγωμένες μεταβλητές εξαιτίας των δεσμών, αλλά και τις αντιδράσεις των δεσμών.
- γ. Αν το φορτίο διπλασιαστεί και αυτό τότε όλη η Λαγκρανζιανή διπλασιάζεται και επομένως περιγράφει το ίδιο φυσικό σύστημα με τις ίδιες εξισώσεις κίνησης και τις ίδιες τελικά τροχιές.
- δ.

$$\frac{d}{dt}\{F, G\} = \{\{F, G\}, H\} = -\{\{H, F\}, G\} - \{\{G, H\}, F\} = 0$$

αφού $dF/dt = \{F, H\} = -\{H, F\} = 0$ και $dG/dt = \{G, H\} = 0$. Άρα διατηρείται και η αγκύλη Poisson τους.

- ε. Είναι μετασχηματισμός (ανα)βαθμονόμησης. Αφού $df/dt = \nabla f \cdot \dot{\vec{x}}$, είναι $\vec{p}' = m\dot{\vec{x}} + \nabla f$, οπότε $\dot{\vec{x}} = (\vec{p}' - \nabla f)/m$. Έτσι

$$\begin{aligned} H &= \vec{p}' \cdot \dot{\vec{x}} - L - \frac{df}{dt} \\ &= \vec{p}' \cdot \frac{(\vec{p}' - \nabla f)}{m} - \frac{m}{2} \frac{(\vec{p}' - \nabla f)^2}{m^2} + V(\vec{x}) - \nabla f \cdot \frac{(\vec{p}' - \nabla f)}{m} \\ &= \frac{(\vec{p}' - \nabla f)^2}{2m} + V(\vec{x}) \end{aligned} \quad (1)$$

Πρόβλημα Β

- α. Η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = A\dot{\vec{x}}^2 + B\vec{x} \cdot \hat{n}$$

αφού το $d\vec{x}$ μπορεί να γραφεί $\dot{\vec{x}}dt$. Ο πρώτος όρος είναι η κινητική ενέργεια με μάζα $2A$ και ο δεύτερος όρος είναι η πλην δυναμική ενέργεια: $V(\vec{x}) = -B\vec{x} \cdot \hat{n}$, που αντιστοιχεί σε δύναμη $\vec{F} = -\nabla V = B\hat{n}$. Έχουμε να κάνουμε με ομαλά επιταχυνόμενο στην κατεύθυνση $\hat{n}$ σωματίδιο μάζας A με επιτάχυνση μέτρου $B/(2A)$.

$$\vec{x} = \vec{x}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{B}{4A}t^2 \hat{n}$$

β. Η φυσική κίνηση με τα δοθέντα δεδομένα είναι

$$\vec{x}_\phi(t) = (t, 0, t^2/2)$$

οπότε η δράση θα είναι

$$S[\vec{x}_\phi] = \int_0^1 [(1 + t^2) + 2t^2] dt = 2.$$

Αν ακολουθηθεί η παραλλαγμένη διαδρομή η δράση αναμένεται να γίνει $S' = 2 + (\text{θετικός})\delta^2$ από την αρχή της ελάχιστης δράσης. Η αύξηση θα οφείλεται αποκλειστικά στην κινητική ενέργεια της y -κίνησης αφού $\hat{y} \cdot \hat{z} = 0$:

$$\begin{aligned} S' &= 2 + \int_0^1 \left(\delta \frac{d[t(1-t)]}{dt} \right)^2 dt \\ &= 2 + \delta^2/3 \end{aligned} \quad (2)$$

γ. Εκτελώντας αυτή την αλλαγή συντεταγμένων η Λαγκρανζιανή δεν αλλάζει, οπότε είναι συμμετρία. Αυτό που διατηρείται είναι η

$$\vec{K} \cdot \vec{p} = (0, 1, 0) \cdot \vec{p} = p_y$$

Πράγματι το σωματίδιο είναι ελεύθερο στον y -άξονα

Πρόβλημα Γ

α.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - mgr \cos \theta + \lambda(\theta - \theta_0)$$

β. Θα λύσουμε το πρόβλημα γεωμετρικά χωρίς να θεωρήσουμε την r σταθερή.

$$\begin{aligned} (\lambda) \quad & \theta = \theta_0 \\ (r) \quad & m\ddot{r} = mr(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - mg \cos \theta \\ (\theta) \quad & \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 + mg \sin \theta + \lambda \\ (\phi) \quad & mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = \text{σταθ} = l \end{aligned}$$

Μέσω της 1ης και της τελευταίας βρίσκουμε

$$\begin{aligned} (r) \quad & \ddot{r} = r \sin^2 \theta_0 \dot{\phi}^2 - g \cos \theta_0 = \frac{(l/m)^2}{\sin^2 \theta_0 r^3} - g \cos \theta_0 \\ (\theta) \quad & \lambda = -m \cos \theta_0 \frac{(l/m)^2}{\sin^3 \theta_0 r^2} - mgr \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (3)$$

Επομένως η δύναμη της αντίδρασης του δεσμού θα είναι

$$\vec{N} = \frac{\lambda}{r} \hat{\theta} = -m \cos \theta_0 \left(\frac{(l/m)^2}{\sin^3 \theta_0 r^3} + g \tan \theta_0 \right) \hat{\theta}$$

Από το (γ) ερώτημα μπορούμε να βρούμε τη συνθήκη ώστε να έχουμε σταθερό r .

- γ. Με τα δοθέντα δεδομένα η διατηρούμενη ορμή είναι η στροφορμή l , η οποία είναι $l = ma^2 \sin^2 \theta_0 \omega_0$. Έτσι η εξίσωση για το r μπορεί να λάβει τη μορφή

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + V(r) = E$$

με $V(r)$ κατάλληλο ώστε

$$\begin{aligned} -dV/dr &= \frac{(l/m)^2}{\sin^2 \theta_0 r^3} - g \cos \theta_0 = \frac{a^4 \sin^2 \theta_0 \omega_0^2}{r^3} - g \cos \theta_0 \Rightarrow \\ V &= gr \cos \theta_0 + \frac{a^4 \sin^2 \theta_0 \omega_0^2}{2r^2} \end{aligned} \quad (4)$$

και η ενέργεια θα είναι

$$E = ga \cos \theta_0 + \frac{a^4 \sin^2 \theta_0 \omega_0^2}{2a^2}$$

Το ακρότατο (απώτερο ή εγγύτερο) σημείο θα είναι εκεί που $V' = 0$ δηλαδή

$$r_{\min, \max} = \sqrt[3]{\frac{a^4 \sin^2 \theta_0 \omega_0^2}{g \cos \theta_0}}$$

Ακρότατο σημείο θα είναι και το αρχικό $r(0) = a$. Αν λοιπόν το άλλο ακρότατο που βρήκαμε υπερβαίνει το a , θα είναι μέγιστο (εγγύτερη απόσταση a), ενώ αν είναι μικρότερο θα είναι ελάχιστο (εγγύτερη απόσταση $\sqrt[3]{(a^4 \sin^2 \theta_0 \omega_0^2)/(g \cos \theta_0)}$).

Αν θέσουμε $r_{\min, \max} = a$ βρίσκουμε και τη συνθήκη για να έχουμε κυκλικές τροχιές. Η συνθήκη αυτή είναι

$$a \sin^2 \theta_0 \omega_0^2 = g \cos \theta_0$$

οπότε αν θέσουμε τη συνθήκη αυτή στην έκφραση για τη δύναμη του δεσμού βρίσκουμε

$$\vec{N} = -\hat{\theta} m \cos \theta_0 (a \sin \theta_0 \omega_0^2 + g \tan \theta_0) = \dots = -\hat{\theta} \frac{mg}{\sin \theta_0}$$

Πρόβλημα Γ

α. Η κίνηση θα γίνεται πάνω στην καμπύλη $H = \text{σταθ}$ η οποία περιγράφεται από μια κλειστή καμπύλη, συμμετρική και ως προς τον άξονα x και ως προς τον p . Οι τομές της καμπύλης με τους άξονες θα είναι $2 = x^A \Rightarrow x = \pm \sqrt[A]{2}$ και αντίστοιχα $p = \pm \sqrt[A]{2}$. Για $A = 2$ θα έχουμε μια έλλειψη, ενώ για $A = 4, 6, \dots$ θα έχουμε μια πιο τετραγωνισμένη «έλλειψη».

β.

$$df/dt = \{f, H\} = \{x^{2-A}, p^A\} = (2-A)Ax^{1-A}p^{A-1}\{x, p\} = (2-A)Ax^{1-A}p^{A-1} = (2-A)A \left(\frac{x}{p}\right)^{1-A}$$

$$dg/dt = \{g, H\} = \{p^{2-A}, x^A\} = (2-A)Ap^{1-A}x^{A-1}\{p, x\} = -(2-A)Ap^{1-A}x^{A-1} = -(2-A)A \left(\frac{-x}{p}\right)^{1-A}$$

γ. Η Χαμιλτονιανή θα πάρει τη μορφή $H = (aP)^2 + (Q/a)^2$. Αφού $\{Q, P\} = 1$ οι νέες συντεταγμένες είναι κανονικές. Οι e_{ij} Hamilton θα είναι

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{\partial H}{\partial P} = 2a^2P \\ \dot{P} &= -\frac{\partial H}{\partial Q} = -2a^{-2}Q\end{aligned}\tag{5}$$

Λύνοντάς τες από κοινού βρίσκουμε $\ddot{Q} = -4Q$, με λύση $Q(t) = \cos(2t)$ ώστε να είναι συμβατό με $Q(0) = 1, \dot{Q}(0) = 2a^2P(0) = 0$. Ομοίως $P(t) = \dot{Q}/(2a^2) = -\sin(2t)/a^2$. Έτσι $x(t) = (1/a)\cos(2t), p(t) = -(1/a)\sin(2t)$ που συνδέονται με την αρχική Χαμιλτονιανή. Αν και ο παράγοντας a μπήκε στον προσδιορισμό των νέων συντεταγμένων εμφανίστηκε στην κίνηση των αρχικών συντεταγμένων λόγω της συσχέτισης, μέσω του a , των αρχικών συνθηκών $x(0), p(0)$ με τις δοθείσες για τις νέες συντεταγμένες.