

## Κεφάλαιο 7

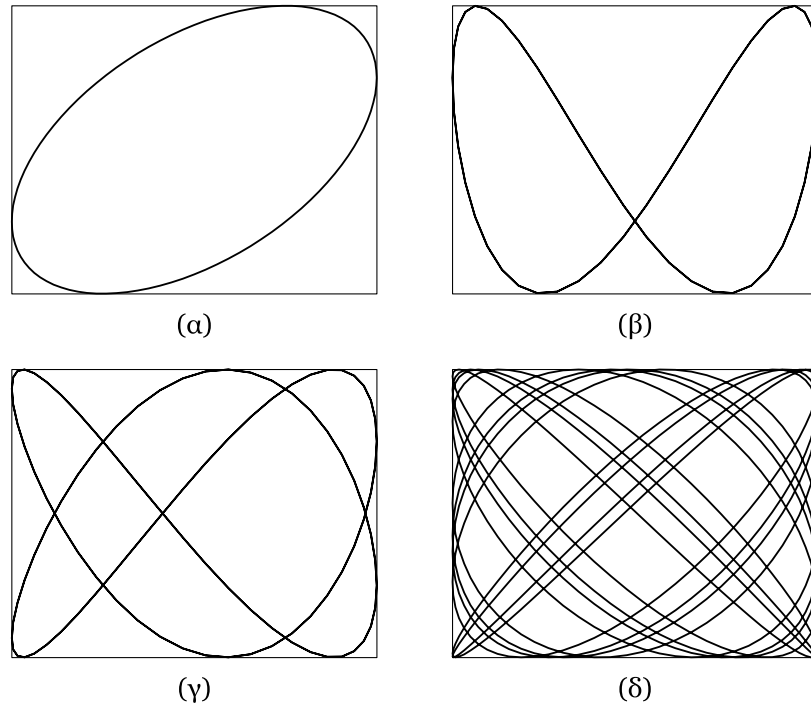
# Παραδείγματα Λαγκρανζιανών Συναρτήσεων

*“Σκούπες σκουπάκια  
ρουφηχτήρια φτερά τυναχτήρια  
ξεσκονόπανα κουρελόπανα κλόουν  
θόρυβοι και τρόποι ακροβάτες,  
μαστίγιο πέφτουν οι κινήσεις  
πάνω στην κατοικίδια σκόνη”*  
Κική Δημουλά

Σε τούτο το κεφάλαιο θα κατασκευάσουμε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση για μια σειρά από πολύ διαφορετικά φυσικά μηχανικά συστήματα, από παιδικά παιχνίδια έως κοσμολογικά μοντέλα. Στόχος μας εδώ δεν είναι τόσο η επίδειξη της απλοποίησης και της γενίκευσης που προσφέρει ο λαγκρανζιανός φορμαλισμός –αυτό εξάλλου είναι ένα θέμα το οποίο έχουμε συζητήσει διεξοδικά σε προηγούμενα κεφάλαια– όσο η παρουσίαση των τεχνικών που χρησιμοποιεί κανείς για να κατασκευάσει λαγκρανζιανές συναρτήσεις σε πολύ ετερόκλητης προέλευσης συστήματα, καθώς επίσης και η ακόλουθη ανάλυση της εξέλιξης του συστήματος μέσω των εξισώσεων Euler - Lagrange. Εύκολα συνειδητοποιεί κανείς ότι η δυσκολία επίλυσης ενός μηχανικού προβλήματος εστιάζεται αποκλειστικά στη γραφή της σχετικής με αυτό Λαγκρανζιανής. Επιπλέον, κάποιες διατηρούμενες ποσότητες αναδεικνύονται άμεσα από τη μορφή της ίδιας της Λαγκρανζιανής και μπορούν να βοηθήσουν στην ευκολότερη εύρεση των εξισώσεων κίνησης.

### 7.1 Ισότροπος και ανισότροπος αρμονικός ταλαντωτής σε 2 διαστάσεις

Ένα σωματίδιο κινείται στο επίπεδο υπό την επίδραση ελκτικής δύναμης ανάλογης της απόστασης του σωματιδίου από κάποιο σημείο του χώρου. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το ελκτικό κέντρο, η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου δίδεται από τη διαφορά μεταξύ



Σχήμα 7.1: (α) Η τροχιά ενός ισότροπου ταλαντωτή είναι ελλειπτική (εδώ  $\omega = 1$  και  $x = \cos t$ ,  $y = \cos(t + \pi/3)$ ). (β) Η περιοδική τροχιά ανισότροπου ταλαντωτή με  $\omega_x = 1$  και  $\omega_y = 2$  ( $x = \cos t$ ,  $y = \cos(2t + \pi/3)$ ). (γ) Περιοδική τροχιά ανισότροπου ταλαντωτή με  $\omega_x = 2$  και  $\omega_y = 3$  ( $x = \cos 2t$ ,  $y = \cos(3t + \pi/3)$ ). (δ) Ψευδο-περιοδική τροχιά ανισότροπου ταλαντωτή με  $\omega_x = 1$  και  $\omega_y = (2)^{1/4}$  ( $x = \cos t$ ,  $y = \cos((2)^{1/4}t + \pi/3)$ ). Με την πάροδο του χρόνου η τροχιά θα καλύψει πυκνά όλα τα σημεία του ορθογωνίου.

της κινητικής και της δυναμικής του ενέργειας

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2). \quad (7.1)$$

Η ισοτροπία του αρμονικού ταλαντωτή κρύβεται στον κοινό συντελεστή σκληρότητας  $k$  και στις δύο κατευθύνσεις  $x$ ,  $y$  και η Λαγκρανζιανή αυτή αναφέρεται ως Λαγκρανζιανή ενός ισότροπου ταλαντωτή σε δύο διαστάσεις. Οι δύο εξισώσεις Euler - Lagrange είναι οι

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad m\ddot{y} + ky = 0. \quad (7.2)$$

Εκτελούνται, δηλαδή, δύο ανεξάρτητες ταλαντώσεις με την ίδια συχνότητα  $\omega = \sqrt{k/m}$

$$x = A \cos(\omega t + \theta_0), \quad y = B \cos(\omega t + \phi_0).$$

Οι σταθερές  $A$ ,  $B$ ,  $\theta_0$  και  $\phi_0$  προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Η ισότητα των δύο συχνοτήτων που πηγάζει από την ισοτροπία του αρμονικού ταλαντωτή οδηγεί σε ελλειπτικές τροχιές στο επίπεδο  $(x, y)$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.1(α).

Ίσως, να φαινόταν πιο κατάλληλη η χρήση πολικών συντεταγμένων για την κατασκευή της Λαγκρανζιανής ενός τέτοιου συστήματος, αφού η δυναμική ενέργεια εξαρτάται μόνο από την απόσταση  $r$  ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ )

και όχι από τη γωνία  $\theta$ , όπως συμβαίνει με όλες τις κεντρικές δυνάμεις. Χρησιμοποιώντας το τέχνασμα του Landau, είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η Λαγκρανζιανή σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}kr^2. \quad (7.3)$$

Η απουσία της συντεταγμένης  $\theta$  από τη Λαγκρανζιανή σημαίνει αυτόματα τη διατήρηση της αντίστοιχης ορμής  $\partial L/\partial\theta$  –στην προκειμένη περίπτωση της στροφορμής  $mr^2\dot{\theta}$ –, αφού η εξίσωση Euler - Lagrange που αντιστοιχεί σε αυτή τη συντεταγμένη λαμβάνει την απλή μορφή

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0. \quad (7.4)$$

Όσο για την ακτινική εξίσωση Euler - Lagrange αυτή είναι μια δύσκολα επιλύσιμη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + kr = 0,$$

η οποία απλοποιείται και λαμβάνει τη μορφή

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + kr = 0,$$

αν εκμεταλλευτούμε τη διατήρηση της στροφορμής  $L = mr^2\dot{\theta}$ . Η περίπλοκη μορφή της ακτινικής εξίσωσης οφείλεται στο γεγονός ότι είναι δύσκολη η περιγραφή μιας έλλειψης σε πολικές συντεταγμένες με το κέντρο της έλλειψης να βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.

Το παράδειγμα αυτό καταδεικνύει ότι η επιλογή του συστήματος συντεταγμένων μπορεί να καταστήσει την εύρεση της τροχιάς ενός φυσικού συστήματος ευκολότερη ή δυσκολότερη. Ταυτόχρονα, όμως, μπορεί να αναδείξει άμεσα κάποια συμμετρία του φυσικού συστήματος –εδώ τη μη εξάρτηση της Λαγκρανζιανής από τη γωνία  $\theta$ – η οποία όπως είδαμε συνδέεται πάντοτε με μια διατηρούμενη ποσότητα –εδώ με τη στροφορμή.

Αν ο αρμονικός ταλαντωτής ήταν ανισότροπος, δηλαδή αν η δυναμική ενέργεια είχε τη μορφή

$$V = \frac{1}{2}(k_x x^2 + k_y y^2),$$

με  $k_x \neq k_y$ , τότε οι ταλαντώσεις στη διεύθυνση  $x$  και στη διεύθυνση  $y$  δεν θα εκτελούνταν με την ίδια συχνότητα, με αποτέλεσμα η τροχιά να μην είναι κατ' ανάγκη κλειστή. Αν οι συχνότητες έχουν ρητό λόγο

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{\kappa}{\lambda},$$

τότε ύστερα από  $\lambda$  περιόδους της  $y$  ταλάντωσης, που διαρκούν όσο ακριβώς  $\kappa$  περίοδοι της  $x$  ταλάντωσης, το σωματίδιο επανέρχεται στο αρχικό σημείο. Σε αυτή την περίπτωση η τροχιά κλείνει και επαναλαμβάνεται –πρόκειται για τις λεγόμενες *καμπύλες Lissajous*– και η κίνηση είναι περιοδική (βλ. Σχήμα 7.1β,γ). Τέλος, αν οι συχνότητες έχουν άρρητο λόγο,

η τροχιά δεν κλείνει και με την πάροδο του χρόνου το σωματίδιο θα περάσει σε οσοδήποτε μικρή απόσταση από κάθε σημείο του ορθογώνιου παραλληλογράμμου. Η τροχιά, λοιπόν, του σωματιδίου θα “σαρώσει” τελικά ολόκληρο αυτό το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που έχει πλάτος και ύψος αντίστοιχα όσο τα πλάτη των δύο ταλαντώσεων τα οποία με τη σειρά τους καθορίζονται πλήρως από τις αρχικές συνθήκες (βλ. Σχήμα 7.1δ). Σε αυτή την περίπτωση η κίνηση λέγεται *ψευδο-περιοδική* (quasi-periodic).

## 7.2 Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο

Θεωρούμε ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας  $m$  και φορτίου  $q$ , το οποίο κινείται μέσα σε ένα συνδυασμένο ομογενές ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 3,<sup>1</sup> έχει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + q\frac{\vec{A}}{c} \cdot \vec{v} - q\phi. \quad (7.5)$$

Στο ιδιαίτερο αυτό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που είναι στατικό, δηλαδή χρονοανεξάρτητο, το μεν βαθμωτό δυναμικό σχετίζεται αποκλειστικά με το ηλεκτρικό πεδίο ( $-\vec{\nabla}\phi = \vec{E}$ ), ενώ το ανυσματικό δυναμικό με το μαγνητικό πεδίο ( $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ). Είναι εύκολο να δειχθεί ότι λόγω της ομογένειας των συγκεκριμένων πεδίων (τα πεδία είναι σταθερά σε ολόκληρο το χώρο), το βαθμωτό και το ανυσματικό δυναμικό μπορούν να γραφούν ως ακολούθως:

$$\phi = -\vec{E} \cdot \vec{x}, \quad \vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{x}. \quad (7.6)$$

Προκειμένου να απλοποιήσουμε την ανάλυσή μας, ας θέσουμε έναν από τους καρτεσιανούς άξονες,<sup>2</sup> για παράδειγμα τον άξονα  $z$ , παράλληλο με το μαγνητικό πεδίο, αφού αυτό καθιστά πολύπλοκη την ανάλυση εξαιτίας του εξωτερικού γινομένου, και ας θεωρήσουμε ότι το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου βρίσκεται στο επίπεδο  $x - z$ . Με αυτές τις επιλογές η Λαγκρανζιανή του φορτισμένου σωματιδίου γράφεται

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{qB}{2c}(-y\dot{x} + x\dot{y}) + q(E_x x + E_z z), \quad (7.7)$$

<sup>1</sup>Σε τούτο το εδάφιο εμφανίζεται στη Λαγκρανζιανή του φορτισμένου σωματιδίου η ταχύτητα του φωτός  $c$ , σε αντίθεση με τη Λαγκρανζιανή που κατασκευάσαμε στο Κεφάλαιο 3. Η διαφορά οφείλεται στο διαφορετικό σύστημα μονάδων που θεωρούμε στο παρόν πρόβλημα. Βλέπε σχετικά στην αντίστοιχη υποσημείωση του Κεφαλαίου 3.

<sup>2</sup>Δοκιμάστε άλλο σύστημα συντεταγμένων, όπως για παράδειγμα τις κυλινδροπολικές συντεταγμένες, για να πειστείτε ότι οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι καταλληλότερες για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού.

και οι εξισώσεις Euler - Lagrange διαμορφώνονται ως εξής:

$$m\ddot{x} = \frac{qB}{c}\dot{y} + qE_x \quad (7.8)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{qB}{c}\dot{x} \quad (7.9)$$

$$m\ddot{z} = qE_z. \quad (7.10)$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις αυτές δεν είναι άλλες από εκείνες που θα λαμβάναμε, αν γράφαμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και υπολογίζαμε τις συνιστώσες της δύναμης Lorentz. Εδώ οι εξισώσεις Euler - Lagrange προέκυψαν αδιάστα από την τυποποιημένη Λαγκρανζιανή του φορτισμένου σωματιδίου. Η επίλυση των εξισώσεων αυτών παρουσιάζει δυσκολία εξαιτίας του ότι οι δύο πρώτες είναι πεπλεγμένες διαφορικές εξισώσεις. Η δυσκολία αυτή, όμως, μπορεί με κομψό τρόπο να αντιμετωπισθεί με τη χρήση της μιγαδικής συντεταγμένης

$$\zeta = x + iy.$$

Πράγματι, οι δύο πρώτες εξισώσεις συμπύσσονται σε μια μιγαδική διαφορική εξίσωση

$$m\ddot{\zeta} = -i\frac{qB}{c}\dot{\zeta} + qE_x. \quad (7.11)$$

Αυτή είναι μία μη ομογενής, γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης ως προς τη  $\dot{\zeta}$  και ως εκ τούτου η λύση της είναι

$$\dot{\zeta} = \dot{\zeta}_0 e^{-iqBt/mc} - \frac{icE_x}{B}.$$

Με μια επιπλέον ολοκλήρωση η παραπάνω εξίσωση δίνει

$$\zeta = \zeta_0 - \frac{imc\dot{\zeta}_0}{qB} (1 - e^{-iqBt/mc}) - \frac{icE_x}{B}t,$$

δηλαδή

$$x(t) = x_0 + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t + \frac{\beta}{\omega} (1 - \cos \omega t) \quad (7.12)$$

$$y(t) = y_0 + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t - \frac{\alpha}{\omega} (1 - \cos \omega t) - \frac{cE_x}{B}t, \quad (7.13)$$

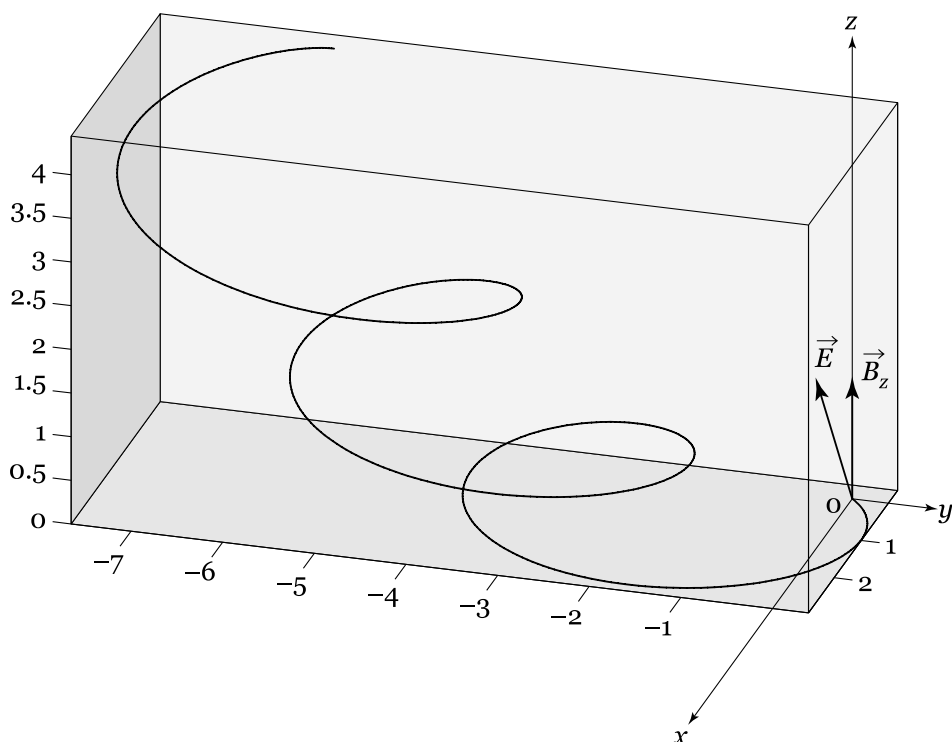
όπου έχουμε ορίσει ως

$$\omega \equiv \frac{qB}{mc},$$

την *κυκλοτρονική συχνότητα*. Αν υπολογίσουμε τις σταθερές της ολοκλήρωσης  $\alpha, \beta$  συναρτήσει των αρχικών ταχυτήτων  $u_{0x}, u_{0y}$ , η κίνηση στο επίπεδο  $x - y$  είναι

$$x(t) = x_0 + u_{0x} \frac{\sin \omega t}{\omega} + \left( u_{0y} + \frac{cE_x}{B} \right) \frac{1 - \cos \omega t}{\omega},$$

$$y(t) = y_0 + \left( u_{0y} + \frac{cE_x}{B} \right) \frac{\sin \omega t}{\omega} - u_{0x} \frac{1 - \cos \omega t}{\omega} - \frac{cE_x}{B}t.$$



Σχήμα 7.2: Η ελικοειδής κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε σταθερό μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο. Το μαγνητικό πεδίο είναι στη διεύθυνση  $z$ , ενώ το ηλεκτρικό πεδίο κείται στο επίπεδο  $x - z$ . Ενώ η ελικοειδής κίνηση του σωματιδίου αναπτύσσεται κατά μήκος του άξονα  $z$  με αυξανόμενο βήμα, η έλিকা μετατοπίζεται κατά τη διεύθυνση  $y$  με σταθερή ταχύτητα.

Όσο για την κίνηση κατά τον άξονα  $z$ , αυτή υπολογίζεται εύκολα από την τρίτη εξίσωση Euler - Lagrange (7.10)

$$z(t) = z_0 + u_{0z}t + \frac{qE_z}{2m}t^2. \quad (7.14)$$

Η κίνηση του φορτισμένου σωματιδίου είναι αυτή που φαίνεται στο Σχήμα 7.2: μια έλিকা με αυξανόμενο βήμα κατά μήκος του άξονα  $z$ , η οποία συνεχώς μετατοπίζεται κατά τον  $y$  άξονα, ο οποίος είναι ο άξονας ο κάθετος στο ηλεκτρικό πεδίο!

Αν και η λύση  $x(t)$  με μια πρώτη ματιά φαίνεται λανθασμένη στο όριο που το μαγνητικό πεδίο μηδενίζεται –φυσιολογικά, αναμένουμε επιταχυνόμενη κίνηση–, λαμβάνοντας το όριο  $B \rightarrow 0$ , οπότε και  $\omega \rightarrow 0$ , και χρησιμοποιώντας το όριο

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \omega t}{\omega} = t$$

καταλήγουμε στην ομαλώς επιταχυνόμενη κίνηση που αναμένεται όταν απουσιάζει το μαγνητικό πεδίο

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + u_{0x}t + \frac{qE_x}{2m}t^2, \\ y(t) &= y_0 + u_{0y}t, \\ z(t) &= z_0 + u_{0z}t + \frac{qE_z}{2m}t^2. \end{aligned}$$

## 7.3 Ατμομηχανή

Στο εδάφιο αυτό θα επιχειρήσουμε να κατασκευάσουμε ένα απλοποιημένο μηχανικό ανάλογο μιας ατμομηχανής (βλ. Σχήμα 7.3). Γι' αυτό το λόγο θα θεωρήσουμε ότι η μάζα ολόκληρης της ατμομηχανής είναι  $M$ , ενώ τα μόνα κινητά μέρη αυτής είναι ο κινητήριος τροχός με ροπή αδράνειας  $I$  και το έμβολο, το οποίο συνδέεται με τον τροχό μέσω ενός διωστήρα. Τα τελευταία αυτά εξαρτήματα θα τα θεωρήσουμε αδαρή. Το έμβολο θα υποθέσουμε πως ωθείται με σταθερή δύναμη  $F$  (φάση εκτόνωσης), περιστρέφοντας τον τροχό κατά μισό κύκλο, και επιστρέφει χωρίς να ασκείται σε αυτό κάποια δύναμη (φάση συμπίεσης). Η απλουστευμένη αυτή περιγραφή αποτελεί μια ικανοποιητική προσέγγιση της λειτουργίας των μηχανών εσωτερικής καύσης, όσον αφορά στο σκοπό μας. Η Λαγκρανζιανή της ατμομηχανής, λοιπόν, θα έχει τη μορφή<sup>3</sup>

$$L = \frac{1}{2}M(R\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + F(\phi)x(\phi). \quad (7.15)$$

Η Λαγκρανζιανή που προκύπτει ορίζει ένα μηχανικό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας, αφού η γωνία περιστροφής του κινητήριου τροχού είναι αρκετή για να περιγράψει πλήρως την κατάσταση της ατμομηχανής. Με απλή γεωμετρία μπορούμε να συσχετίσουμε τη διαδρομή  $x$  που διανύει το έμβολο με τη γωνία στροφής  $\phi$  του κινητήριου τροχού. Έστω  $l$  το μήκος του διωστήρα –της ράβδου που μεταφέρει την παλινδρομική κίνηση του εμβόλου στον τροχό– και  $R$  η ακτίνα του τροχού. Θεωρούμε ότι η άρθρωση του διωστήρα με τον τροχό βρίσκεται στην περιφέρεια του δεύτερου. Είναι εύκολο να δείξουμε τότε ότι

$$\begin{aligned} x + l \cos \omega + R \cos \phi &= \text{σταθερό}, \\ l \sin \omega &= R \sin \phi, \end{aligned} \quad (7.16)$$

όπου  $\omega$  είναι η γωνία που σχηματίζει ο διωστήρας με τον άξονα κίνησης του εμβόλου. Με μια μικρή ανακατανομή των όρων μπορούμε να γράψουμε το  $x$  ως

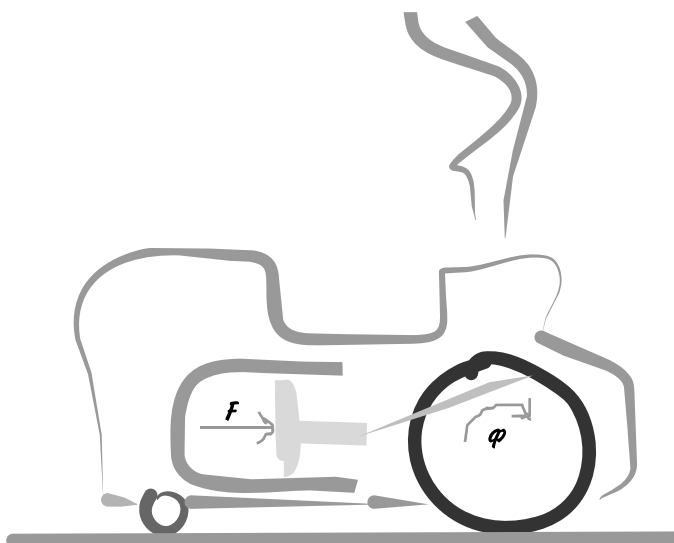
$$x = C - R \cos \phi - \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \phi},$$

οπότε τώρα η Λαγκρανζιανή θα έχει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}(MR^2 + I)\dot{\phi}^2 - F\sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \phi} - FR \cos \phi. \quad (7.17)$$

Προφανώς ο σταθερός όρος έχει απαλειφθεί από τη Λαγκρανζιανή, ενώ η εξίσωση κίνησης πρέπει να υπολογιστεί μόνο για γωνίες  $0 \leq \phi \leq \pi$ , αφού

<sup>3</sup>Το γεγονός ότι η κινητική ενέργεια του περιστρεφόμενου τροχού μπορεί να αναλυθεί στην κινητική ενέργεια της καθαρής μεταφορικής του κίνησης και της περιστροφικής του ενέργειας γύρω από το κέντρο μάζας του αποδεικνύεται εύκολα αν προσθέσουμε τις κινητικές ενέργειες όλων των υλικών σημείων από τα οποία αποτελείται ο τροχός.



Σχήμα 7.3: Η ατμομηχανή με τον κινητήριο μηχανισμό της (το έμβολο, το διωστήρα και τον κινητήριο τροχό)

μόνο τότε δρα η δύναμη.<sup>4</sup> Γράφοντας τις εξισώσεις Euler - Lagrange καταλήγουμε στη σχέση

$$\ddot{\phi} = \frac{FR}{MR^2 + I} \left( 1 + \frac{R \cos \phi}{\sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \phi}} \right) \sin \phi. \quad (7.18)$$

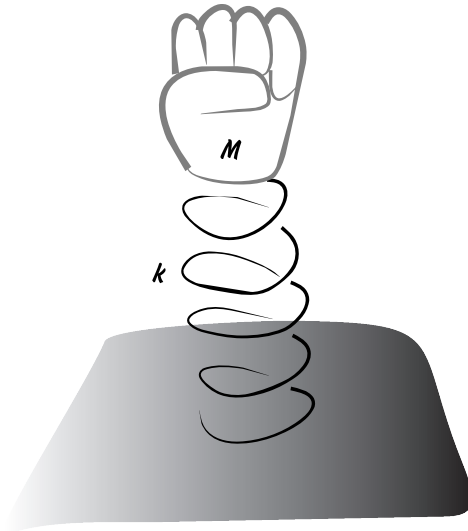
Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε πως η διαφορική αυτή εξίσωση δεν είναι και τόσο χρήσιμη από πρακτικής άποψης, αφού πρέπει να λύσουμε τη δύσκολη αυτή διαφορική εξίσωση προκειμένου να δούμε πώς κινείται η ατμομηχανή με την πάροδο του χρόνου. Χρησιμότερο θα ήταν να γνωρίζουμε την ταχύτητα που αποκτά η ατμομηχανή με κάθε περιστροφή του κινητήριου τροχού. Αυτό, όμως, είναι κάτι που εύκολα μπορούμε να μάθουμε από τη διατήρηση της ενέργειας. Ας μην ξεχνάμε ότι το σύστημα που μελετάμε είναι συντηρητικό, γι' αυτό και καταφέραμε να κατασκευάσουμε άμεσα τη λαγκρανζιανή του συνάρτησης. Επομένως,

$$\frac{1}{2}(MR^2 + I)\dot{\phi}^2 - Fx = \text{σταθερό}$$

για κάθε μισό κύκλο, αφού στον υπόλοιπο μισό κύκλο η γωνιακή ταχύτητα δεν μεταβάλλεται. Έτσι, ύστερα από  $N$  κύκλους η ταχύτητα που θα έχει αναπτύξει η ατμομηχανή θα είναι

$$u_N = R\dot{\phi}_N = \sqrt{\frac{4NFR^3}{MR^2 + I}}.$$

<sup>4</sup>Θα μπορούσαμε τον περιορισμό αυτόν να τον εισαγάγουμε στη συναρτησιακή μορφή της δυναμικής ενέργειας, μέσω για παράδειγμα της συνάρτησης άλματος  $\Theta$ , αλλά θα έπρεπε να είμαστε πολύ προσεκτικοί ώστε να μην δημιουργήσουμε ασυνέχειες στη δυναμική ενέργεια, οι οποίες θα οδηγούσαν σε άπειρες δυνάμεις. (Η συνάρτηση άλματος είναι  $\Theta(x) = 1$  για  $x > 0$  και  $\Theta(x) = 0$  για  $x < 0$ .) Ο καλύτερος τρόπος για να επιτευχθεί αυτό στο εν λόγω πρόβλημα θα ήταν να αντικαταστήσουμε στη δυναμική ενέργεια τη γωνία  $\phi$  με  $\phi\Theta[\phi(\pi - \phi)] + \pi\Theta[\phi - \pi]$ . αλλιώς, αν μηδενίζαμε τη δύναμη εκτός των ορίων  $\phi = 0$ ,  $\phi = \pi$ , θα καταλήγαμε σε άπειρες δυνάμεις από την παραγωγή της δυναμικής ενέργειας στα σημεία αυτά.



Σχήμα 7.4: Η εκτινασσόμενη γροθιά.

Στον υπολογισμό της ταχύτητας έχει ληφθεί υπόψη η συνολική διαδρομή του εμβόλου σε κάθε κύκλο,  $x_{ολ} = 2R$ .

## 7.4 Εκτινασσόμενη γροθιά

Μέσα σε ένα κουτί βρίσκεται μια πλαστική γροθιά στερεωμένη στο άκρο ενός συμπιεσμένου ελατηρίου (βλ. Σχήμα 7.4). Ο “τυχερός” παραλήπτης ενός τέτοιου δέματος, αν προλάβει να αποφύγει τη δραματική σύγκρουση της γροθιάς με το σαστισμένο του πρόσωπο, σίγουρα θα έβλεπε τη γροθιά να εκτινάσσεται στον αέρα συμπαρασύροντας ίσως μαζί της το κουτί. Παρακολουθώντας την κίνηση όλου του συστήματος, θα μπορούσε κανείς να καταλήξει σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα για το βαθμό κακεντρέχειας του δωρητή όσον αφορά στη σκληρότητα του ελατηρίου που επέλεξε και στην αρχική του συσπείρωση. Προσπαθώντας να κάνουμε ευκολότερο το πρόβλημα, χωρίς όμως να αλλάξουμε τη γενική δυναμική του, θα θεωρήσουμε ότι η γροθιά έχει μάζα  $M$ , ενώ το ελατήριο σκληρότητας  $k$  είναι αμελητέας μάζας, όπως επίσης και το κουτί. Ένα άλλο στοιχείο που θα χρειαστεί στην ανάλυση του συστήματος είναι το φυσικό μήκος του ελατηρίου  $L$ . Αν το ελατήριο φτάσει σε αυτό το μήκος, δεν θα επιμηκυνθεί πλέον άλλο, ενώ το ελεύθερο άκρο του θα εγκαταλείψει το έδαφος. Θεωρώντας αποκλειστικά κινήσεις κατά μήκος του άξονα  $z$ , όπου το  $z$  μετρά τις αποστάσεις από το έδαφος, μπορούμε να γράψουμε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος ως

$$L = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 - Mgz - \frac{1}{2}k(L - z)^2\Theta(L - z), \quad (7.19)$$

αφού για  $z > L$  το ελατήριο διατηρεί το φυσικό του μήκος δίχως δυναμική ενέργεια και ανυψώνεται στον αέρα μαζί με τη γροθιά. Η εξίσωση κίνησης για ένα τέτοιο φυσικό σύστημα είναι

$$M\ddot{z} = -Mg + k(L - z)\Theta(L - z) + \frac{1}{2}k(L - z)^2\delta(L - z). \quad (7.20)$$

Η τελευταία δύναμη που εμφανίζεται στην παραπάνω σχέση προέκυψε από την παραγωγή της συνάρτησης  $\Theta$  και ισούται με μηδέν, αφού η συνάρτηση  $\delta(L - z)$  πολλαπλασιάζει μια συνάρτηση, η οποία μηδενίζεται στο σημείο  $z = L$  (βλ. Μαθηματικό Παράρτημα). Έτσι, για παράδειγμα, αν ξεκινήσουμε με τη γροθιά ακίνητη και το ελατήριο συσπειρωμένο κατά  $s$ , το ελατήριο θα αποσυσπειρωθεί σύμφωνα με την εξίσωση κίνησης

$$M\ddot{z} = -Mg + k(L - z), \quad (7.21)$$

και στη συνέχεια, αφότου το ελατήριο αποκτήσει το φυσικό του μήκος, η γροθιά θα συνεχίσει να κινείται σύμφωνα με την εξίσωση

$$M\ddot{z} = -Mg. \quad (7.22)$$

Με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες η εξίσωση (7.21) δίνει

$$z(t) = (L - Mg/k) - (s - Mg/k) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t\right), \quad (7.23)$$

ενόσω  $z < L$ . Για να φτάσει το ελατήριο στο φυσικό του μήκος θα πρέπει  $s \geq 2Mg/k$ , αλλιώς η γροθιά θα ταλαντώνεται γύρω από τη θέση ισορροπίας  $z = L - Mg/k$  και το ελατήριο δεν θα μπορέσει ποτέ να αποκτήσει το φυσικό του μήκος που απαιτείται για να αποδεσμευθεί η γροθιά από το έδαφος. Αν, όμως,  $s \geq 2Mg/k$ , στη συνέχεια η εξίσωση (7.22) δίνει ως λύση

$$z(t + t_0) = L + st\sqrt{\frac{k}{M}}\sqrt{1 - \frac{2Mg}{sk}} - \frac{1}{2}gt^2,$$

όπου  $t_0$  είναι η χρονική στιγμή που το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος  $z = L$ . Η παραπάνω σχέση βασίστηκε στον υπολογισμό της ταχύτητας  $\dot{z}$  από τη σχέση (7.23) όταν  $z = L$ , όπως αυτή δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\dot{z}(t_0) = s\sqrt{\frac{k}{M}}\sqrt{1 - \frac{2Mg}{sk}}.$$

Επομένως, το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει η γροθιά είναι

$$H_{max} = L + s\left(\frac{sk}{2Mg} - 1\right).$$

Πρόκειται για ένα αποτέλεσμα, το οποίο εύκολα θα μπορούσατε να επαληθεύσετε χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της ενέργειας, εφόσον φυσικά το κεφάλι σας βρισκόταν πιο ψηλά από το εν λόγω ύψος.

## 7.5 Ηλεκτρική σκούπα

Σε αυτό το παράδειγμα θα κατασκευάσουμε τη Λαγκρανζιανή ενός μηχανικού συστήματος μεταβλητής μάζας και συγκεκριμένα μιας αυτόματης ηλεκτρικής σκούπας που μαζεύει το καλώδιό της, το οποίο βρίσκεται



Σχήμα 7.5: Η ηλεκτρική σκούπα ενώ μαζεύει το καλώδιό της.

απλωμένο στο οριζόντιο επίπεδο (βλ. Σχήμα 7.5). Για ευκολία θα υποθέσουμε ότι η κίνηση της σκούπας και του καλωδίου εκτελείται στην ευθεία του άξονα  $x$ . Έστω  $M$  η μάζα της σκούπας χωρίς το καλώδιο και  $\mu = m/l$  η γραμμική πυκνότητα μάζας του καλωδίου. Αν ο μηχανισμός της σκούπας μαζεύει το καλώδιο σύμφωνα με το νόμο  $y(t)$ , τότε η κινητική ενέργεια της σκούπας, της οποίας η θέση καθορίζεται από τη συντεταγμένη  $x$ , είναι

$$\frac{1}{2}M\dot{x}^2,$$

ενώ η κινητική ενέργεια του καλωδίου είναι

$$\frac{1}{2}\mu y(t)\dot{x}^2,$$

για το τμήμα του καλωδίου που έχει ήδη μαζευτεί στο εσωτερικό της σκούπας, αν θεωρήσουμε ότι το καλώδιο, αφότου μαζευτεί, μένει ακίνητο ως προς τη σκούπα. Τέλος, το τμήμα του καλωδίου που σέρνεται στο πίσω μέρος της σκούπας έχει κινητική ενέργεια

$$\frac{1}{2}\mu(l - y(t))(\dot{x} + \dot{y})^2.$$

Το σύστημα αυτό δεν έχει δυναμική ενέργεια, αφού θεωρήσαμε ότι η κίνησή του πραγματοποιείται στο οριζόντιο επίπεδο και ότι ο νόμος που καθορίζει το μάζεμα του καλωδίου είναι δεδομένος. Αν ήθελε κάποιος να κάνει τη λαγκρανζιανή περιγραφή πιο ρεαλιστική, θα έπρεπε ίσως να θεωρήσει ένα συγκεκριμένο μηχανισμό μαζέματος του καλωδίου, για παράδειγμα ένα καρούλι τυλίγματος συνδεδεμένο με περιστροφικό ελατήριο, οπότε το σύστημα θα είχε παραπάνω από έναν βαθμό ελευθερίας και θα έπρεπε να συμπεριλάβει στη Λαγκρανζιανή και τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου και την περιστροφική ενέργεια του καρουλιού. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο αποφύγαμε να μιλήσουμε για τύλιγμα του καλωδίου και χρησιμοποιήσαμε τη λέξη μάζεμα.

Συνολικά, λοιπόν, η Λαγκρανζιανή της σκούπας μαζί με το καλώδιο είναι

$$L = \frac{1}{2} [M + \mu y(t)] \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \mu [l - y(t)] [\dot{x} + \dot{y}(t)]^2. \quad (7.24)$$

Οι εξισώσεις Euler - Lagrange του συστήματος λαμβάνουν τη μορφή

$$\frac{d}{dt} [(M + \mu y)\dot{x} + \mu(l - y)(\dot{x} + \dot{y})] = 0. \quad (7.25)$$

Η διατηρούμενη ποσότητα εντός των αγκυλών είναι προφανώς η ορμή  $p$  του συστήματος. Έτσι,

$$\dot{x} = \frac{p - \mu(l - y)\dot{y}}{M + \mu l}. \quad (7.26)$$

Αν υποθέσουμε ότι αρχικά η σκούπα είναι ακίνητη και ο νόμος που διέπει το μάζεμα του καλωδίου είναι<sup>5</sup>

$$y(t) = l(1 - \cos \omega t),$$

για χρόνους  $t \leq \pi/2\omega$ , εύκολα βρίσκουμε ότι η σκούπα θα έχει κάθε στιγμή ταχύτητα

$$\dot{x} = -\frac{\mu l}{M + \mu l} \frac{l\omega}{2} \sin 2\omega t.$$

Η ταχύτητα αυτή μηδενίζεται στο τέλος της κίνησης (για  $t = \pi/2\omega$ ), όπως είναι αναμενόμενο από τη διατήρηση της ορμής του συστήματος. Αυτό που ίσως έρχεται σε αντίθεση με τη διαίσθησή μας είναι ότι η επιτάχυνση της σκούπας είναι αρνητική για  $0 < t < \pi/4\omega$  και θετική για  $\pi/4\omega < t < \pi/2\omega$ . Από πού μπορεί να προέρχεται μια θετική επιτάχυνση; Δεν είναι η τάση του καλωδίου, καθώς αυτό μαζεύεται στο εσωτερικό της σκούπας, η μοναδική δύναμη που ασκείται στη σκούπα; Όχι. Στο εσωτερικό της σκούπας ασκείται επιπλέον μια δύναμη στη σκούπα από το καλώδιο, καθώς αυτό ακινητοποιείται ως προς τη σκούπα, όπως θα συνέβαινε σε μια πλαστική κρούση. Στο δεύτερο μισό της κίνησης της σκούπας η δύναμη αυτή είναι μεγαλύτερη από την τάση, οπότε και η σκούπα επιβραδύνεται. Πόσο μήκος θα διανύσει συνολικά η σκούπα μέχρι να ακινητοποιηθεί; Είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$x_{ολ} = \frac{-\mu l^2}{2(M + \mu l)}.$$

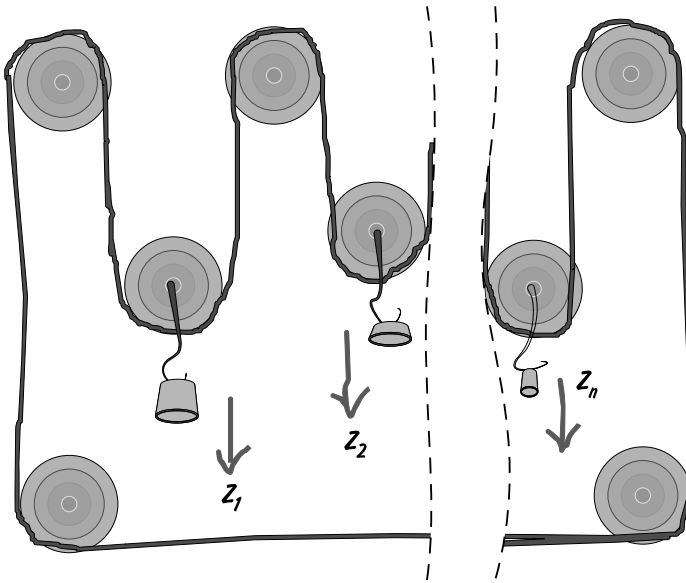
Αυτό το αποτέλεσμα είναι, μάλιστα, ανεξάρτητο από τον τρόπο με τον οποίο μαζεύεται το καλώδιο. Αυτό και πάλι είναι αναμενόμενο αφού το κέντρο μάζας του απομονωμένου συστήματος πρέπει να βρίσκεται στην ίδια θέση που βρισκόταν αρχικά.

## 7.6 Πολυανεγκυστήρας τύπου Atwood

Ας θεωρήσουμε  $n + 1$  σταθερές αβαρείς τροχαλίες κρεμασμένες από την οροφή και άλλες  $n$  κινητές αβαρείς τροχαλίες που εναλλάσσονται με τις σταθερές τροχαλίες. Όλες οι τροχαλίες συνδέονται με ένα σχοινί, το οποίο κλείνει όπως στο Σχήμα 7.6. Έστω  $z_1, z_2, \dots, z_n$  τα ύψη των βαριδιών  $m_1, m_2, \dots, m_n$  που κρέμονται από τις κινητές τροχαλίες. Το σταθερό συνολικό μήκος του σχοινού υποχρεώνει τις συντεταγμένες του συστήματος να ικανοποιούν το δεσμό

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0,$$

<sup>5</sup> Αν η κίνηση προέρχεται από κάποιο ελατήριο είναι αναμενόμενη μια τέτοια χρονική εξέλιξη.



Σχήμα 7.6: Το σύστημα των τροχαλιών του πολυανελκυστήρα.

αφού, όσο ανυψώνεται μια μάζα, πρέπει όλες οι άλλες να κατέρχονται αθροιστικά ακριβώς κατά το ίδιο διάστημα. Συνεπώς, η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι η

$$L = \frac{1}{2}(m_1 \dot{z}_1^2 + \dots + m_n \dot{z}_n^2) + g(m_1 z_1 + \dots + m_n z_n), \quad (7.27)$$

και αν αντικαταστήσουμε την  $z_n$ , για παράδειγμα, συντεταγμένη από την εξίσωση του συνδέσμου καταλήγουμε στη Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} m_i \dot{z}_i^2 + \frac{1}{2} m_n \left( \sum_{i=1}^{n-1} \dot{z}_i \right)^2 + g \sum_{i=1}^{n-1} (m_i - m_n) z_i.$$

Οι  $n-1$  εξισώσεις Euler - Lagrange του συστήματος μπορούν να γραφούν συνοπτικά υπό μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} m_1 + m_n & m_n & \cdots & m_n \\ m_n & m_2 + m_n & \cdots & m_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n & m_n & \cdots & m_{n-1} + m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \vdots \\ \ddot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 - m_n \\ m_2 - m_n \\ \vdots \\ m_{n-1} - m_n \end{pmatrix} g.$$

Πολλαπλασιάζοντας το παραπάνω σύστημα με τον αντίστροφο του πρώτου πίνακα, υπολογίζουμε τις επιταχύνσεις των πρώτων  $n-1$  βαριδιών και τέλος από την εξίσωση συνδέσμου την επιτάχυνση του τελευταίου βαριδιού. Αν θέλαμε να προσδιορίσουμε την εξέλιξη του συστήματος καταφεύγοντας στους πολλαπλασιαστές Lagrange, θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε τη Λαγκρανζιανή άνευ συνδέσμου (7.27), αλλά στις  $n$  εξισώσεις Euler - Lagrange που θα προέκυπταν θα έπρεπε να αντικαταστήσουμε το 0, που συνήθως γράφουμε στο δεξιό μέλος, με τον κοινό πολλαπλασιαστή Lagrange του συνδέσμου, αφού

$$dz_1 + dz_2 + \dots + dz_n = 0.$$

Για παράδειγμα η  $i$ -οστή εξίσωση Euler - Lagrange θα είναι

$$m_i(\ddot{z}_i - g) = \lambda, \quad (7.28)$$

οπότε η επιτάχυνση του  $i$ -οστού βαριδιού θα είναι

$$\ddot{z}_i = g + \lambda/m_i.$$

Αν, τώρα, προσθέσουμε όλες τις επιταχύνσεις, θα πρέπει από την εξίσωση του συνδέσμου να πάρουμε άθροισμα μηδέν. Συνεπώς, μπορούμε να υπολογίσουμε το  $\lambda$

$$\lambda = -ng\mu,$$

όπου  $\mu$  η ανηγμένη μάζα όλων των βαριδιών. Σε αυτό το σημείο μπορούμε αμέσως να υπολογίσουμε την τάση του σχοινιού, αφού, όπως έχουμε αναφέρει, το φυσικό νόημα των πολλαπλασιαστών Lagrange στο λαγκρανζιανό φορμαλισμό είναι η δύναμη που αναπτύσσεται προκειμένου να ικανοποιείται η εξίσωση του συνδέσμου. Η τάση, λοιπόν, αυτή σε κάθε πλευρά της κινητής τροχαλίας είναι  $ng\mu/2$ , ενώ το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η δύναμη αυτή σε κάθε κινητή τροχαλία έχει κατεύθυνση προς τα επάνω (αρνητική κατεύθυνση). Γνωρίζοντας την τιμή του  $\lambda$ , υπολογίζουμε στη συνέχεια κάθε επιτάχυνση χωριστά. Συγκεκριμένα

$$\ddot{z}_i = g \left( 1 - \frac{n\mu}{m_i} \right). \quad (7.29)$$

Έτσι, αν αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο, οι μάζες, οι οποίες υπερβαίνουν την τιμή  $n\mu$ , θα κατευθυνθούν προς τα κάτω, ενώ οι άλλες προς τα επάνω. Είναι σκόπιμο να επισημάνουμε το κέρδος που αποκομίσαμε με τη χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange όσον αφορά στο τεχνικό μέρος επίλυσης του προβλήματος.

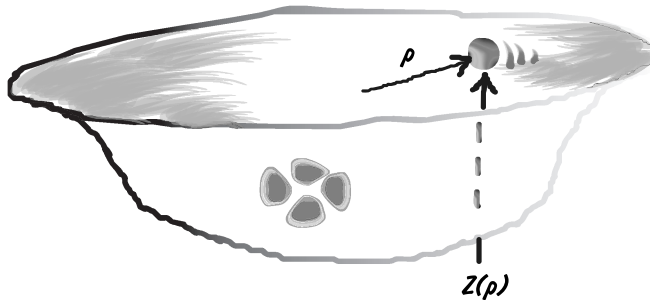
## 7.7 Μπιζέλι σε γαδάθα

Ας περιγράψουμε την κίνηση ενός μπιζελιού στο εσωτερικό μιας αξονικά συμμετρικής γαδάθας. Έστω  $z(\rho)$  είναι το σχήμα της γαδάθας και κατά συνέπεια η εξίσωση συνδέσμου του μπιζελιού. Η Λαγκρανζιανή του μπιζελιού σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες είναι

$$L = \frac{1}{2}m \left[ \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{\rho}^2 \left( 1 + \left( \frac{dz(\rho)}{d\rho} \right)^2 \right) \right] - mgz(\rho). \quad (7.30)$$

Προφανώς η μάζα, όντας πολλαπλασιαστική σταθερά της Λαγκρανζιανής, δεν παίζει κανένα ρόλο στην κίνηση, όπως συμβαίνει πάντοτε με την κίνηση ενός σωματιδίου σε κάποιο βαρυτικό πεδίο. Οι εξισώσεις κίνησης είναι δύο, όσοι δηλαδή και οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος,

$$\begin{aligned} \rho^2 \dot{\phi} &= \text{σταθερό} = l, \\ \ddot{\rho}(z'^2 + 1) + \dot{\rho}^2 z' z'' - \frac{l^2}{\rho^3} + gz' &= 0, \end{aligned}$$



Σχήμα 7.7: Ένα μπιζέλι στριφογυρίζει στο εσωτερικό μιας συμμετρικής γαβάθας. Θα περάσει ποτέ από τον άξονα περιστροφής του; Τι σχήμα πρέπει να έχει η γαβάθα για να μπορέσουμε να πετύχουμε κυκλικές τροχιές;

όπου στην τελευταία εξίσωση χρησιμοποιήθηκε η πρώτη, ενώ ο τόνος συμβολίζει παραγωγή ως προς  $\rho$ . Η πρώτη σχέση υποδηλώνει τη διατήρηση της στροφορμής του μπιζελιού γύρω από τον άξονα  $z$  που εξασφαλίζει τη σταθερή φορά περιστροφής του μπιζελιού γύρω από τον άξονα συμμετρίας της γαβάθας και την αδυναμία του μπιζελιού να τον προσεγγίσει (όταν  $l \neq 0$ ). Η δεύτερη εξίσωση είναι μια δύσκολη, μη γραμμική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την ακτινική μετακίνηση του μπιζελιού. Είναι δυνατόν πάντως να βρούμε τη λύση του προβλήματος για κυκλικές κινήσεις, δηλαδή για

$$\ddot{\rho} = \dot{\rho} = 0, \quad \rho = \rho_{\kappa} = \text{σταθερή}.$$

Τότε η δεύτερη εξίσωση μετατρέπεται στην

$$\rho_{\kappa}^3 z'(\rho_{\kappa}) = \rho_{\kappa}^3 z'_{\kappa} = \frac{l^2}{g}. \quad (7.31)$$

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε και κάτι ακόμη. Κατά πόσον οι κυκλικές αυτές τροχιές είναι ευσταθείς. Γι' αυτό το λόγο θα θεωρήσουμε μικρές διαταραχές γύρω από την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς, δίχως να αλλάξει η στροφορμή  $l$ ,

$$\rho = \rho_{\kappa} + \eta,$$

με  $\eta \ll \rho_{\kappa}$  και θα αναπτύξουμε τη γενική εξίσωση της ακτινικής κίνησης σε πρώτη τάξη ως προς  $\eta$  γύρω από την κυκλική κίνηση. Η ακτινική εξίσωση, αν αγνοήσουμε τον πολύ μικρό όρο  $\dot{\eta}^2$ , αποκτά την ακόλουθη μορφή:

$$\ddot{\eta}(1 + (z'_{\kappa})^2) + g \left( \frac{3z'_{\kappa}}{\rho_{\kappa}} + z''_{\kappa} \right) \eta = 0. \quad (7.32)$$

Στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήθηκε η αναγκαία σχέση (7.31) την οποία πρέπει να ικανοποιεί η κυκλική τροχιά. Συνεπώς, η τροχιά θα είναι ευσταθής (ας θυμηθούμε τον αρμονικό ταλαντωτή) εφόσον

$$\frac{3z'_{\kappa}}{\rho_{\kappa}} + z''_{\kappa} > 0.$$

Στην περίπτωση που το σχήμα της γαδάθας έχει πολυωνυμική μορφή

$$z(\rho) \propto \rho^\sigma ,$$

φαίνεται αμέσως ότι μόνο για  $-2 < \sigma < 0$  θα έχουμε ασταθείς κυκλικές τροχιές, ενώ για κάθε άλλη τιμή του  $\sigma$  οι κυκλικές τροχιές θα είναι ευσταθείς και επομένως πραγματοποιήσιμες.

## 7.8 Bungee Jump σε τσουλήθρα

Έστω ένα σώμα μάζας  $m$  που ολισθαίνει χωρίς τριβή στη ράχη ενός κεκλιμένου επιπέδου μάζας  $M$ , το οποίο με τη σειρά του κινείται ελεύθερα σε οριζόντιο δάπεδο (βλ. Σχήμα 7.8). Η γωνία κλίσης του κεκλιμένου επιπέδου είναι  $\phi$  και το σώμα κρέμεται από την επάνω γωνία του κεκλιμένου επιπέδου μέσω ελατηρίου σταθεράς  $k$ . Τι κίνηση εκτελεί το σύστημα; Η Λαγκρανζιανή του συστήματος περιλαμβάνει την κινητική ενέργεια και του σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου (αυτή του σώματος είναι κάπως πιο πολύπλοκη, αφού το σώμα μετέχει στην κίνηση του κεκλιμένου επιπέδου), τη δυναμική ενέργεια του σώματος λόγω της κίνησής του στο βαρυτικό πεδίο και τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου. Χρησιμοποιώντας ως συντεταγμένες του προβλήματος την οριζόντια μετακίνηση του κεκλιμένου επιπέδου  $x(t)$  και την απόσταση του ολισθαίνοντος σώματος από το ανώτατο άκρο του κεκλιμένου επιπέδου  $y(t)$ , το τετράγωνο της ταχύτητας του ολισθαίνοντος σώματος είναι

$$u_2^2 = (\dot{x} + \dot{y} \cos \phi)^2 + (\dot{y} \sin \phi)^2 ,$$

και η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m [(\dot{x} + \dot{y} \cos \phi)^2 + \dot{y}^2 \sin^2 \phi] + mgy \sin \phi - \frac{1}{2}ky^2 .$$

Θεωρήσαμε για ευκολία ότι το ελατήριο έχει μηδενικό φυσικό μήκος. Οι εξισώσεις κίνησης, λοιπόν, των δύο σωμάτων είναι

$$(M + m)\ddot{x} + m\ddot{y} \cos \phi = 0 , \quad (7.33)$$

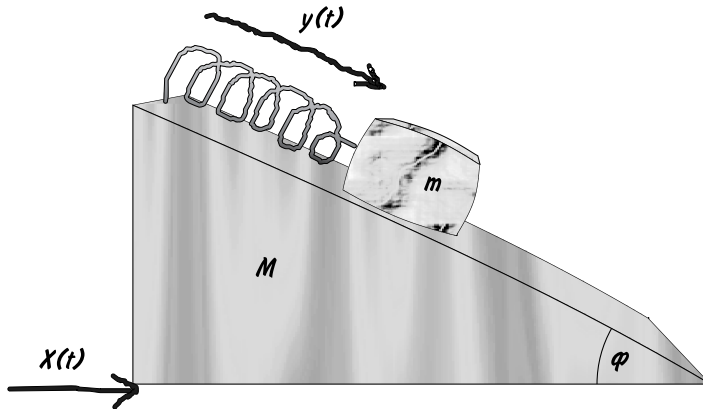
$$m(\ddot{x} \cos \phi + \ddot{y}) - mg \sin \phi + ky = 0 . \quad (7.34)$$

Η πρώτη από αυτές τις εξισώσεις εκφράζει τη διατήρηση της ορμής στον άξονα  $x$  και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αντικατάσταση του  $\ddot{x}$  στη δεύτερη εξίσωση. Με την αντικατάσταση αυτή η δεύτερη εξίσωση ξαναγράφεται ως ακολούθως:

$$\left( \frac{m \cos^2 \phi}{M + m} + 1 \right) m\ddot{y} = -k \left( y - \frac{mg \sin \phi}{k} \right) . \quad (7.35)$$

Η μορφή αυτή δόθηκε προκειμένου να διαφανεί η  $y$  συνιστώσα της κίνησης. Πρόκειται για ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας

$$y_0 = \frac{mg}{k} \sin \phi ,$$



Σχήμα 7.8: Ένα σώμα αγκιστρωμένο μέσω ελατηρίου στην κορυφή μιας τσουλήθρας ολισθαίνει επάνω σε αυτή. Η τσουλήθρα βρίσκεται σε παγοδρόμιο και μπορεί να κινείται ελεύθερα στο οριζόντιο επίπεδο. Τι κίνηση εκτελεί το σύστημα;

με συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{M+m}{M+m(1+\cos^2\phi)}}.$$

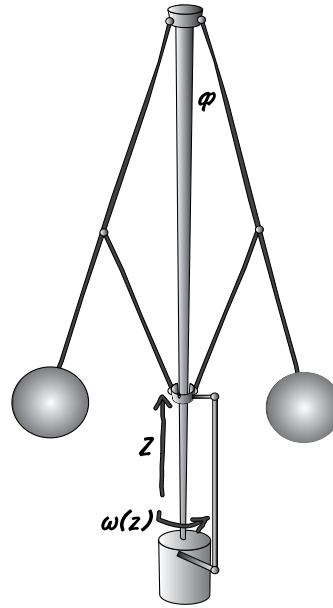
Αφού μάλιστα οι επιταχύνσεις του κεκλιμένου επιπέδου και του ολισθαίνοντος σώματος ως προς το κεκλιμένο επίπεδο είναι ανάλογες, το κεκλιμένο επίπεδο, αν εξαιρέσει κανείς μια πιθανή ομαλή κίνηση που θα μπορούσε να εκτελεί, αναμένεται να εκτελεί και αυτό οριζόντια ταλάντωση με την ίδια συχνότητα  $\omega$ . Μπορούμε μάλιστα να εξετάσουμε τα δύο ακραία όρια των μαζών: (α) Αν  $M \gg m$ , τότε η (7.33) οδηγεί σε μηδενική επιτάχυνση  $\ddot{x}$ , οπότε το σώμα ταλαντώνεται με συχνότητα  $\sqrt{k/m}$ , όπως θα συνέβαινε αν το κεκλιμένο επίπεδο ήταν πακτωμένο. (β) Αν  $M \ll m$ , τότε η οριζόντια θέση του ολισθαίνοντος σώματος  $x + y \cos \phi$  έχει επιτάχυνση μηδενική (βλ. σχέση (7.33)), γεγονός το οποίο σημαίνει ότι, αν αρχικά όλα τα μέρη του συστήματος ήταν ακίνητα, το σώμα αυτό θα παρέμενε στην ίδια οριζόντια θέση, ενώ παράλληλα θα ταλαντωνόταν κατακόρυφα και αντίστοιχα το κεκλιμένο επίπεδο θα ταλαντωνόταν οριζόντια, ώστε τα δύο σώματα να βρίσκονται συνεχώς σε επαφή, με συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m(1+\cos^2\phi)}}.$$

Προφανώς, οι εξισώσεις κίνησης που γράψαμε έχουν ισχύ εφόσον το ολισθαίνον σώμα δεν φτάσει σε αρνητικές  $y$  τιμές, δηλαδή πέρα από το άκρο του κεκλιμένου επιπέδου.

## 7.9 Ρυθμιστής μηχανής του Watt

Στα τέλη του 18ου αιώνα ο εφευρέτης και κατασκευαστής της ομώνυμης ατμομηχανής James Watt [1736-1819] επινόησε τον ακόλουθο μηχανισμό προκειμένου να διατηρείται αυτόματα η ταχύτητα μιας μηχανής



Σχήμα 7.9: Ο αυτόματος ρυθμιστής του Watt διατηρεί την ταχύτητα μιας μηχανής σταθερή.

(βλ. Σχήμα 7.9). Δύο βαρείες μεταλλικές σφαίρες στηριγμένες σε αρθρώσεις αναγκάζονται να περιστρέφονται σύμφωνα με το ρυθμό περιστροφής της μηχανής. Λόγω της περιστροφής τους οι σφαίρες αναγκάζονται να ανυψωθούν ρυθμίζοντας έτσι την παροχή καυσίμου στη μηχανή. Έστω ότι η μηχανή περιστρέφεται με ταχύτητα  $\omega$ . Η γωνιακή αυτή ταχύτητα ρυθμίζεται από το ύψος  $z$  του δακτύλιου, το οποίο με τη σειρά του καθορίζεται από το ύψος στο οποίο ανυψώνονται λόγω φυγοκέντρου οι βραχίονες στους οποίους είναι αναρτημένες οι μεταλλικές σφαίρες. Αν για κάποιο λόγο η ταχύτητα της μηχανής αυξηθεί, οι σφαίρες θα ανυψωθούν και μαζί τους θα ανυψωθεί και ο αρθρωτός δακτύλιος, υποχρεώνοντας τη μηχανή να ελαττώσει ταχύτητα. Η Λαγκρανζιανή του συστήματος αποτελείται από την κινητική και τη δυναμική ενέργεια των σφαιρών. Μπορούμε, μάλιστα, να χρησιμοποιήσουμε τη γωνία ανύψωσης  $\phi$  που σχηματίζουν οι βραχίονες με την κατακόρυφο για να περιγράψουμε τη θέση των σφαιρών. Αν θεωρήσουμε ότι οι βραχίονες στους οποίους αναρτώνται οι σφαίρες έχουν μήκος  $l$  και ότι οι δεύτεροι βραχίονες που συνδέουν το μέσο των πρώτων βραχιόνων με τον δακτύλιο έχουν το μισό μήκος  $l/2$ , η Λαγκρανζιανή του συστήματος λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$L = \frac{1}{2}(2m)l^2(\dot{\phi}^2 + \omega^2 \sin^2 \phi) - 2mgl(1 - \cos \phi) . \quad (7.36)$$

Η εξίσωση κίνησης των σφαιρών είναι

$$\ddot{\phi} = \sin \phi \left( \omega^2 \cos \phi - \frac{g}{l} \right) . \quad (7.37)$$

Αν η συχνότητα περιστροφής είναι αρκετά μικρή (μικρότερη από  $\sqrt{g/l}$ ), η θέση  $\phi = 0$  είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας, αφού η παραπάνω διαφορική εξίσωση μοιάζει με αυτή του αρμονικού ταλαντωτή για μικρά  $\phi$ ,

και οι σφαίρες παραμένουν κολλημένες στον άξονα. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να διατηρούμε την ταχύτητα της μηχανής στη σταθερή τιμή  $\omega_0$ , η οποία ξεπερνά το όριο  $\sqrt{g/l}$ . Είναι προφανές ότι σε αυτή την περίπτωση η θέση  $\phi = 0$  παύει να είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας και εμφανίζεται μια άλλη θέση ισορροπίας, η γωνία  $\phi_0$ , που αποτελεί ρίζα της εξίσωσης

$$\omega^2 \cos \phi - \frac{g}{l} = 0 .$$

Αν αναπτύξουμε το δεύτερο μέλος της διαφορικής εξίσωσης (7.37) γύρω από αυτό το σημείο ισορροπίας μπορούμε να αποδείξουμε ότι αυτό το νέο σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές. Αν μάλιστα εξασφαλίσουμε τον έλεγχο της ταχύτητας περιστροφής ανάλογα με την ανύψωση των σφαιρών, σύμφωνα με το νόμο

$$\omega = \omega_0 + \alpha(\cos \phi - \cos \phi_0) ,$$

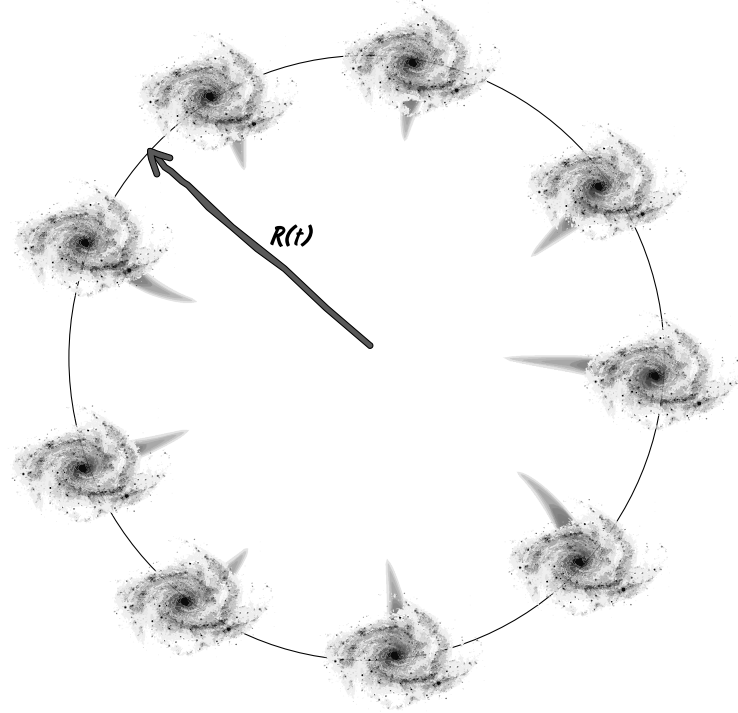
με  $\alpha > 0$ , που συνεπάγεται ελάττωση της ταχύτητας, όταν η γωνία  $\phi$  ξεπεράσει τη θέση ισορροπίας  $\phi_0$ , η μηχανή θα λειτουργεί με σταθερή ταχύτητα. Μπορούμε, επιπλέον, να αποδείξουμε ότι τότε η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων γύρω από τη θέση ισορροπίας θα είναι ακόμη μεγαλύτερη απ' ό,τι αν η συχνότητα δεν μεταβαλλόταν. Τούτο είναι αναμενόμενο αφού ο μηχανισμός κατασκευάστηκε για να προκαλεί ανάδραση. Έτσι, σε κάθε μεταβολή της συχνότητας, οποιουδήποτε είδους τριβή σταθεροποιεί ταχύτερα το σύστημα στη θέση ισορροπίας.<sup>6</sup>

## 7.10 Κοσμολογία σε ένα κλειστό, μονοδιάστατο και σχεδόν ομογενές Σύμπαν

Ας υποθέσουμε ότι ο κόσμος είναι μονοδιάστατος και μάλιστα πεπερασμένος. Θα μπορούσαμε να περιγράψουμε έναν τέτοιο κόσμο έχοντας κατά νου την τοπολογία ενός δακτυλίου. Αν συμπληρώναμε το γεωμετρικό αυτό υπόβαθρο με μάζες, οι οποίες θα έπαιζαν το ρόλο των γαλαξιών αυτού του κόσμου και θα αλληλεπιδρούσαν βαρυτικά μεταξύ τους, θα είχαμε ένα κοσμολογικό μοντέλο γι' αυτό τον κόσμο. Αυτό που θέλουμε να ελέγξουμε είναι πώς θα εξελισσόταν μια ομοιόμορφη κατανομή μαζών κατά μήκος του δακτυλίου σε ένα τέτοιο Σύμπαν. Η βαρυτική δύναμη σε ένα μονοδιάστατο κόσμο —όπως συμβαίνει και με την ελκτική δύναμη δύο φορτισμένων άπειρων πλακών ενός πυκνωτή που είναι ανεξάρτητη της μεταξύ τους απόστασης— αποδεικνύεται ότι είναι σταθερή και ανεξάρτητη από την απόσταση μεταξύ των σωμάτων. Συνεπώς, το αντίστοιχο της νευτώνειας βαρυτικής έλξης δύο μαζών σε ένα μονοδιάστατο κόσμο θα είναι

$$F_{1 \rightarrow 2} = Gm_1m_2 \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|} .$$

<sup>6</sup>Αν, βέβαια, η τριβή είναι ανάλογη με την ταχύτητα κίνησης, ο χρόνος απόσβεσης, όπως γνωρίζουμε από την περίπτωση του ταλαντωτή με απόσβεση, δεν θα εξαρτάται από τη συχνότητα της ταλάντωσης.



Σχήμα 7.10: Το μονοδιάστατο Σύμπαν με τους γαλαξίες του.

Γεννάται, βέβαια, το ερώτημα τι γίνεται όταν η μία διάσταση παρουσιάζει περιοδικές συνθήκες. Σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να λάβουμε τη δύναμη ως ανωτέρω, μετρώντας τις αποστάσεις μεταξύ των μαζών· δεξιόστροφα όμως ή αριστερόστροφα; Θα επιλέξουμε εκείνη τη φορά κατά την οποία η απόσταση των δύο μαζών είναι ελάχιστη.<sup>7</sup> Η δυναμική, λοιπόν, ενέργεια ενός ζεύγους σωματιδίων, οι θέσεις των οποίων σε αυτό τον κόσμο καθορίζονται από τις γωνίες  $\theta_i, \theta_j$ , θα έχει τη μορφή

$$V_{ij}(\theta_i, \theta_j) = G^{(1\circ)} m_i m_j R \left( \min_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} |\theta_i - \theta_j - 2n\pi| \right), \quad (7.38)$$

όπου ο συμβολισμός  $G^{(1\circ)}$  αναφέρεται στη σταθερά της βαρύτητας στο μονοδιάστατο κλειστό Σύμπαν και  $R$  είναι η ακτίνα του δακτυλίου. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι πράγματι η δυναμική ενέργεια της σχέσης (7.38) δημιουργεί μεταξύ δύο μαζών μια ελκτική δύναμη με σταθερό μέτρο και φορά αυτήν του κοντινότερου τόξου που συνδέει τις δύο μάζες, ανεξαρτήτως των πολλαπλασίων του  $2\pi$  που πιθανώς εμπεριέχονται στη μέτρηση της κάθε γωνίας.

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι γεμίζουμε ολόκληρο το δακτυλιοειδές Σύμπαν με ίσες μάζες ομοιόμορφα κατανεμημένες, έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα κανονικό  $N$ -γωνο. Λόγω της κανονικότητας του  $N$ -γώνου οι μάζες θα ισορροπούν στην αρχική τους θέση. Αν, μάλιστα, σας προβλη-

<sup>7</sup>Για ενεργειακούς λόγους θα πρέπει να επιλεγεί εκείνη η φορά που οδηγεί στη μικρότερη δυνατή συνολική δυναμική ενέργεια του πεδίου και, επειδή η δύναμη είναι σταθερή, η έκταση ισχύος της δύναμης πρέπει να είναι η μικρότερη δυνατή, δηλαδή η κοντινότερη απόσταση. Ευχαριστούμε τον Καθηγητή Φ. Χατζηγιάννου για την επισήμανση αυτή.

ματίζει η ευστάθειά τους, υποθέστε ότι ο  $N$  είναι περιττός αριθμός, οπότε, επειδή η δύναμη είναι σταθερή και υπάρχει ίσος αριθμός μαζών στα αριστερά και στα δεξιά της κάθε μάζας, θα ασκείται σε κάθε μάζα μηδενική συνολική δύναμη. Επιπλέον, ακόμη και αν μετακινήσουμε ελαφρώς (λιγότερο από  $2\pi/N$ ) τις μάζες από τη θέση ισορροπίας τους, αυτές θα εξακολουθήσουν όλες να βρίσκονται σε ισορροπία. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι οι γωνιακές θέσεις των μαζών είναι σταθερές στις κορυφές του κανονικού  $N$ -γώνου. Θα επιτρέψουμε όμως στο δακτυλιοειδές αυτό Σύμπαν να έχει μεταβλητή με το χρόνο ακτίνα  $R(t)$ .

Ποια θα είναι τότε η κινητική ενέργεια του συστήματος; Χρειαζόμαστε ένα σύστημα εντός του Σύμπαντος αυτού για να μετράμε ταχύτητες. Αν επιλέξουμε να μετράμε τις ταχύτητες ως προς μία οποιαδήποτε μάζα,<sup>8</sup> η ταχύτητα της  $k$ -οστής μάζας στα δεξιά ή στα αριστερά από τη μάζα που επιλέξαμε θα είναι

$$v_k = \dot{R}(t) \frac{2\pi k}{N}, \quad 1 \leq k \leq \frac{N-1}{2}.$$

Επομένως, η κινητική ενέργεια όλου του Σύμπαντος θα είναι ανάλογη του  $\dot{R}(t)^2$ . Η δυναμική ενέργεια, όντας το άθροισμα όλων των δυναμικών ενεργειών αλληλεπίδρασης των επί μέρους μαζών θα είναι

$$V = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V_{ij} = \frac{N}{2} \sum_{i=1}^{N-1} V_{iN},$$

δηλαδή θα είναι ανάλογη της ακτίνας  $R(t)$ . Συνολικά, η Λαγκρανζιανή του Σύμπαντος θα είναι

$$L = \frac{1}{2} m \alpha \left( \frac{2\pi}{N} \right)^2 \dot{R}^2 - \frac{1}{2} G^{(10)} m^2 \beta \left( \frac{2\pi}{N} \right) R, \quad (7.39)$$

όπου  $\alpha, \beta$  αριθμητικοί παράγοντες που σχετίζονται με το άθροισμα των κινητικών και δυναμικών ενεργειών αντίστοιχα. Συγκεκριμένα,

$$\alpha = 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} k^2 = \frac{N(N-1)(N+1)}{12},$$

–το διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων των σχετικών θέσεων για κάθε ημικύκλιο– και

$$\beta = 2N \sum_{k=1}^{(N-1)/2} k = \frac{N(N-1)(N+1)}{4},$$

–το διπλάσιο του αθροίσματος των σχετικών θέσεων για κάθε ημικύκλιο και για κάθε μάζα. Η εξέλιξη του Σύμπαντος θα διέπεται από τη δυναμική σχέση που υπαγορεύει η εξίσωση Euler - Lagrange

$$\ddot{R} = -G^{(10)} m \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) \frac{N}{4\pi} = -\frac{3G^{(10)}}{4\pi} M_{\text{ολ}} \quad (7.40)$$

<sup>8</sup> Αυτός είναι ουσιαστικά ο αντίστοιχος νόμος του Hubble για το μονοδιάστατο αυτό Σύμπαν, αφού, όσο μακρύτερα βρίσκεται ένα άστρο, τόσο ταχύτερα θα φαίνεται ότι απομακρύνεται.

όπου  $M_{ολ} = Nm$  η ολική μάζα του Σύμπαντος. Με άλλα λόγια το Σύμπαν θα επιβραδύνει την αύξηση της ακτίνας του με σταθερό ρυθμό. Αν ο αρχικός ρυθμός διαστολής του Σύμπαντος ήταν  $\dot{R}(0) = u_0$ , το Σύμπαν θα φτάσει στο μέγιστο μέγεθός του

$$R_{\max} = \frac{2\pi u_0^2}{3G^{(1\circ)}M_{ολ}} \quad (7.41)$$

σε χρόνο

$$T = \frac{4\pi u_0}{3G^{(1\circ)}M_{ολ}} \quad (7.42)$$

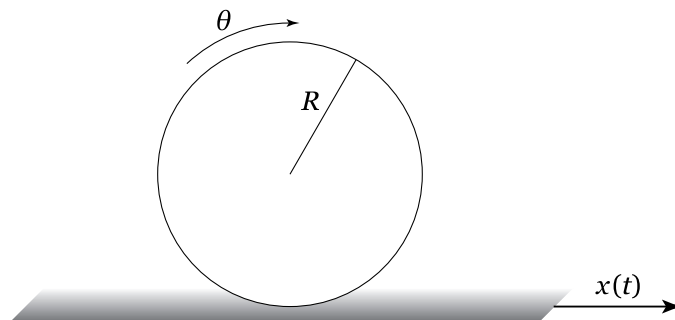
με την προϋπόθεση βέβαια ότι είχε ξεκινήσει με σχεδόν μηδενικές διαστάσεις. Φυσικά, ύστερα από άλλο τόσο χρονικό διάστημα οι διαστάσεις του θα εκμηδενιστούν και πάλι. Από μια άποψη αυτό είναι το μονοδιάστατο ανάλογο του χρονικού της εξέλιξης του πραγματικού μας Σύμπαντος, εφόσον οι μοναδικές δυνάμεις που δρουν είναι οι βαρυτικές έλξεις μεταξύ των συνιστωσών του.

## 7.11 Προβλήματα

- Ένα φορτισμένο σωματίδιο είναι υποχρεωμένο να κινείται επάνω σε ένα επίπεδο. Το σωματίδιο βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, εν γένει πλάγιο σε σχέση με το επίπεδο. Τι μορφή έχει η τροχιά της κίνησης που εκτελεί το σωματίδιο;
- Ένα σωματίδιο κινείται ελεύθερα στην επιφάνεια μίας σφαίρας. Προσδιορίστε την κίνησή του.
- Αβαρές σχοινί περνά γύρω από αβαρή τροχαλία που είναι στηριγμένη στην οροφή ενός δωματίου. Στη μία άκρη του σχοινιού είναι δεμένη μία αρμαθιά μπανάνες μάζας  $M$ , ενώ στην άλλη άκρη ένας πύθης μάζας επίσης  $M$  αναρριχάται με σκοπό να φτάσει τις μπανάνες. Αρχικά ο πύθης και οι μπανάνες δεν βρίσκονται στο ίδιο ύψος. Η σχετική μετατόπιση του πύθης ως προς την άκρη του σχοινιού είναι  $\psi(t)$  με αρχικές συνθήκες  $\psi(0) = \dot{\psi}(0) = 0$ . Γράψτε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση του συστήματος και μελετήστε την κίνηση. Ποιες είναι οι διατηρούμενες ποσότητες και ποια η φυσική σημασία τους. Θα καταφέρει να φτάσει ο πύθης τις μπανάνες;
- Κυκλικός δακτύλιος ακτίνας  $R$  κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει επάνω σε οριζόντιο δάπεδο που κινείται οριζόντια κατά  $x(t)$  όπως στο σχήμα. Η μάζα του δακτυλίου  $M$  είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρεια του. Προσδιορίστε το λόγο της μετατόπισης του κέντρου του δακτυλίου προς τη μετατόπιση του δαπέδου. Θεωρήστε στη συνέχεια ένα νόμισμα με την ίδια συνολική μάζα  $M$ , την ίδια ακτίνα  $R$  και το ίδιο κέντρο μάζας, αλλά με τη μάζα κατανομημένη με τέτοιο τρόπο ώστε η περιστροφική κινητική ενέργεια να είναι

$$\frac{1}{2}M'R^2\dot{\theta}^2,$$

με  $M' < M$ . Προσδιορίστε το νέο λόγο μετατόπισης του κέντρου βάρους προς τη μετατόπιση του δαπέδου. Τι θα συμβεί στις δύο περιπτώσεις, αν τοποθετηθούν δύο δακτύλιοι διαφορετικής ακτίνας, ο ένας δίπλα στον άλλο, στο κινούμενο δάπεδο; Επιβεβαιώστε την απάντησή σας εκτελώντας το πείραμα.



5. Κατασκευάστε τη Λαγκρανζιανή και στη συνέχεια υπολογίστε την κίνηση ενός συστήματος που αποτελείται από ένα δακτύλιο μάζας  $M$  και ακτίνας  $R$ , ο οποίος μπορεί να κυλιέται σε οριζόντιο επίπεδο, και ενός σωματιδίου μάζας  $m$  που ολισθαίνει χωρίς τριβές επάνω στο δακτύλιο ξεκινώντας από το ανώτερο σημείο του δακτυλίου όταν αυτός είναι ακίνητος. Πού βρίσκονται τα δύο σώματα, όταν συμβαίνει ο διαχωρισμός τους;
6. *Η Λαγκρανζιανή μιας έκρηξης:* Θεωρήστε ως απλουστευμένο μοντέλο μιας έκρηξης ένα σύστημα δύο μαζών που μπορούν να κινούνται πάνω σε έναν άξονα δίχως τριβές. Μεταξύ των δύο μαζών υπάρχει συμπιεσμένο ελατήριο, το οποίο κάποια στιγμή αφήνεται ελεύθερο να αποσυμπιεστεί, έως ότου αποκτήσει το φυσικό του μήκος οπότε οι δύο μάζες διαχωρίζονται. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή και υπολογίστε την κίνηση των δύο σωμάτων, αν αρχικά αυτά ήταν ακίνητα. Στο όριο που η σταθερά του ελατηρίου τείνει στο άπειρο, αλλά η ενέργεια του συμπιεσμένου ελατηρίου είναι δεδομένη, ποια είναι η εξίσωση της κίνησης; Έχοντας καταλήξει στο επιθυμητό αποτέλεσμα θα μπορούσατε μήπως να γράψετε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση του συστήματος συμπεριλαμβάνοντας μόνο τις κινητικές ενέργειες των σωμάτων με δεδομένη τη σχετική ταχύτητα των δύο σωμάτων πριν και μετά την εκτίναξη του ελατηρίου;
7. Στηριζόμενοι στο αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης, γράψτε τη Λαγκρανζιανή ενός πυραύλου, ο οποίος προωθείται από την εκτόξευση αερίων με σταθερό ρυθμό και σχετική ταχύτητα  $V$ , απουσία οποιουδήποτε πεδίου. Στη συνέχεια υπολογίστε την εξίσωση κίνησης του πυραύλου.
8. Ένα σωματίδιο κινείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Να αναφέρετε όλες τις συμμετρίες της λαγκρανζιανής συνάρτησης και να προσδιορίσετε τις διατηρούμενες ποσότητες. Να συγκρίνετε κατόπιν τις διατηρούμενες ποσότητες με αυτές που διατηρούνται σε ένα ελεύθερο σωματίδιο.
9. Προσδιορίστε την κίνηση σωματιδίου που κινείται ελεύθερα επί μιας ζώνης του Möbius. Η ζώνη προσδιορίζεται παραμετρικά από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}x &= -v \sin(u/2) \cos(u) + \cos(u), \\y &= -v \sin(u/2) \sin(u) + \sin(u), \\z &= \cos(u/2),\end{aligned}$$

με  $0 \leq v \leq 0.2$  και  $0 \leq u < 4\pi$ .