

Κεφάλαιο 16

Κίνηση στερεών σωμάτων

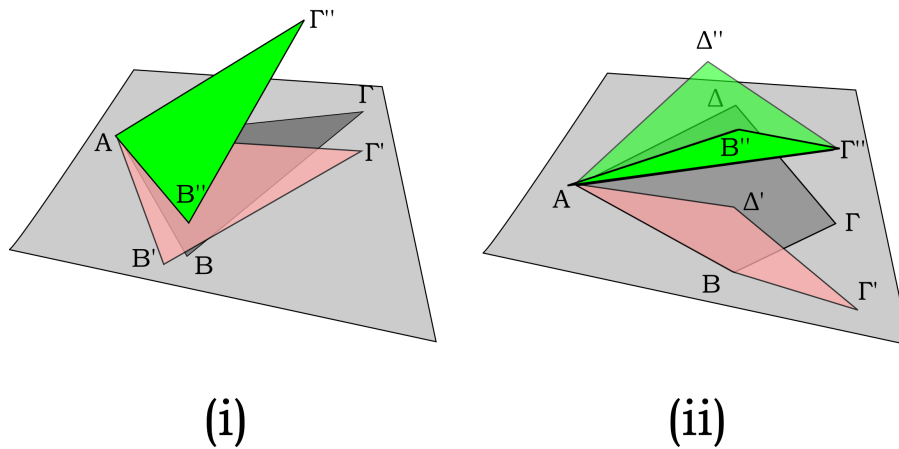
Η θεωρητική ανάλυση της περιστροφής ενός στερεού σώματος προκύπτει αυστηρά από τους βασικούς νόμους της κίνησης. Ωστόσο, η περιπλοκότητα της κίνησης των σωματιδίων ενός σώματος που περιστρέφεται ελεύθερα καθιστά τη μελέτη τόσο αλλόκοτη ώστε η κατανόησή της να είναι εφικτή μόνο από τους πιο έμπειρους μαθηματικούς. Πολλοί, που έχουν διεισδύσει σε βάθος στη σεληνιακή θεωρία, έχουν οδηγηθεί σε λανθασμένα συμπεράσματα για το εν λόγω αντικείμενο· ακόμη και ο ίδιος ο Νεύτωνας επέλεξε να εξαγάγει τις διαταραχές του άξονα της Γης από τη θεωρία του για την στροφή των ισημερινών της αδιατάραχτης τροχιάς, παρά να αντιμετωπίσει ευθέως το πρόβλημα μελετώντας την περιστροφή ενός στερεού σώματος.
J. C. Maxwell¹.

1 Η έννοια του στερεού σώματος

Ο τεχνολογικός πολιτισμός μας είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με την ύπαρξη στερεών σωμάτων τα οποία έχουν συγκεκριμένες διαστάσεις και σχήμα, αντικείμενα των οποίων οι σχετικές αποστάσεις μεταξύ κάποιων καθορισμένων σημείων τους είναι σταθερές, ανεξαρτήτως της κίνησής τους. Είναι αυτή η απαίτηση αρκετή για να καταστήσει ένα αντικείμενο στερεό; Προφανώς όχι, όπως μπορεί κανείς να φανταστεί αν κατασκευάσει ένα τετράπλευρο με δύο συγκεκριμένες έδρες, αλλά ευλύγιστες αρθρώσεις, όπως μια πεταλούδα δηλαδή (βλ. Σχήμα 1). Αντιθέτως ένα τρίγωνο με δεδομένες πλευρές έχει την ίδια μορφή (σχήμα) όπως και αν το μετακινήσουμε. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι ένα αντικείμενο μπορεί να θεωρείται στερεό μόνο αν όλες οι αποστάσεις μεταξύ οιασδήποτε σημείων του είναι σταθερές.

Υπάρχουν τέτοια αντικείμενα στη φύση, εκτός από τον αφηρημένο πλατωνικό κόσμο της γεωμετρίας; Κατά προσέγγιση ναι (εξ' άλλου η γεωμετρία από αυτά τα αντικείμενα ξεπήδησε ως μια πνευματική αφαίρεση). Μια πέτρα, μια κατσαρόλα και ένα διαστημόπλοιο μπορούν κατά πολύ καλή προσέγγιση να θεωρηθούν στερεά σώματα. Η φυσική απαίτηση για την ύπαρξή τους είναι: (α) η μεν ταχύτητα διάδοσης της πληροφορίας, ότι αλλάζει η θέση ενός σημείου του στερεού, σε όλα τα άλλα σημεία αυτού να είναι άπειρη και (β) οι διαμοριακές δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των δομικών του μονάδων (των μορίων του) να είναι απείρως μεγάλες, ώστε να μην επιτρέπουν την παραμόρφωση του αντικειμένου. Οι δύο αυτές συνθήκες είναι στην πραγματικότητα αλληλένδετες αφού η διάδοση της πληροφορίας μετακίνησης των μορίων γίνεται μέσω μηχανικών-ελαστικών κυμάτων στο εσωτερικό του στερεού ενώ η ταχύτητα αυτών είναι

¹ Από το άρθρο του "On a Dynamical Top", p. 248 του W. Niven: The Scientific Papers of James Clerk Maxwell (V. I). Dover 1965.



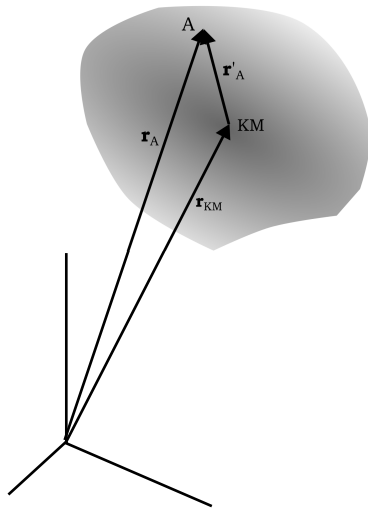
Σχήμα 1: (i) Ένα τρίγωνο όπως και αν στραφεί (ροζ και πράσινη εκδοχή του αρχικού γκρι τριγώνου $AB\Gamma$) παραμένει ίδιο (ίσο) με το αρχικό. (ii) Δεν ισχύει, όμως, το ίδιο για ένα τετράπλευρο (γκρι $AB\Gamma\Delta$) το οποίο μπορεί είτε να γίνει πιο στενόμακρο (ροζ $AB'\Gamma'\Delta'$), είτε να χάσει ακόμη και την επιπεδότητά του (πράσινο $AB''\Gamma''\Delta''$).

συνάρτηση της έντασης των διαμοριακών δυνάμεων (όπως η συχνότητα των ταλαντώσεων –το ανάλογο της ταχύτητας διάδοσης στα ελαστικά κύματα– είναι ανάλογο της \sqrt{k} , όπου k η σταθερά του ελατηρίου η οποία είναι το ανάλογο του μέτρου της ανελαστικότητας του στερεού). Πρακτικά ένα αντικείμενο του οποίου η κατάσταση ισορροπίας απαιτεί οι αποστάσεις μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων του να είναι δοσμένη και στο όριο όπου οι χαρακτηριστικοί χρόνοι μετακίνησης του στερεού είναι πολύ μεγάλοι σε σχέση με το χρόνο μετάδοσης των ελαστικών κυμάτων σε όλο το εύρος του σώματος, μπορεί να θεωρείται στερεό.

2 Κίνηση στερεού σώματος

Έστω λοιπόν ένα τέτοιο στερεό σώμα το οποίο κινείται με οποιονδήποτε τυχαίο τρόπο. Από το σώμα αυτό διακρίνουμε ως ιδιαίτερο σημείο το κέντρο μάζας του (KM), αφού όπως μάθαμε η ενέργεια, η ορμή και η στροφορμή ενός συνόλου σωματιδίων μπορούν εύκολα να διαχωριστούν σε ένα κομμάτι που αφορά στην κίνηση του KM και σε ένα κομμάτι που αφορά στην κίνηση των σωματιδίων ως προς το KM . Έτσι η θέση του εκάστοτε σημείου A του σώματος μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{r}_A(t) = \mathbf{r}_{KM}(t) + \mathbf{r}'_A(t) \quad (1)$$



Σχήμα 2: Η ταχύτητα του σημείου A του στερεού προκύπτει ως το άθροισμα της ταχύτητας περιστροφής του A γύρω από κάποιο σημείο, εδώ το KM, με γωνιακή ταχύτητα ω και της ταχύτητας \mathbf{V}_{KM} του KM, είναι, δηλαδή, $\mathbf{v}_A = \mathbf{V}_{KM} + \omega \times \mathbf{r}'_A$.

που αναπτύσσονται μεταξύ των στοιχείων του στερεού) που δρουν στο στερεό. Αν μάλιστα οι δυνάμεις αυτές είναι μηδενικές θα έχουμε να κάνουμε με ένα ελεύθερο σώμα, το KM του οποίου θα κινείται με σταθερή ταχύτητα και επομένως θα μπορούσε κανείς να “καβαλήσει” αυτό το αδρανειακό σύστημα έτσι ώστε η αρχή των αξόνων του να είναι το ίδιο το KM του.

Αφού

$$|\mathbf{r}'_A(t)| = \text{σταθ}$$

μπορούμε με ασφάλεια να γράψουμε ότι η ταχύτητα του σημείου A ως προς το KM είναι $\mathbf{v}'_A = d\mathbf{r}'_A/dt \perp \mathbf{r}'_A$, οπότε

$$\mathbf{v}'_A = \frac{d\mathbf{r}'_A}{dt} = \omega(\mathbf{r}'_A) \times \mathbf{r}'_A, \quad (2)$$

όπου η $\omega(\mathbf{r}'_A)$ είναι κάποια, ακόμη απροσδιόριστη, διανυσματική συνάρτηση που παίζει το ρόλο της στιγμιαίας γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του \mathbf{r}'_A .

Η συνθήκη (2), ενώ εξασφαλίζει ότι η απόσταση κάθε σημείου από το KM είναι σταθερή, δεν εξασφαλίζει ότι το σώμα κατά την κίνησή του δεν αλλάζει τις σχετικές θέσεις των επί μέρους σημείων, παρότι αυτές παραμένουν σε σταθερή απόσταση από το KM· για παράδειγμα σε ένα ρολόι ο λεπτοδείκτης και ο ωροδείκτης, αν και διατηρούν κατά την κίνησή τους το μήκος τους, η μεταξύ τους γωνία μεταβάλλεται. Μόνο ένας κατάλληλος γραμμικός μετασχηματισμός που θα μετακινούσε συνευθειακά σημεία σε συνευθειακά, θα είχε αυτή την ιδιότητα, γεγονός, όπως θα δούμε παρακάτω, ισοδύναμο με την απαίτηση το ω να μην έχει καμία εξάρτηση από το \mathbf{r}'_A . Η απαίτηση τα σημεία αφενός να διατηρούν σταθερή απόσταση από το KM και αφετέρου η γωνία, με κορυφή το KM, που σχηματίζουν αυτά να είναι σταθερή, ικανοποιείται από τον γραμμικό μετασχηματισμό που επάγεται από μια σχέση σαν τη (2) με ω κοινό. **Απόδειξη:** Έστω ότι οι

όπου το \mathbf{r}'_A δηλώνει τη θέση του σημείου A ως προς το KM. Δεδομένου ότι το αντικείμενο είναι στερεό σώμα θα πρέπει το διάνυσμα \mathbf{r}'_A να έχει σταθερό μέτρο, καθώς επίσης και η γωνία που σχηματίζεται από τις θέσεις $\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}'_B$, δύο οποιωνδήποτε σημείων του στερεού να είναι επίσης σταθερή, δηλαδή, θα πρέπει το εσωτερικό γινόμενο, $\mathbf{r}'_A \cdot \mathbf{r}'_B$, να είναι και αυτό σταθερό. Για την \mathbf{r}_{KM} δεν μπορούμε να πούμε απολύτως τίποτε αφού η κίνηση αυτού υπόκειται στο δυναμικό νόμο του Νεύτωνα σύμφωνα με τη σχέση

$$M\ddot{\mathbf{r}}_{KM} = \mathbf{F}_{ολ}^{(εξωτ)}$$

όπου M η συνολική μάζα του στερεού και $\mathbf{F}_{ολ}^{(εξωτ)}$ η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων (αγνοώντας τις εσωτερικές δυνάμεις

γωνιακές ταχύτητες ω είχαν εξάρτηση από το εκάστοτε \mathbf{r}' . τότε η μεταβολή των θέσεων δύο διαφορετικών σημείων A, B του στερεού θα ικανοποιούσαν τις:

$$\frac{d\mathbf{r}'_A}{dt} = \omega_A \times \mathbf{r}'_A \quad \text{και} \quad \frac{d\mathbf{r}'_B}{dt} = \omega_B \times \mathbf{r}'_B \quad (3)$$

με $\omega_A \neq \omega_B$. Οι (3) εξασφαλίζουν, όπως είπαμε, ότι τα $\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}'_B$ διατηρούν το μέτρο τους, αλλά για να ελέγξουμε ότι διατηρούν και τη σχετική απόσταση $|\mathbf{r}'_A - \mathbf{r}'_B|$, γράφουμε τις (3) ως εξής:

$$\frac{d\mathbf{r}'_A}{dt} = \left(\frac{\omega_A + \omega_B}{2} + \frac{\omega_A - \omega_B}{2} \right) \times \mathbf{r}'_A \quad \text{και} \quad \frac{d\mathbf{r}'_B}{dt} = \left(\frac{\omega_A + \omega_B}{2} + \frac{\omega_A - \omega_B}{2} \right) \times \mathbf{r}'_B. \quad (4)$$

και λαμβάνοντας τη διαφορά τους έχουμε

$$\frac{d(\mathbf{r}'_A - \mathbf{r}'_B)}{dt} = \frac{\omega_A + \omega_B}{2} \times (\mathbf{r}'_A - \mathbf{r}'_B) + \frac{\omega_A - \omega_B}{2} \times (\mathbf{r}'_A + \mathbf{r}'_B). \quad (5)$$

Το πρώτο εξωτερικό γινόμενο του δεξιού σκέλους είναι ορθογώνιο στο $\mathbf{r}'_A - \mathbf{r}'_B$, οπότε εξασφαλίζεται η διατήρηση του $|\mathbf{r}'_A - \mathbf{r}'_B|$, δεν ισχύει όμως το ίδιο και με τον δεύτερο όρο,² εκτός και αν ταυτοτικά (για οποιαδήποτε δύο σημεία) είναι μηδέν, δηλαδή αν

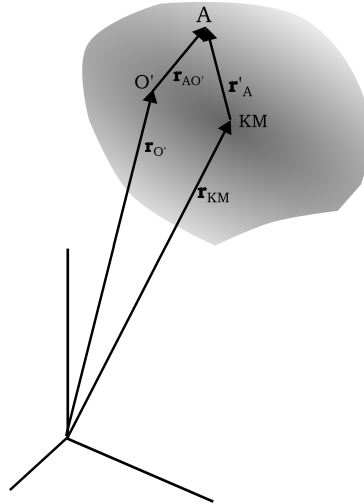
$$\omega_A = \omega_B = \omega. \quad (6)$$

Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι σε κάθε χρονική στιγμή η σχετική κίνηση του στερεού ως προς κάποιο σημείο είναι περιστροφή γύρω από κάποιο άξονα που περνά από το σημείο αυτό. Πιθανώς να σκεφθείτε ότι, βάσει της προηγούμενης ανάλυσης που κάναμε, υπονοείται ότι το σημείο αυτό είναι το ΚΜ. Η απάντηση είναι όχι: Το σημείο στο οποίο αναφερόμαστε είναι οποιοδήποτε σημείο και θα μπορούσε να βρίσκεται ακόμη και εκτός του στερεού! Το συμπέρασμα αυτό είναι συγκλονιστικό και το οφείλουμε στον Leonhard Euler [1707-1783]. Αποδείξαμε προηγουμένως ότι στιγμιαία η ταχύτητα κάθε σημείου του στερεού μπορεί να αναλυθεί στην ταχύτητα ενός σημείου O του στερεού και στην ταχύτητα που προκύπτει από την περιστροφή του στερεού περί το O με γωνιακή ταχύτητα ω .³ Ισοδύναμα, δείξαμε ότι η διαφορική μετατόπιση του σημείου A του στερεού στη θέση \mathbf{r}_A ως προς το σημείο O, του οποίου η θέση είναι \mathbf{r}_O , δίδεται από τη μετατόπιση του σημείου O του στερεού συν μια περιστροφή περί το O με άξονα στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{n}} = \omega/|\omega|$ κατά απειροστή γωνία $\delta\phi = |\omega|\delta t$:

$$\delta\mathbf{r}_A = \delta\mathbf{r}_O + \delta\phi\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}'_A \quad (7)$$

²Ο δεύτερος αυτός όρος θα είναι κάθετος στο $\mathbf{r}'_A - \mathbf{r}'_B$ ακόμη και αν $\omega_A \neq \omega_B$, αν τα \mathbf{r}'_A και \mathbf{r}'_B είναι συγγραμμικά. Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο, αφού αν τα σημεία, βρίσκονται επί της ίδιας ευθείας που τα συνδέει με το ΚΜ, διαφορετικές περιστροφές αυτών δεν θα επιφέρουν αλλαγές στη μεταξύ τους απόσταση σε πρώτη τάξη ως προς το χρονικό διάστημα της περιστροφής, αφού και το $\mathbf{r}'_A - \mathbf{r}'_B$ και το $\mathbf{r}'_A + \mathbf{r}'_B$ είναι συγγραμμικά σε αυτή την περίπτωση. Θα υπάρξει, όμως, διαφοροποίηση σε δεύτερη τάξη ως προς το χρόνο. Ακόμη, λοιπόν, και τέτοια σημεία να είχαμε επιλέξει, θα διαπιστώναμε τελικά αλλαγές αποστάσεων.

³Στην ανάλυση που προηγήθηκε είχαμε θεωρήσει το ΚΜ ως το σημείο O, αλλά η επιλογή αυτή ήταν αυθαίρετη. Θα μπορούσαμε να είχαμε επιλέξει οποιοδήποτε άλλο σημείο.



Σχήμα 3: Η γωνιακή ταχύτητα ω είναι η ίδια σε όλο το στερεό και είναι ανεξάρτητη από το σημείο που επιλέγεται για την ανάλυση της περιστροφής.

Στο σύστημα KM (που είναι αδρανειακό εφόσον οι εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στο στερεό είναι μηδενικές, ειδικά είναι μη αδρανειακό) μια ολόκληρη γραμμή σημείων του στερεού που διέρχεται από το KM παραμένει στιγμιαία ακίνητη και όλα τα άλλα σημεία περιστρέφονται γύρω από αυτήν. Έτσι η ταχύτητα του τυχαίου σημείου A θα έχει στο σύστημα παρατήρησης τη μορφή

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{V}_{KM} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_A . \quad (8)$$

Το ενδιαφέρον και όχι προφανές, είναι όχι μόνο ότι είναι κοινό το διάνυσμα $\boldsymbol{\omega}$ για ολόκληρο το στερεό, αλλά και ότι είναι ανεξάρτητο και από το σημείο αναφοράς. Αν είχαμε διαλέξει κάποιο άλλο σημείο O', αντί του KM, ως αρχή μέτρησης αποστάσεων των σημείων του στερεού, θα είχαμε

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{V}_{KM} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_A \\ &= \mathbf{V}_{KM} + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{r}'_{AO'} + (\mathbf{r}'_A - \mathbf{r}'_{AO'})] \\ &= [\mathbf{V}_{KM} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}'_A - \mathbf{r}'_{AO'})] + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{AO'} , \end{aligned} \quad (9)$$

αλλά $\mathbf{V}_{KM} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}'_A - \mathbf{r}'_{AO'})$ δεν είναι άλλη από την ταχύτητα του σημείου O' του στερεού, $\mathbf{V}_{O'}$, ως προς το αδρανειακό σύστημα και επομένως είναι και πάλι

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{V}_{KM} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_A = \mathbf{V}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{AO'} , \quad (10)$$

που σημαίνει απλά ότι ως προς οποιοδήποτε σημείο του στερεού το στερεό περιστρέφεται γύρω του με την ίδια γωνιακή ταχύτητα (ο Ήλιος γυρίζει γύρω μας με την ίδια συχνότητα, σε όποιο σημείο της Γης και αν βρισκόμαστε).

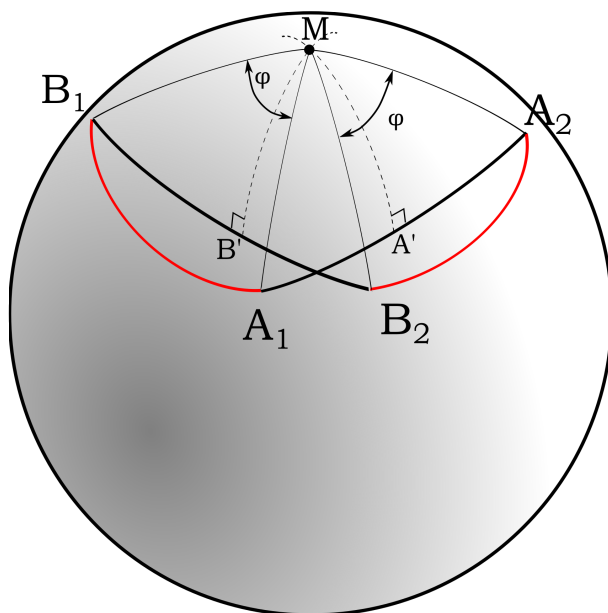
Ο Euler ήταν αυτός που απέδειξε τη γενικότερη πρόταση ότι η πεπερασμένη μετατόπιση ενός στερεού μπορεί να αναλυθεί στη μετάθεση κάποιου σημείου συν μια περιστροφή περί το

σημείο αυτό. Η πρόταση αυτή αν και συνέπεια της προηγούμενης περί διαφορικής περιστροφής, δεν είναι τόσο προφανής. Προκύπτει από την ολοκλήρωση της (7) με γωνιακές ταχύτητες $\omega(t)$ για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα και έτσι η συνολική μετατόπιση κάθε σημείου του στερεού προκύπτει από τη μετατόπιση του σημείου αναφοράς O και μια πεπερασμένης στροφής ολόκληρου του σώματος ως προς κάποιον άξονα που διέρχεται από το O . Αν και η παραπάνω πρόταση είναι προφανής αν η γωνιακή ταχύτητα έχει σταθερή πάντα διεύθυνση, δεν είναι καθόλου προφανής αν η διεύθυνση του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας μεταβάλλεται με το χρόνο.

Πλαίσιο 1: Το θεώρημα του Euler

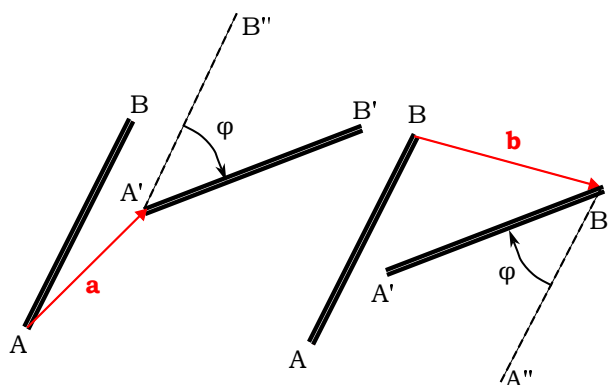
Η μετατόπιση των σημείων ενός στερεού από τη θέση #1 αυτού σε μια καινούργια θέση #2 μπορεί να επιτευχθεί μέσω μιας μετάθεσης και μιας περιστροφής.

Απόδειξη: Διαγράφουμε μία μοναδιαία σφαίρα μέσα στο στερεό^{α'} με κέντρο κάποιο σημείο του στερεού O και ακλόνητα στερωμένη πάνω στο στερεό. Όπως μετατοπίζεται το στερεό έτσι μετατοπίζεται και η σφαίρα, αφού όλα τα σημεία του στερεού βρίσκονται σε δεδομένη απόσταση από το O και η θέση τους αποτυπώνεται στο ίχνος τους πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας (πάνω στην εκάστοτε ακτίνα που συνδέει τα σημεία αυτά με το σημείο O), οπότε η οποιαδήποτε μετατόπιση της σφαίρας συνεπάγεται και την αντίστοιχη μετατόπιση του στερεού. Αρκεί να αποδείξουμε ότι δύο διαφορετικές θέσεις της σφαίρας προκύπτουν από μετάθεση του κέντρου O της σφαίρας στη νέα της θέση με κέντρο το O' και μία κατάλληλη περιστροφή της σφαίρας γύρω από κάποιο άξονα $O'M$. Αφού μεταθέσουμε το O και η μοναδιαία σφαίρα με κέντρο το O συμπίπτει με τη μοναδιαία σφαίρα με κέντρο το O' , σημειώνουμε πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας την αρχική και τελική θέση δύο τόξων A_1B_1 και A_2B_2 , όπου το A_1 έχει μετατοπισθεί στο A_2 και το B_1 στο B_2 (αρκούν δύο σημεία της σφαίρας για να γνωρίζουμε πως στράφηκε ολόκληρο το στερεό). Αν με μία περιστροφή καταφέρουμε να φέρουμε το τόξο A_1B_1 στο A_2B_2 τότε όλα τα σημεία της σφαίρας θα έχουν μετατοπισθεί στις νέες θέσεις των. Προς τούτο ενώνουμε το A_1 με το A_2 με τόξο μεγίστου κύκλου A_1A_2 και το B_1 με το B_2 με το τόξο μεγίστου κύκλου B_1B_2 . Στη συνέχεια από το μέσο A' του A_1A_2 φέρουμε τον μεσοκάθετο μέγιστο κύκλο στο τόξο A_1A_2 καθώς επίσης από το μέσο B' του B_1B_2 φέρουμε τον αντίστοιχο μεσοκάθετο μέγιστο κύκλο (διάστιχτες γραμμές στο Σχ. 4). Έστω M το σημείο τομής των δύο μεσοκαθέτων αυτών μέγιστων κύκλων. Τα σφαιρικά τρίγωνα MA_1B_1 και MA_2B_2 είναι ίσα διότι όλες οι πλευρές τους είναι ίσες, η $A_1B_1=A_2B_2$ επειδή το σώμα είναι στερεό, η $MA_1=MA_2$ διότι το M είναι επί της μεσοκαθέτου MA' του A_1A_2 και $MB_1=MB_2$ για τον ίδιο λόγο. Άρα είναι $\varphi = \angle A_1MB_1 = \angle A_2MB_2$ και $\angle A_1MA_2 = \varphi + \angle A_1MB_2 = \angle B_1MB_2$ και επομένως μία περιστροφή περί τον $O'M$ φέρνει το σφαιρικό τρίγωνο A_1MB_1 επί του A_2MB_2 , όλα τα σημεία του τόξου A_1B_1 στα σημεία του τόξου A_2B_2 , καθώς και όλα τα αρχικά σημεία της σφαίρας στα αντίστοιχα τελικά. Με τον τρόπο αυτόν εντοπίσαμε και τον άξονα περιστροφής $O'M$ και τη γωνία περιστροφής $\angle A_1MA_2$ που απαιτείται για να φέρουμε το στερεό μετά από την απαιτούμενη μετάθεση όλου του σώματος στη νέα του θέση.



Σχήμα 4: Η μετατόπιση του σφαιρικού τόξου A_1B_1 στο A_2B_2 επιτυγχάνεται με περιστροφή της σφαίρας περί τον άξονα OM (ή $O'M$ μετά τη μετατόπιση του κέντρου της σφαίρας) κατά γωνία $\angle A_1MA_2 = \angle B_1MB_2$.

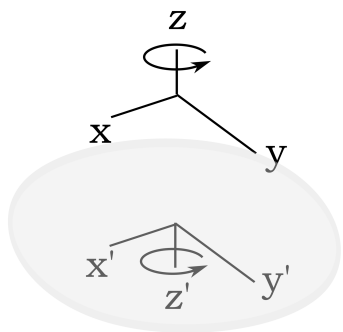
Η κατασκευή αυτή αποδεικνύει επίσης ότι δύο διαδοχικές περιστροφές θα μπορούν και πάλι να περιγραφούν ως μια περιστροφή διότι αν διαδοχικά το τόξο A_1B_1 της μοναδιαίας σφαίρας που είναι προσδεσμένη στο στερεό μεταφερόταν στο A_2B_2 και έπειτα στο τόξο A_3B_3 , τότε και ο μετασχηματισμός $A_1B_1 \rightarrow A_3B_3$ μπορεί να πραγματοποιηθεί με μία περιστροφή ακολουθώντας τα βήματα της παραπάνω κατασκευής. Επίσης η κατασκευή αυτή αποδεικνύει ότι η διεύθυνση του άξονα περιστροφής και η γωνία περιστροφής είναι ανεξάρτητη από το σημείο αναφοράς O του σώματος που επιλέξαμε. Διότι αν επιλέγαμε ένα άλλο σημείο η νέα μοναδιαία σφαίρα με κέντρο το νέο σημείο προκύπτει από την αρχική με μία απλή μετάθεση η οποία δεν αλλάζει τη θέση των σημείων επί της σφαίρας, οπότε η περιστροφή που ακολουθεί για να έρθει το στερεό στη νέα του θέση είναι ακριβώς η ίδια. Όταν αλλάζουμε το σημείο αναφοράς μεταβάλλεται η μετάθεση του στερεού που απαιτείται προκειμένου να έρθει το στερεό στη νέα του θέση, αλλά η περιστροφή είναι η ίδια (βλ. απλό παράδειγμα στο Σχ. 5).



Σχήμα 5: Η στερεά ράβδος AB μετατοπίζεται στη θέση $A'B'$. Τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $A'B'$ είναι συνεπίεδα. Η μετατόπιση αυτή επιτυγχάνεται με μετάθεση του $A \rightarrow A'$ μέσω του διανύσματος \mathbf{a} οπότε $AB \rightarrow A'B''$ και έπειτα με στροφή κατά γωνία φ ώστε $A'B'' \rightarrow A'B'$. Αν είχε επιλεγεί το B ως το σημείο του σώματος περί του οποίου θα γινόταν η περιστροφή, τότε θα μεταθέταμε το $B \rightarrow B'$ μέσω του διανύσματος \mathbf{b} , οπότε $AB \rightarrow A''B'$ που είναι παράλληλο στο AB , και έπειτα θα ακολουθούσε η ίδια στροφή φ για να καταλήξουμε στην τελική θέση $A'B'$.

^a Αν το στερεό αποτελείται από διακριτά σημεία, όπως ένα στερεό μόριο, τότε το γεμίζουμε με σημεία.

2.1 Γωνιακή ταχύτητα



Σχήμα 6: Ο κατοπτρισμός αφήνει αμετάβλητο το διάνυσμα ω .

Η γωνιακή ταχύτητα ω που συναντήσαμε παραπάνω και προέκυψε αβίαστα ως ένα ενιαίο διάνυσμα για ολόκληρο το στερεό προκειμένου να υπολογιστεί η ταχύτητα $\omega \times \mathbf{r}'$ κάθε σημείου του στερεού, ώστε να επιτυγχάνεται η ακαμψία του στερεού, είναι στην πραγματικότητα ένα *ψευδιάνυσμα*. Το γεγονός ότι είναι ψευδοδιάνυσμα σημαίνει ότι το κατοπτρικά συμμετρικό (ως προς κάτοπτρο τοποθετημένο κάθετα στο διάνυσμα ω) σώμα περιστρέφεται και αυτό με την ίδια φορά (βλ. Σχ. 6). Επίσης έχει την ιδιότητα των κλασικών (polar) διανυσμάτων να αθροίζεται όπως τα διανύσματα δηλαδή να είναι

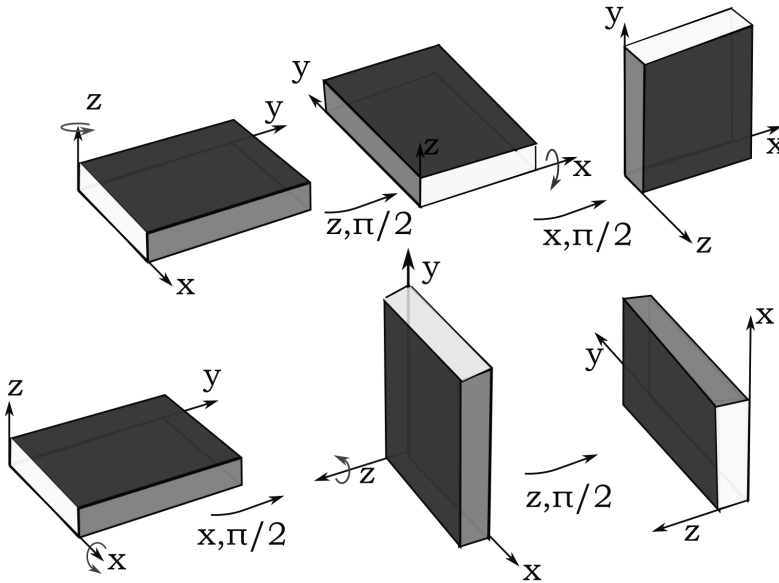
$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_2 + \omega_1, \quad (11)$$

που σημαίνει ότι αν γίνουν δύο διαδοχικές διαφορικές περιστροφές του σημείου A του στερεού περί το ίδιο σημείο O του στερεού κατά γωνία $\omega_1 \delta t$ και $\omega_2 \delta t$,⁴ τότε η τελική μετατόπιση είναι

$$(\omega_1 \times \mathbf{r}'_A + \omega_2 \times \mathbf{r}'_A) \delta t,$$

⁴Με τον συμβολισμό $\omega_i \delta t$ σημειώνουμε το μέτρο της γωνίας περιστροφής καθώς και τον άξονα περιστροφής.

η οποία είναι ανεξάρτητη από τη σειρά που έγιναν οι μετατοπίσεις και επομένως ισχύει η (11).



Σχήμα 7: Άνω σειρά: στροφή κατά $\pi/2$ πρώτα γύρω από τον άξονα z και έπειτα κατά $\pi/2$ γύρω από τον x , κάτω σειρά: οι ίδιες στροφές με την αντίθετη σειρά οδηγούν σε διαφορετική τελική κατάσταση του στερεού.

Αυτό, όμως, δεν ισχύει όταν οι περιστροφές είναι πεπερασμένες. Παρότι διαδοχικές πεπερασμένες περιστροφές περί δύο άξονες είναι ισοδύναμες με μία περιστροφή προς έναν άλλο γενικά άξονα (βλ. απόδειξη θεωρήματος Euler και Πρόβλημα 1), η σειρά που επιτελούνται οι στροφές έχει σημασία ως προς την τελική περιστροφή. Με άλλα λόγια, οι μετασχηματισμοί των πεπερασμένων στροφών γενικά δεν αντιμετατίθενται (βλ. Σχ. 7), εκτός αν γίνονται περί κοινό άξονα.

Η ταχύτητα του σημείου A όταν το σώμα περιστρέφεται περί το O με γωνιακή ταχύτητα ω_1 και ω_2 είναι

$$\mathbf{v}_A = \omega_1 \times \mathbf{r}'_A + \omega_2 \times \mathbf{r}'_A = (\omega_1 + \omega_2) \times \mathbf{r}'_A,$$

που σημαίνει ότι το σώμα τελικά περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 + \omega_2$. Αυτή η ιδιότητα θα μας φανεί ιδιαίτερος χρήσιμη. Αν ένα στερεό περιστρέφεται περί έναν άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω_1 , περί ένα δεύτερο άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω_2 , και περί έναν ν -οστό άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω_ν , τότε η γωνιακή ταχύτητα του σώματος είναι

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_\nu, \quad (12)$$

αρκεί βεβαίως όλες οι στροφές να γίνονται περί την ίδια αρχή.

Στο εξής θα εργαστούμε στο σύστημα ΚΜ (είτε αυτό είναι αδρανειακό, είτε όχι) προκειμένου να μελετήσουμε την περιστροφή ενός σώματος. Για το λόγο αυτό θα γράφουμε πλέον \mathbf{r} , αντί για \mathbf{r}' και θα εννοούμε (εκτός αν επισημαίνεται κάτι διαφορετικό) τη θέση ενός σημείου του στερεού ως προς το ΚΜ αυτού.

2.2 Εύρεση του άξονα περιστροφής

Εκτελώντας μετρήσεις πάνω στο στερεό μπορούμε, αλήθεια, να βρούμε το διάνυσμα $\boldsymbol{\omega}$; Προφανώς αρκεί να εντοπίσουμε τα σημεία του στερεού τα οποία δεν κινούνται (στιγμιαία⁵), προκειμένου να καθορίσουμε τη διεύθυνση της $\boldsymbol{\omega}$ και στη συνέχεια να μετρήσουμε πώς κινείται ένα άλλο σημείο εκτός αυτού του άξονα προκειμένου να μετρήσουμε το μέτρο της $\boldsymbol{\omega}$. Εμείς θα μετρήσουμε το διάνυσμα της $\boldsymbol{\omega}$ με τις ελάχιστες δυνατές πληροφορίες. Θα διαλέξουμε ένα σημείο \mathbf{r}_A και θα μετρήσουμε την ταχύτητα \mathbf{v}_A αυτού, η οποία θα είναι κάθετη στο \mathbf{r}_A (λόγω της (2)). Στη συνέχεια θα κινηθούμε κάθετα στα \mathbf{r}_A και \mathbf{v}_A σε ένα νέο σημείο B, με $|\mathbf{r}_B| = |\mathbf{r}_A|$. Η θέση του σημείου B μπορεί να κατασκευαστεί βάσει των στοιχείων του A ως εξής:

$$\mathbf{r}_B = \frac{\mathbf{v}_A}{|\mathbf{v}_A|} \times \mathbf{r}_A . \quad (13)$$

Ο ορισμός αυτός του \mathbf{r}_B επιτρέπει το προσδιορισμό του επιπέδου του διανύσματος $\boldsymbol{\omega}$, διότι επειδή $\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A$ έχουμε από την (13)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_B &= \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A) \times \mathbf{r}_A}{|\mathbf{v}_A|} \\ &= -\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_A}{|\mathbf{v}_A|} \mathbf{r}_A + \frac{|\mathbf{r}_A|^2}{|\mathbf{v}_A|} \boldsymbol{\omega} , \end{aligned}$$

δηλαδή τα τρία διανύσματα $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{r}_B και \mathbf{r}_A είναι συνεπίπεδα και έτσι η ταχύτητα του σημείου B:

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_B ,$$

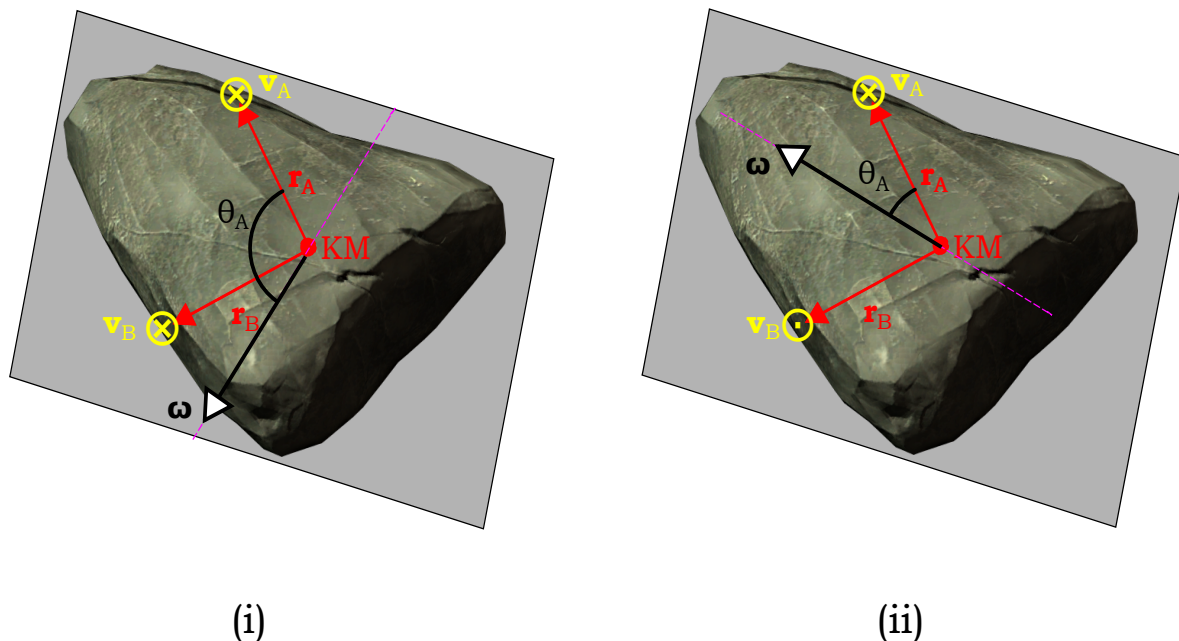
που είναι κάθετη στο επίπεδο των $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{r}_B είναι κάθετη και στο \mathbf{r}_A και επομένως οι ταχύτητες $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ είναι συγγραμμικές.⁶

⁵Αφού ο άξονας περιστροφής ενδέχεται να αλλάζει θέση και προσανατολισμό εντός του στερεού.

⁶Αυτό φαίνεται και με κατευθείαν υπολογισμό. Πράγματι, εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις (8.11,8.14) για τα τριπλά γινόμενα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_B) \\ &= \boldsymbol{\omega} (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r}_B) - \mathbf{r}_B (\mathbf{v}_A \cdot \boldsymbol{\omega}) \\ &= \boldsymbol{\omega} (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r}_B) - \mathbf{r}_B [(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A) \cdot \boldsymbol{\omega}] \\ &= \mathbf{0} . \end{aligned}$$

Το αριστερό εσωτερικό γινόμενο είναι 0 επειδή το \mathbf{r}_B κατασκευάστηκε ορθογώνιο και στο \mathbf{r}_A και στο \mathbf{v}_A , ενώ το δεξιά είναι 0 από την ιδιότητα του εξωτερικού γινομένου να είναι κάθετο στα δύο διανύσματα που το συνθέτουν.



Σχήμα 8: Μια πέτρα που κινείται στο χώρο, όπως τη βλέπουμε στο σύστημα KM. Διαλέγουμε δύο σημεία A,B στην πέτρα, έτσι ώστε $|\mathbf{r}_A| = |\mathbf{r}_B|$ και $\mathbf{r}_A \perp \mathbf{r}_B$ και με το επίπεδο των $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ (γκρι επίπεδο) κάθετο στις ταχύτητες \mathbf{v}_A και \mathbf{v}_B . Αν οι $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ είναι ομόρροπες το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας ω (που βρίσκεται στο επίπεδο των $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ αφήνει τα δύο διανύσματα από την ίδια πλευρά (i). Αν είναι αντίρροπες τα $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ βρίσκονται εκατέρωθεν του ω (ii). Το μέτρο του ω και η γωνία που σχηματίζει με το \mathbf{r}_A δίνονται από τις σχέσεις (14,80).

Τα τέσσερα λοιπόν διανύσματα $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ έχουν την ακόλουθη χωροταξική διεύθυνση: Τα $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ είναι κάθετα στο επίπεδο των $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ τα οποία σχηματίζουν ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο. Οι δε κάθετες σε αυτό ταχύτητες $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ μπορεί να είναι είτε ομόρροπες, είτε αντίρροπες, μεταξύ τους. Υπολογίζοντας τα μέτρα των δύο ταχυτήτων θα έχουμε

$$v_A = \omega r \sin \theta_A \quad \text{και} \quad v_B = \omega r \sin \theta_B ,$$

όπου $r = |\mathbf{r}_A| = |\mathbf{r}_B|$ και θ_A, θ_B οι άνευ προσήμου γωνίες που σχηματίζουν τα $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ με το διάνυσμα του ω , το οποίο βρίσκεται στο επίπεδο των $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$. Δεδομένης επίσης της καθετότητας των $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ θα είναι $\sin \theta_B = |\cos \theta_A|$, αφού οι γωνίες μεταξύ δύο διανυσμάτων είναι και οι δύο μικρότερες του π αλλά μεταξύ τους διαφέρουν κατά $\pi/2$. Υψώνοντας στο τετράγωνο την τελευταία σχέση έχουμε

$$v_A^2 + v_B^2 = \omega^2 r^2 \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{v_A^2 + v_B^2}}{r} . \quad (14)$$

Η δε γωνία θ_A που σχηματίζει το ω με το \mathbf{r}_A (μετρώντας την ως θετική αν στραφεί κατ' αυτήν

το ω προς το \mathbf{r}_A κατά τη συντομότερη γωνία) θα είναι

$$\sin \theta_A = \frac{v_A}{\sqrt{v_A^2 + v_B^2}} . \quad (15)$$

Προφανώς υπάρχουν δύο γωνίες θ_A που έχουν αυτό το ημίτονο· μία οξεία και μία αμβλεία. Η ταχύτητα του B είναι αυτή που θα καθορίσει ποια από τις δύο θα επιλέξουμε. Αν το \mathbf{r}_B ληφθεί στην κατεύθυνση $\mathbf{r}_A \times \mathbf{v}_A$, τότε αν η \mathbf{v}_B είναι ομόρροπη με την \mathbf{v}_A θα πρέπει να επιλέξουμε την αμβλεία γωνία της (80) (και το \mathbf{r}_A και το \mathbf{r}_B θα βρίσκονται στην ίδια πλευρά του ω), αλλιώς θα επιλέξουμε την οξεία γωνία (το \mathbf{r}_A και το \mathbf{r}_B εκατέρωθεν του ω). Δείτε το Σχήμα 25 για να καταλάβετε καλύτερα τη διάταξη των διαφόρων διανυσμάτων.

Έχοντας καθορίσει το διάνυσμα ω , έχουμε καθορίσει τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής του σώματος και τον στιγμιαίο ρυθμό περιστροφής. Το διάνυσμα αυτό είναι το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του σώματος το οποίο είναι, όπως προαναφέραμε, ψευδοδιάνυσμα, αφού το κατοπτρικά συμμετρικό, ως προς επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα ω , σώμα περιστρέφεται και αυτό με την ίδια φορά. Ο άξονας περιστροφής (μωβ διάστικτη γραμμή στο Σχ. 25), επί του οποίου τα σημεία του στερεού είναι ακίνητα, εν γένει κινείται στο χώρο αλλά αλλάζει και την κατεύθυνσή του και ως προς το στερεό.

2.3 Εύρεση στιγμιαίου κέντρου περιστροφής

Υπάρχει κάποιο σημείο του χώρου το οποίο είναι στιγμιαία ακίνητο ώστε η στιγμιαία κίνηση του στερεού να είναι καθαρά περιστροφική γύρω από άξονα που διέρχεται από αυτό το σημείο; Αν υπάρχει τότε η ταχύτητα των σημείων του στερεού πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathbf{V}_{KM} + \omega \times \mathbf{r}_{KM} = \omega \times \mathbf{r}_O , \quad (16)$$

σύμφωνα με την διττή ανάλυση της ταχύτητας της (10). Στην παραπάνω σχέση \mathbf{r}_O είναι η θέση των σημείων του στερεού ως προς το στιγμιαίο αυτό κέντρο περιστροφής, O. Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα $\omega \times \mathbf{r}_O$ είναι κάθετη στη στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα ω και επομένως αν η \mathbf{V}_{KM} δεν είναι κάθετη στην ω , δεν είναι δυνατόν να ικανοποιηθεί η (16). Επομένως, αν είναι $\mathbf{V}_{KM} \cdot \omega = 0$, τότε υπάρχει σημείο του χώρου το οποίο είναι στιγμιαίο κέντρο περιστροφής. Το σημείο αυτό εντοπίζεται λύνοντας ως προς $\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_{KM}$ την (16). Μία ειδική περίπτωση, στην οποία η παραπάνω συνθήκη αυτομάτως ικανοποιείται, είναι η περίπτωση της επίπεδης κίνησης, κατά την οποία το στερεό κινείται πάνω σε μια επίπεδη επιφάνεια με όλα του τα σημεία να κινούνται παράλληλα στην επιφάνεια αυτή. Προσέξτε ότι η συνθήκη $\mathbf{V}_{KM} \cdot \omega = 0$ δεν εξαρτάται από το σημείο που έχει επιλεγεί ως σημείο αναφοράς στο στερεό. Αν είχε επιλεγεί το $O' \neq KM$, τότε και πάλι θα είναι $\mathbf{V}_{O'} \cdot \omega = 0$, δεδομένου ότι οι ταχύτητες των σημείων του στερεού θα αναλύονταν ισοδύναμα ως

$$\mathbf{V}_{KM} + \omega \times \mathbf{r}_{KM} = \mathbf{V}_{O'} + \omega \times \mathbf{r}_{O'} . \quad (17)$$

Αν τώρα η \mathbf{V}_{KM} δεν είναι κάθετη στο $\boldsymbol{\omega}$, τότε δεν είναι δυνατό να βρούμε ακίνητο κέντρο περιστροφής και το πλησιέστερο σε αυτό που μπορούμε να επιτύχουμε είναι με κατάλληλη επιλογή του σημείου O να μηδενίσουμε μόνο την κάθετη συνιστώσα της \mathbf{V}_{KM}

$$\mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{V}_{KM} - \frac{\mathbf{V}_{KM} \cdot \boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2} \boldsymbol{\omega}, \quad (18)$$

και να παραμείνει η παράλληλη στην $\boldsymbol{\omega}$ κίνηση του O

$$\mathbf{V}_{\parallel} = \frac{\mathbf{V}_{KM} \cdot \boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2} \boldsymbol{\omega}, \quad (19)$$

αναλλοίωτη. Έτσι με αυτή την επιλογή της αρχής μπορούμε να περιγράψουμε τη στιγμιαία κίνηση του στερεού ως τη ελικοειδή κίνηση ενός κοχλίου

$$\mathbf{V}_{\parallel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{O'}, \quad (20)$$

κατά την οποία κινούμαστε στη διεύθυνση της στιγμιαίας γωνιακής ταχύτητας καθώς περιστρέφουμε με αυτήν τη γωνιακή ταχύτητα.

3 Τανυστής αδράνειας στερεού

Επειδή η ταχύτητα των σημείων του στερεού εξαρτάται γραμμικά από τη γωνιακή ταχύτητα του στερεού, η στροφορμή του θα έχει γραμμική εξάρτηση και η κινητική ενέργειά του τετραγωνική εξάρτηση από τη γωνιακή ταχύτητα. Ωστόσο, ενώ για μία σημειακή μάζα η κινητική ενέργεια και η στροφορμή είναι ανάλογες της μάζας του σωματιδίου, η οποία είναι ένα βαθμωτό μέγεθος, σε ένα στερεό σώμα ο αντίστοιχος συντελεστής αναλογίας που προσδιορίζει την αδράνεια του σώματος δεν είναι βαθμωτό μέγεθος αλλά ένας τανυστής, που ονομάζεται τανυστής αδράνειας, με συνέπεια η κινητική ενέργεια και το μέτρο της στροφορμής του στερεού να εξαρτάται από τη διεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας. Ένα μολύβι που το περιστρέφετε ανάμεσα στα δάχτυλά σας έχει πολύ διαφορετική στροφορμή και κινητική ενέργεια αν στρέφεται με συγκεκριμένου μέτρου γωνιακή ταχύτητα γύρω από τον άξονα συμμετρίας του μολυβιού ή κάθετα σε αυτόν!

Προκειμένου να υπολογίσουμε την αδράνεια ενός στερεού θα ξεκινήσουμε από τον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας του στερεού στο σύστημα ΚΜ. Για να προσδιορίσουμε την κινητική ενέργεια ως προς το ΚΜ αρκεί να προσθέσουμε (ολοκληρώσουμε) τις κινητικές ενέργειες όλων των στοιχειωδών μαζών που απαρτίζουν το στερεό. Θα έχουμε λοιπόν, στη συνεχή προσέγγιση του στερεού:

$$K = \frac{1}{2} \int_V dm(\mathbf{r}) |\mathbf{v}|^2 = \frac{1}{2} \int_V dm(\mathbf{r}) |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2 = \frac{1}{2} \int_V dm(\mathbf{r}) [|\boldsymbol{\omega}|^2 |\mathbf{r}|^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2]. \quad (21)$$

Στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε “χειρουργικά” το διάνυσμα ω από το ολοκλήρωμα με τη χρήση δεικτών γράφοντας τον όρο $|\omega|^2|\mathbf{r}|^2 = \omega_i\omega_j\delta_{ij}r_kr_k$ και τον όρο $(\omega \cdot \mathbf{r})^2 = (\omega_ir_i)(\omega_jr_j)$, οπότε η κινητική ενέργεια θα λάβει τη μορφή:

$$K = \frac{1}{2} \left(\int_V dm(\mathbf{r}) [r_kr_k\delta_{ij} - r_ir_j] \right) \omega_i\omega_j, \quad (22)$$

όπου η επιλογή των δεικτών υπήρξε ιδιαίτερα προσεκτική ώστε τα δύο ω που πολλαπλασίασαν τους δύο όρους του ολοκληρώματος να εμφανίζονται με ίδιο όνομα εικονικών δεικτών. Η ποσότητα που πολλαπλασιάζει τις γωνιακές ταχύτητες και αφορά στην κατανομή μάζας εντός του στερεού

$$I_{ij} = \int_V dm(\mathbf{r}) [r_kr_k\delta_{ij} - r_ir_j], \quad (23)$$

ονομάζεται *τανυστής αδράνειας* του στερεού και αποτελείται συνολικά από 9 συνιστώσες. Είναι τανυστής 2ης τάξης αφού κατασκευάζεται από άλλους τανυστές (δ_{ij}, r_ir_j) και μάλιστα συμμετρικός αφού είναι $I_{ij} = I_{ji}$ και επομένως προσδιορίζεται από 6 ανεξάρτητα στοιχεία, τα τρία διαγώνια στοιχεία

$$I_{xx} = \int_V dm (y^2 + z^2), \quad I_{yy} = \int_V dm (x^2 + z^2), \quad I_{zz} = \int_V dm (x^2 + y^2),$$

που ονομάζονται *ροπές αδράνειας* ως προς τους άξονες x, y και z και τα τρία μη διαγώνια στοιχεία

$$I_{xy} = - \int_V dm xy, \quad I_{xz} = - \int_V dm xz, \quad I_{yz} = - \int_V dm yz.$$

Γενικότερα, η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς ένα τυχαίο άξονα K δίνεται από την ποσότητα

$$I_K = \int_V dm \rho_{\perp}^2, \quad (24)$$

όπου ρ_{\perp} η απόσταση των διαφόρων σημείων του σώματος από τον εν λόγω άξονα. Ο τανυστής αδράνειας έχει αρκετές ομοιότητες με τον τανυστή τετραπολικής ροπής \mathbb{Q}_{ij} ⁷ που συναντήσαμε στο Κεφάλαιο 15.

⁷Ο I_{ij} έχει ίδιες διαστάσεις και δομή με τον \mathbb{Q}_{ij} , αλλά ο

$$\mathbb{Q}_{ij} = -3 \int_V dm(\mathbf{r}) \left[\frac{1}{3} r_k r_k \delta_{ij} - r_i r_j \right]$$

είναι άιχνος και διαφοροποιείται κατά έναν επιπλέον παράγοντα 3, ακόμη και όταν ο I_{ij} καταστεί άιχνος.

Αν γνωρίζουμε τις 6 συνιστώσες του τανυστή αδράνειας⁸ του I_{ij} , τότε η κινητική ενέργεια του στερεού γράφεται

$$K = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j . \quad (25)$$

Το αποτέλεσμα αυτό θα μπορούσε να γραφεί και υπό μορφή πολλαπλασιασμού πινάκων ως

$$K = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} ,$$

με $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^\top$ και

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} ,$$

ο 3×3 πίνακας που σχηματίζουν τα 9 στοιχεία I_{ij} . Το αποτέλεσμα αυτού του πολλαπλασιασμού, όπως εύκολα μπορείτε να δείξετε, είναι ένα ζ αριθμός (βαθμωτό μέγεθος), όπως θα περίμενε κανείς για την κινητική ενέργεια ενός σώματος.

Η ολική στροφορμή του στερεού ως προς το ΚΜ θα είναι αντίστοιχα

$$\mathbf{L} = \int_V dm(\mathbf{r}) \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \int_V dm(\mathbf{r}) \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \int_V dm(\mathbf{r}) [|\mathbf{r}|^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}] ,$$

δηλαδή είναι:

$$L_i = \int_V dm(\mathbf{r}) [r_k r_k \delta_{ij} \omega_j - r_i r_j \omega_j] = I_{ij} \omega_j , \quad (26)$$

και επομένως η κινητική ενέργεια που γράψαμε παραπάνω (25) μπορεί να συσχετιστεί με τη στροφορμή ως ακολούθως:

$$K = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} . \quad (27)$$

Η (26) δείχνει ότι το διάνυσμα της στροφορμής και της γωνιακής ταχύτητας δεν είναι γενικά στην ίδια διεύθυνση. Υπάρχουν ισοτροπικά σώματα στα οποία είναι $I_{ij} = I \delta_{ij}$ και τότε η στροφορμή είναι συγγραμμική με τη γωνιακή ταχύτητα αλλά αυτές οι περιπτώσεις είναι ξεχωριστές. Αναφερόμενοι σε σώματα ομογενή αυτή την ιδιότητα έχουν τα σφαιρικά σώματα και, όπως θα δούμε, και τα 5 πλατωνικά στερεά (τα κανονικά πολύεδρα: το τετραέδρο, ο κύβος, το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο).

⁸Στην πραγματικότητα μόνο 3 συνιστώσες είναι αρκετές για να καθοριστούν όλες, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια.

Εκτελώντας στροφές του συστήματος συντεταγμένων μπορούμε να αλλάξουμε τις συνιστώσες του τανυστή αδράνειας I_{ij} , χωρίς να αλλάξουμε το γεωμετρο-φυσικό του περιεχόμενο (όπως ένα διάνυσμα παραμένει το ίδιο γεωμετρικό αντικείμενο παρόλο που σε ένα στραμμένο σύστημα αναφοράς έχει διαφορετικές συνιστώσες). Κατ' αναλογία, λοιπόν, όπως με μια κατάλληλη στροφή μπορούμε να κάνουμε ένα διάνυσμα να έχει όλες του τις συνιστώσες 0 εκτός από μια, έτσι μπορούμε και έναν συμμετρικό τανυστή 2ης τάξης να τον στρέψουμε έτσι ώστε αυτός να καταστεί διαγώνιος:⁹

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

και τότε τα τρία ανεξάρτητα στοιχεία του διαγωνοποιημένου \mathbf{I} ονομάζονται *κύριες ροπές αδράνειας* του σώματος. Οι νέοι αυτοί καρτεσιανοί άξονες (κατόπιν της κατάλληλης στροφής) στους οποίους ο I_{ij} διαγωνιοποιείται, ονομάζονται *κύριοι άξονες* του στερεού. Οι τρεις τιμές I_1, I_2, I_3 είναι το ανάλογο του μήκους ενός διανύσματος για τον τανυστή 2ης τάξης I_{ij} και αποτελούν το μη αναγώγιμο κομμάτι του τανυστή (ο τανυστής δεν μπορεί να λάβει πιο απλή μορφή από αυτή τη διαγώνια αναπαράστασή του). Από αυτές τις τρεις τιμές προκύπτει κάθε άλλη μορφή του I_{ij} , αν οι άξονες επιλεγθούν τυχαία. Ο λόγος που μόνο 3 είναι οι πραγματικά ανεξάρτητες τιμές του I_{ij} , οφείλεται στο ότι οι διάφορες δυνατές στροφές καθορίζονται από τρεις παραμέτρους στροφών, οπότε οι 6 διαφορετικές συνιστώσες του I_{ij} (λόγω συμμετρικότητας του τανυστή) ρυθμίζονται μέσω των τριών αυτών παραμέτρων. Έτσι μένουν μόνο 3 πραγματικά ανεξάρτητες οντότητες.¹⁰

Οι τρεις κατευθύνσεις (κύριοι άξονες) και οι αντίστοιχες κύριες ροπές, μπορούν να βρεθούν από τη λύση του συστήματος διαγωνιοποίησης του \mathbf{I} :

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K \end{pmatrix} = I_K \begin{pmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K \end{pmatrix},$$

⁹Για παράδειγμα, ο τανυστής $C_{ij} = r_i r_j$, σε εκείνο το σύστημα συντεταγμένων όπου το \mathbf{r} παίρνει τη μορφή $(|\mathbf{r}|, 0, 0)$ (δηλαδή με τον άξονα x στραμμένο στην κατεύθυνση του \mathbf{r}), λαμβάνει την ιδιαίτερα απλή μορφή

$$\begin{pmatrix} |\mathbf{r}|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

¹⁰Μπορούμε απλά να γράψουμε ότι οι συνιστώσες του συμμετρικού τανυστή σε τυχαίους ορθογώνιους άξονες με αρχή το ΚΜ του στερεού δίνεται από μια συνάρτηση

$$I_{ij} = I_{ij}(I_1, I_2, I_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

των 3 κύριων ροπών αδράνειας και των τριών παραμέτρων α_n που χρησιμοποιούνται για να καθορίσουμε τις θέσεις των αξόνων σε σχέση με τους κύριους άξονες.

όπου το μονόστηλο διάνυσμα $(x_K, y_K, z_K)^\top$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\hat{\mathbf{e}}_K = (\sin \theta_K \cos \phi_K, \sin \theta_K \sin \phi_K, \cos \theta_K)^\top{}^{11}$$

με σφαιρικές συντεταγμένες (θ_K, ϕ_K) που δείχνει τη διεύθυνση του κύριου άξονα K γύρω από τον οποίο η κύρια ροπή αδράνειας παίρνει την τιμή I_K .¹²

Η πιο περίπλοκη περίπτωση προκύπτει όταν όλες οι κύριες ροπές αδράνειας του στερεού, I_1, I_2, I_3 είναι όλες άνισες μεταξύ τους. Το στερεό ονομάζεται τότε *ασύμμετρος στροβός* (*asymmetrical top*). Αν δύο από τις ροπές αδράνειας είναι ίσες $I_1 = I_2$, τότε το στερεό ονομάζεται *συμμετρικός στροβός* (*symmetrical top*). Η περίπτωση αυτή ανακύπτει συνήθως, όπως θα δούμε, όταν το σώμα παρουσιάζει κάποια συμμετρία εκ περιστροφής ως προς ένα κύριο άξονα (κατά σύμβαση θα θεωρήσουμε ότι πρόκειται για τον άξονα 3), όπως, για παράδειγμα ένα “τέλειο” αχλάδι.

Η μελέτη της κίνησης του στερεού απλοποιείται ιδιαίτερα όταν όλες οι ροπές αδράνειας είναι ίσες. Τότε το στερεό ονομάζεται *σφαιρικός στροβός* (*spherical top*). Σφαιρικοί στροβοί δεν είναι μόνο τα ομογενή στερεά σφαιρικού σχήματος και, όπως προαναφέρθηκε, τα ομογενή 5 πλατωνικά στερεά, αλλά και στερεά σώματα τυχαίου σχήματος με κατάλληλη κατανομή μάζας ώστε να καταστούν σφαιρικοί στροβοί.

Άσκηση 1

Προσδιορίστε την ροπή αδράνειας στερεού που περιστρέφεται γύρω από άξονα που βρίσκεται στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{e}}_K$.

Απάντηση: Θα δείξουμε ότι η ροπή αδράνειας του σώματος, όταν αυτό περιστρέφεται γύρω από έναν οποιονδήποτε άξονα K στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{e}}_K$ δίνεται από

$$I_K = \hat{\mathbf{e}}_K^\top \mathbf{I} \hat{\mathbf{e}}_K, \quad (28)$$

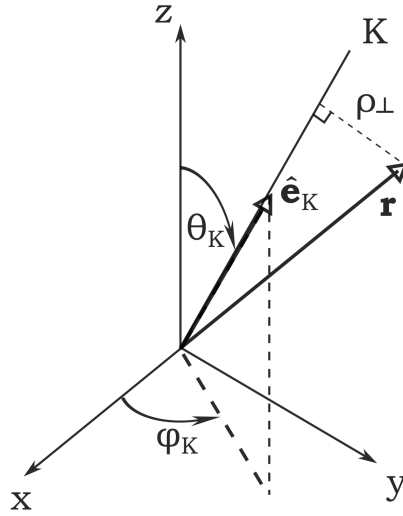
και η περιστροφική κινητική ενέργεια του σώματος δίνεται τότε από το γνωστό τύπο

$$K_K = \frac{1}{2} I_K \omega^2, \quad (29)$$

δεδομένου ότι έχουμε θεωρήσει ότι η γωνιακή ταχύτητα του σώματος γράφεται $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{e}}_K$.

¹¹ Αν και μοιάζει να είναι δύο και όχι τρεις οι γωνιακές παράμετροι που καθορίζουν τους άξονες στους οποίους ο τανυστής ροπής αδράνειας λαμβάνει διαγώνια μορφή, αυτό ισχύει για τον καθορισμό του ενός μόνο από τους τρεις κύριους άξονες. Απομένει άλλη μια γωνιακή παράμετρος για να καθοριστούν οι διευθύνσεις των άλλων δύο κύριων ορθογώνιων αξόνων αφού έχουμε την ελευθερία να περιστρέψουμε όπως επιθυμούμε το επίπεδο των άλλων δύο αξόνων που είναι κάθετοι στον πρώτο.

¹² Επιλέξαμε να σημειώσουμε την κατεύθυνση και τη συνιστώσα της κύριας ροπής αδράνειας με κεφαλαίο K για να μην υπάρξει σύγχυση με τους άξονες και τις συνιστώσες του I_{ij} στο αρχικό σύστημα αξόνων, στο οποίο μας δίνεται το \mathbf{I} .



Σχήμα 9: Η ροπή αδράνειας του σώματος όταν περιστρέφεται περί τον άξονα K είναι $I_K = \hat{\mathbf{e}}_K^T \mathbf{I} \hat{\mathbf{e}}_K$.

Η (28) προκύπτει αμέσως από την (24) διότι η απόσταση των σημείων του σώματος από τον άξονα K (βλ. Σχ. 9) είναι η κάθετη προβολή των \mathbf{r} στο $\hat{\mathbf{e}}_K$:

$$\begin{aligned}
 \rho_{\perp} &= |(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_K) \hat{\mathbf{e}}_K - \mathbf{r}| \\
 &= \sqrt{[(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_K) \hat{\mathbf{e}}_K - \mathbf{r}] \cdot [(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_K) \hat{\mathbf{e}}_K - \mathbf{r}]} \\
 &= \sqrt{(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_K)^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - 2(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_K)^2} \\
 &= \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_K)^2} \\
 &= \sqrt{(\hat{\mathbf{e}}_{Ki} \delta_{ij} \hat{\mathbf{e}}_{Kj}) r_k r_k - \hat{\mathbf{e}}_{Ki} r_i \hat{\mathbf{e}}_{Kj} r_j}.
 \end{aligned}$$

Η ποσότητα μέσα στην παρένθεση στον τελευταίο όρο είναι απλώς η μονάδα ξαναγραμμένη με τη χρήση των συνιστωσών του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{e}}_K$. Επομένως η ροπή αδράνειας περί τον άξονα K είναι

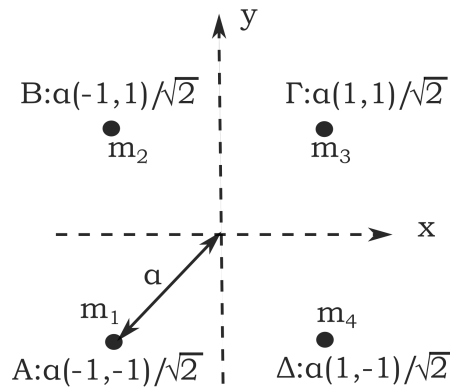
$$\begin{aligned}
 I_K &= \int_V dm \rho_{\perp}^2 \\
 &= \hat{\mathbf{e}}_{Ki} \left(\int_V dm (r_k r_k \delta_{ij} - r_i r_j) \right) \hat{\mathbf{e}}_{Kj} = \hat{\mathbf{e}}_{Ki} I_{ij} \hat{\mathbf{e}}_{Kj}.
 \end{aligned}$$

και η κινητική ενέργεια σώματος που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{e}}_K$:

$$K_K = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \hat{\mathbf{e}}_K^T) \mathbf{I} (\boldsymbol{\omega} \hat{\mathbf{e}}_K) = \frac{1}{2} I_K \omega^2.$$

Άσκηση 2

Προσδιορίστε τον τανυστή αδρανείας του επίπεδου στερεού του Σχ. 10 ως προς την αρχή O του καρτεσιανού συστήματος xyz . Το στερεό είναι ένα επίπεδο κρυσταλλικό μόριο που απαρτίζεται από άτομα διαφορετικής μάζας m_1, m_2, m_3, m_4 που σχηματίζουν το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με $OA=OB=O\Gamma=O\Delta=a$. Το μόριο είναι στο επίπεδο $z = 0$ και οι διαγώνιοι του τετραγώνου διχοτομούν τις γωνίες που σχηματίζονται από τους άξονες $x - y$.



Σχήμα 10: Το στερεό είναι ένα κρυσταλλικό μόριο με τα άτομα να σχηματίζουν ένα τετράγωνο.

Απάντηση: Στο σύστημα $x - y - z$ επειδή η συντεταγμένη των μαζών είναι $z_i = 0$ τα μη διαγώνια στοιχεία του τανυστή είναι $I_{xz} = I_{yz} = 0$, με μόνο μη μηδενικό μη διαγώνιο στοιχείο το

$$I_{xy} = - \sum_{i=1}^4 m_i x_i y_i = -a^2(m_1 - m_2 + m_3 - m_4)/2.$$

Τα δε διαγώνια στοιχεία είναι

$$I_{zz} = \sum_{i=1}^4 m_i (x_i^2 + y_i^2) = Ma^2,$$

και

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^4 m_i y_i^2 = Ma^2/2, \quad I_{yy} = \sum_{i=1}^4 m_i x_i^2 = Ma^2/2,$$

με $M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ τη συνολική μάζα. Επειδή το στερεό είναι επίπεδο ισχύει η γενική ιδιότητα $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$. Οι κύριοι άξονες αδρανείας είναι ο AG με ρπή αδράνειας $I_1 = (m_2 + m_4)a^2$, ο BD με ρπή αδράνειας $I_2 = (m_1 + m_3)a^2$ και ο άξονας z με ρπή αδράνειας $I_3 = Ma^2 = I_1 + I_2$. Αρκεί να είναι $m_1 = m_2$ και $m_3 = m_4$ για να είναι ο τανυστής αδρανείας ιστροπικός στο επίπεδο $x - y$. Δηλαδή, σε αυτήν την περίπτωση, είναι πολλαπλάσιος του μοναδιαίου διδιάστατου πίνακα ο τανυστής ρπής αδράνειας σε κάθε ορθογώνιο σύστημα του επιπέδου $x - y$. Αρκεί δηλαδή η κατοπτρική συμμετρία

του στερεού στο επίπεδο $x - z$ (η στο επίπεδο $y - z$) για να καταστήσει τον τανυστή αδράνειας στο επίπεδο $x - y$ ιστροπικό. Σε επόμενο εδάφιο θα εξηγήσουμε τον λόγο που συμβαίνει αυτό.

Προσέξτε ότι αν $m_1 = m_2 \neq m_3 = m_4$, το ΚΜ δεν βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, αλλά βρίσκεται κάπου επί του άξονα x , ανάλογα με τη σχέση των μαζών m_1, m_3 . Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι εξαιτίας της μέτρησης των ροπών αδράνειας με βάση το γεωμετρικό κέντρο και όχι το ΚΜ ο τανυστής της ροπής αδράνειας στο επίπεδο $x - y$ είναι ιστροπικός $I_{xx} = I_{yy}$. Αν οι ροπές μετρούνταν ως προς το ΚΜ ο τανυστής της ροπής αδράνειας θα έπαυε να είναι ιστροπικός.

4 Ιδιότητες του τανυστή αδράνειας

- Ο τανυστής αδράνειας, \mathbf{I} , είναι ένας μη αρνητικός τανυστής. Ένας τανυστής, όπως και ο πίνακας αναπαράστασης αυτού Θ , ονομάζεται μη αρνητικός όταν για κάθε $\mathbf{x} \neq 0$ είναι

$$\mathbf{x}^\top \Theta \mathbf{x} \geq 0 .$$

Ο τανυστής αδράνειας \mathbf{I} είναι μη αρνητικός, διότι η ποσότητα $K = I_{ij}x_i x_j / 2 = \mathbf{x}^\top \mathbf{I} \mathbf{x} / 2$ είναι η περιστροφική κινητική ενέργεια του στερεού, όταν η γωνιακή ταχύτητα δίνεται από το διάνυσμα \mathbf{x} . Όταν το άθροισμα των τετραγώνων των ταχυτήτων όλων των σημείων του στερεού πολλαπλασιασμένων με την θετική στοιχειώδη μάζα αυτών, είναι σίγουρα μια μη θετική ποσότητα. Αυτό σημαίνει ότι παρότι οι διαγώνιοι όροι του τανυστή είναι εξ'ορισμού μη αρνητικοί, και επομένως και οι κύριες ροπές αδράνειας είναι και αυτές μη αρνητικές, δηλαδή είναι $I_1 \geq 0, I_2 \geq 0$ και $I_3 \geq 0$, οι μη διαγώνιοι όροι του τανυστή που ενδέχεται να είναι αρνητικοί (βλ. στην Άσκηση 2, την I_{xy}) δεν είναι ικανοί για να καταστήσουν την $I_{ij}x_i x_j / 2$ αρνητική για οποιοδήποτε \mathbf{x} .

Η περιστροφική κινητική ενέργεια του στερεού όμως μπορεί να είναι μηδενική. Αυτό συμβαίνει όταν η μάζα του στερεού είναι κατανομημένη επί μίας ευθείας, όπως σε μία βελόνα ή σε ένα ραβδί μηδενικού πάχους. Τα στερεά αυτού του τύπου λέγονται περιστροφείς (rotators). Σε αυτά τα στερεά δεν έχει νόημα η περιστροφή περί τον άξονα που είναι συγκεντρωμένη η μάζα (είναι αντίστοιχο με το να μιλάμε για περιστροφή σημειακής μάζας γύρω από το σημείο που εντοπίζεται η μάζα αυτή). Αν λάβουμε ένα καρτεσιανό πλαίσιο $x - y - z$ στο ΚΜ του σώματος με τον άξονα z στη διεύθυνση της ευθείας που είναι συγκεντρωμένη η μάζα, τότε σε αυτό το καρτεσιανό σύστημα ο τανυστής αδράνειας διαγωνοποιείται. Επειδή όλη μάζα είναι συγκεντρωμένη στην ευθεία με συντεταγμένες $x = y = 0$ είναι $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ και $I_{zz} = 0$, ενώ $I_{xx} = I_{yy} = \int dm z^2$. Δηλαδή ο τανυστής αδράνειας των περιστροφέων σε αυτό το σύστημα αναφοράς είναι της μορφής

$$\mathbf{I} = I \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ με } I = \int dm z^2 . \quad (30)$$

Επομένως επειδή ο τανυστής αυτός είναι ιστροπικός στο επίπεδο $x - y$, κάθε άξονας κάθετος στον άξονα z είναι κύριος άξονας αδράνειας του σώματος. Η δε στροφορμή στους περιστροφείς είναι συνευθειακή με την γωνιακή ταχύτητα, αφού είναι $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, όπου $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{\mathbf{1}} + \omega_2 \hat{\mathbf{2}}$

είναι η γωνιακή ταχύτητα που έχει συνιστώσες μόνο στο επίπεδο $x - y$ ¹³ (τα $\hat{1}$ και $\hat{2}$ είναι τα διανύσματα βάσης των αξόνων των κύριων ροπών αδράνειας στο επίπεδο $x - y$). Ομοίως, η περιστροφική κινητική ενέργεια του περιστροφέα είναι $K = I(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2$. Η δυναμική εξέλιξη ενός περιστροφέα είναι πολύ απλή και δεν εμφανίζει τις πολυπλοκότητες στην κίνηση που εμφανίζονται όταν η στροφορμή δεν είναι συνευθειακή με τη γωνιακή ταχύτητα. Έτσι, για παράδειγμα, αν σε ένα περιστροφέα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές τότε και η στροφορμή ως προς το ΚΜ αλλά και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του στερεού διατηρούνται. Δηλαδή αν πετάξουμε ένα πολύ λεπτό μολύβι ή ραβδί στο πεδίο βαρύτητας, δίνοντάς του κάποια περιστροφική ώθηση, αυτό θα συνεχίσει να περιστρέφεται με την αρχική του γωνιακή ταχύτητα, ενώ το ΚΜ του θα διαγράψει μια παραβολική τροχιά.

• Κανένας διαγώνιος όρος του τανυστή αδράνειας δεν μπορεί να υπερβαίνει το άθροισμα των άλλων δύο. Για παράδειγμα, σε κάθε σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$I_{xx} + I_{yy} = \int_V dm (y^2 + z^2 + x^2 + z^2) \geq \int_V dm (x^2 + y^2) = I_{zz}, \quad (31)$$

και ομοίως για τα άλλα διαγώνια στοιχεία ($I_{yy} + I_{zz} \geq I_{xx}$ και $I_{xx} + I_{zz} \geq I_{yy}$). Την ίδια ιδιότητα έχουν και οι κύριες ροπές αδράνειας (που είναι τα διαγώνια στοιχεία του τανυστή ροπής αδράνειας, όταν ο τανυστής έχει διαγωνιοποιηθεί), οπότε αναγκαστικά θα είναι

$$I_1 + I_2 \geq I_3, \quad I_2 + I_3 \geq I_1, \quad I_3 + I_1 \geq I_2. \quad (32)$$

Η παραπάνω τριπλή ανισοτική σχέση θυμίζει την τριγωνική ανισότητα $AB + BG \geq AG$ για κάθε τρίγωνο ABG . Όμως και η δεύτερη τριγωνική ανισότητα $AB \geq |AG - BG|$ ισχύει για τις κύριες (αλλά και γενικότερα τις διαγώνιες) ροπές αδράνειας, αφού για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} I_1 = \int_V dm (y^2 + z^2) &\geq |I_2 - I_3| \\ &= \left| \int_V dm (x^2 + z^2) - \int_V dm (x^2 + y^2) \right| \\ &= \left| \int_V dm (z^2 - y^2) \right|. \end{aligned} \quad (33)$$

Η αναλογία αυτή μας δίνει τη δυνατότητα να μπορούμε να αναπαραστήσουμε τις τρεις κύριες ροπές αδράνειας με τις πλευρές ενός τριγώνου. Όταν ο στροβός είναι σφαιρικός, το αντίστοιχο τρίγωνο είναι ισόπλευρο, όταν είναι συμμετρικός το τρίγωνο είναι ισοσκελές και όταν είναι ασύμμετρος το τρίγωνο είναι σκαληνό. Στην ειδική περίπτωση του περιστροφέα (βελόνα) το τρίγωνο εκφυλίζεται σε ένα ευθύγραμμο τμήμα (ισοσκελές με μηδενικού μήκους βάση).

Σε απόλυτη συνέπεια με την αντιστοίχιση με τις πλευρές ενός τριγώνου, οι ανισοτικές σχέσεις των ροπών αδράνειας μπορούν να μας οδηγήσουν σε κάποια συμπεράσματα σε ειδικές

¹³H ω_3 δεν έχει φυσικό νόημα, όπως είπαμε.

περιπτώσεις. Στον περιστροφέα, όπως είδαμε, ο μηδενισμός της μιας κύριας ροπής αδράνειας οδηγεί σε ταύτιση των άλλων δύο. Η δε ισότητα σε μία από τις ανισότητες (32) εμφανίζεται όταν το στερεό είναι επίπεδο. Τα επίπεδα στερεά λέγονται φύλλα ή ελάσματα (laminae). Έτσι, αν η z διεύθυνση του καρτεσιανού πλασίου ληφθεί κάθετη στο επίπεδο του σώματος επειδή όλη η μάζα του στερεού είναι συγκεντρωμένη στο $z = 0$ θα είναι $I_{xz} = I_{yz} = 0$ και επομένως ο κάθε κάθετος άξονας στο επίπεδο του στερεού είναι ένας κύριος άξονας του τανυστή αδράνειας. Οι δύο άλλοι κύριοι άξονες του στερεού είναι στο επίπεδο του στερεού και θα ισχύει

$$I_1 + I_2 = I_3, \quad (34)$$

όπου I_1 και I_2 είναι οι κύριες ροπές αδράνειας στους κύριους άξονες στο επίπεδο xy . Πάλι, σε αυτή την περίπτωση, το αντίστοιχο τρίγωνο είναι εκφυλισμένο σε “δίγωνο” όπου το ύψος του τριγώνου στη βάση που αντιστοιχεί στη ροπή αδράνειας I_{zz} είναι μηδενικό.

- Ο τανυστής ροπής αδράνειας εξαρτάται από το σημείο αναφοράς. Ο μετασχηματισμός του τανυστή ροπής αδράνειας όταν αλλάζει το σημείο αναφοράς καθιστά ελάχιστη την τιμή των διαγώνιων όρων αυτού, όταν ως τέτοιο σημείο ληφθεί το ΚΜ του σώματος. Αυτό είναι το αντικείμενο του θεωρήματος Steiner.¹⁴

Έστω ότι ο τανυστής ροπής αδράνειας ως προς το ΚΜ είναι \mathbf{I} και ως προς μια άλλη αρχή O είναι \mathbf{I}' . Αν το διάνυσμα θέσης του ΚΜ ως προς το O είναι \mathbf{R}_{KM} , τότε ο τανυστής αδράνειας στο σύστημα αναφοράς με κέντρο το O είναι

$$I'_{ij} = \int_V dm(\mathbf{r}') [r'_k r'_k \delta_{ij} - r'_i r'_j], \quad (35)$$

όπου $\mathbf{r}' = \mathbf{R}_{\text{KM}} + \mathbf{r}$, και \mathbf{r} το διάνυσμα θέσης του συγκεκριμένου στοιχείου μάζας του σώματος ως προς το σύστημα αναφοράς με αρχή το ΚΜ. Επειδή το ίδιο στοιχείο μάζας βρίσκεται στο σημείο με διάνυσμα θέσης \mathbf{r}' του νέου συστήματος αναφοράς και στο διάνυσμα θέσης \mathbf{r} ως προς το σύστημα με αρχή το ΚΜ, ισχύει προφανώς η ταυτότητα $dm(\mathbf{r}') = dm(\mathbf{r})$ και έτσι η (35) γίνεται:

$$\begin{aligned} I'_{ij} &= \int_V dm(\mathbf{r}) [(R_{\text{KM},k} + r_k)(R_{\text{KM},k} + r_k)\delta_{ij} - (R_{\text{KM},i} + r_i)(R_{\text{KM},j} + r_j)] \\ &= M[R_{\text{KM},k}R_{\text{KM},k}\delta_{ij} - R_{\text{KM},i}R_{\text{KM},j}] + \int_V dm(\mathbf{r})[r_k r_k \delta_{ij} - r_i r_j] \\ &\quad - 2R_{\text{KM},k}\delta_{ij} \int_V dm(\mathbf{r})r_k - R_{\text{KM},i} \int_V dm(\mathbf{r})r_j - R_{\text{KM},j} \int_V dm(\mathbf{r})r_i, \end{aligned}$$

όπου M είναι η συνολική μάζα και όλοι οι όροι της μορφής $\int_V dm(\mathbf{r})r_l$ μηδενίζονται αυτομάτως δεδομένου ότι το \mathbf{r} είναι το διάνυσμα θέσης ως προς το ΚΜ και επομένως το ολοκλήρωμα αυτό

¹⁴Ο Jakobs Steiner [1796-1863] υπήρξε ελβετός μαθηματικός με σημαντική συμβολή στη γεωμετρία. Το φερόνυμο θεώρημα είναι γνωστό και ως θεώρημα των παραλλήλων αξόνων ή ως θεώρημα των Huygens-Steiner.

δίνει την l -συνιστώσα της θέσης του ΚΜ (πολλαπλασιασμένη) με τη μάζα του σώματος) ως προς το ΚΜ. Συνεπώς ο τανυστής ροπής αδράνειας ως προς το σύστημα με αρχή το Ο, αλλά με παράλληλους στο σύστημα ΚΜ άξονες, είναι

$$I'_{ij} = M[R_{\text{ΚΜ},k}R_{\text{ΚΜ},k}\delta_{ij} - R_{\text{ΚΜ},i}R_{\text{ΚΜ},j}] + I_{ij}. \quad (36)$$

Δηλαδή αν ο τανυστής αδράνειας ως προς το ΚΜ είναι \mathbf{I} , ο τανυστής αδράνειας ως προς άλλο σύστημα με μετατεθειμένη αρχή προκύπτει με πρόσθεση στον \mathbf{I} του τανυστή ροπής αδράνειας ως προς το νέο μετατοπισμένο σύστημα, μιας σημειακής μάζας ίσης με τη συνολική μάζα του σώματος τοποθετημένης στη θέση του ΚΜ. Η σχέση (36) έρχεται να προστεθεί στις ανάλογες σχέσεις που συσχετίζουν τη στροφορμή και την κινητική ενέργεια συστήματος σωματιδίων, ή συνεχούς σώματος, σε ένα τυχαίο σύστημα με ένα σύστημα που έχει ως αρχή το ΚΜ.

Βάσει του θεωρήματος Steiner, οι ροπές αδράνειας ως προς δύο άξονες παράλληλους, τον K' και τον K (όπου ο δεύτερος διέρχεται από το ΚΜ), συνδέονται μέσω της σχέσης

$$I_{K'} = MR_{\perp}^2 + I_K, \quad (37)$$

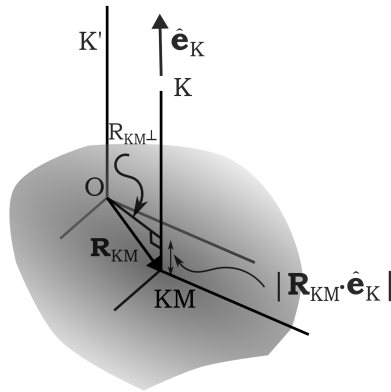
όπου R_{\perp} η απόσταση μεταξύ των δύο παράλληλων αξόνων. Η σχέση αυτή αναφέρεται ως το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων.

Άσκηση 3

Αποδείξτε τη σχέση (37).

Απάντηση: Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα K που περνά από τον άξονα K είναι $I_K = \hat{\mathbf{e}}_K^{\top} \mathbf{I} \hat{\mathbf{e}}_K$ όπου $\hat{\mathbf{e}}_K$ το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του άξονα K . Η ροπή αδράνειας ως προς τον παράλληλο άξονα K' θα είναι λόγω της (36)

$$\begin{aligned} I_{K'} = \hat{\mathbf{e}}_{K'}^{\top} \mathbf{I}' \hat{\mathbf{e}}_{K'} &= \mathbf{I}_K + \hat{\mathbf{e}}_{K,i} M [R_{\text{ΚΜ},k}R_{\text{ΚΜ},k}\delta_{ij} - R_{\text{ΚΜ},i}R_{\text{ΚΜ},j}] \hat{\mathbf{e}}_{K,j} \\ &= I_K + M \left(|\mathbf{R}_{\text{ΚΜ}}|^2 \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_K \cdot \hat{\mathbf{e}}_K}_{=1} - (\mathbf{R}_{\text{ΚΜ}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_K)^2 \right) \\ &= I_K + M \left(|\mathbf{R}_{\text{ΚΜ}}|^2 - R_{\text{ΚΜ}\parallel}^2 \right) \\ &= I_K + MR_{\text{ΚΜ}\perp}^2, \end{aligned}$$



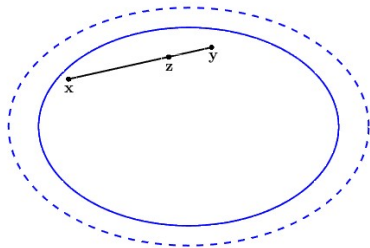
Σχήμα 11: Η σχέση μεταξύ των ροπών αδράνειας περί των παράλληλων αξόνων K και K' . Ο K περνά από το KM του στερεού.

όπου $R_{KM\parallel}$ και $R_{KM\perp}$, η παράλληλη και κάθετη στο \hat{e}_K απόσταση του KM από το O . Με άλλα λόγια οι δύο ροπές αδράνειας σχετίζονται με το πόσο απέχουν οι παράλληλοι άξονες K και K' . Σύμφωνα με το αποτέλεσμα του θεωρήματος Steiner, οι διαγώνιοι όροι του τανυστή \mathbf{I} λαμβάνουν την ελάχιστη τιμή τους, και αντίστοιχα και οι κύριες ροπές αδράνειας αν η αρχή των αξόνων του συστήματος αναφοράς διέρχεται από το KM .

5 Το ελλειψοειδές αδράνειας ενός στερεού

Το ελλειψοειδές αδράνειας ενός στερεού σώματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που ικανοποιούν την εξίσωση

$$I_{ij}x_ix_j = 1. \quad (38)$$



Σχήμα 12: Η συνεχής γραμμή παριστάνει την ελλειψοειδούς σχήματος επιφάνεια που ορίζεται από την (38). Το ελλειψοειδές $I_{ij}x'_ix'_j = \kappa^2$ με $\kappa > 1$ παριστάνεται με τη διάστιχη γραμμή που βρίσκεται εξολοκλήρου στο εξωτερικό της (38). Γενικά, τα ελλειψοειδή ορίζουν κυρτά, κλειστά χωρία.

κυκλικής διατομής με τον άξονα συμμετρίας του στη διεύθυνση της ευθείας που είναι κατανε-

Επειδή ο πίνακας \mathbf{I} είναι αμιγώς θετικός (εκτός αν το στερεό είναι περιστροφέας), όλα τα \mathbf{x} που ικανοποιούν την (38) είναι πεπερασμένα και η επιφάνεια που ορίζεται είναι κλειστή και συμμετρική ως προς την αρχή, δεδομένης της συμμετρικότητας του \mathbf{I} . Η μόνη εξαίρεση που το χωρίο δεν είναι πεπερασμένο είναι η περίπτωση του περιστροφέα (όταν όλη η μάζα του στερεού είναι κατανομημένη πάνω σε μία ευθεία) όπου το ελλειψοειδές εκφυλίζεται σε έναν άπειρο κύλινδρο

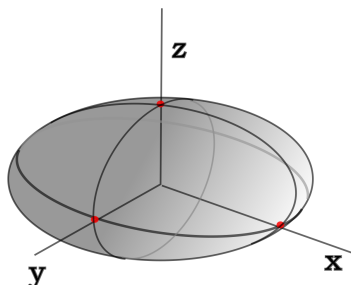
μημένη η μάζα.¹⁵

Επιπλέον, αν το \mathbf{x} ικανοποιεί την (38) το $\mathbf{x}' = \kappa\mathbf{x}$ ικανοποιεί την $I_{ij}x'_i x'_j = \kappa^2$ και επομένως η επιφάνεια $I_{ij}x'_i x'_j = \kappa^2$ περικλείει την (38), όταν είναι $\kappa > 1$ και περικλείεται από την επιφάνεια (38), όταν είναι $\kappa < 1$ (βλ. Σχ. 12). Επίσης το εσωτερικό χωρίο της (38), δηλαδή τα σημεία που ικανοποιούν την $I_{ij}x_i x_j < 1$, είναι κυρτό χωρίο.¹⁶ Δηλαδή αν το \mathbf{x} ικανοποιεί την $\mathbf{x}^\top \mathbf{I} \mathbf{x} < 1$ και το \mathbf{y} την $\mathbf{y}^\top \mathbf{I} \mathbf{y} < 1$, τότε κάθε $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}$ που ορίζεται από κάποια τιμή $0 \leq \alpha \leq 1$, ανήκει και αυτό στο χωρίο (βλ. Σχ. 12). Με άλλα λόγια και γι' αυτό ισχύει $\mathbf{z}^\top \mathbf{I} \mathbf{z} < 1$.¹⁷

Στο σύστημα αναφοράς των κυρίων αξόνων του τανυστή αδράνειας η εξίσωση του ελλειψοειδούς γίνεται

$$I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3 z^2 = 1, \quad (39)$$

και είναι εμφανές από τη μορφή αυτή ότι αν διατάξουμε τις κύριες ροπές αδράνειας έτσι ώστε να



Σχήμα 13: Οι 3 άξονες του ελλειψοειδούς αδράνειας έχουν μήκη $a_x = 1/\sqrt{I_1}$, $a_y = 1/\sqrt{I_2}$, $a_z = 1/\sqrt{I_3}$.

είναι $I_1 \leq I_2 \leq I_3$ το μήκος των τριών κυρίων αξόνων του ελλειψοειδούς κατά σειρά μεγέθους είναι: $1/\sqrt{I_3} \leq 1/\sqrt{I_2} \leq 1/\sqrt{I_1}$. Από τη γεωμετρία του ελλειψοειδούς γνωρίζουμε ότι τα μήκη

¹⁵Ένα διάνυσμα \mathbf{x} στην κατεύθυνση αυτής της ευθείας θα πρέπει να έχει άπειρο μήκος για να ικανοποιήσει την (38), αφού η συνιστώσα του \mathbf{I} σε αυτή την κατεύθυνση είναι μηδενική. Η ακτίνα του κυλίνδρου θα πρέπει να ισούται με $1/\sqrt{I_\perp}$, όπου I_\perp είναι η (κοινή) τιμή των άλλων δύο ίσων κύριων ροπών αδράνειας (βλ. (30)), αφού $I_\perp R^2 = 1$.

¹⁶Ένα χωρίο είναι κυρτό, όταν για κάθε \mathbf{x} και \mathbf{y} στο χωρίο, όλα τα σημεία $\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}$ με $0 \leq \alpha \leq 1$ του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα \mathbf{x} και \mathbf{y} είναι και αυτά σημεία του χωρίου. Το σύνορο, δηλαδή, του χωρίου δεν παρουσιάζει πτυχωσεις.

¹⁷Η απόδειξη της πρότασης είναι άμεση. Πρώτα απ' όλα εξαιτίας της θετικότητας του \mathbf{I} θα είναι $(\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top \mathbf{I} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) > 0$ που οδηγεί στην $\mathbf{x}^\top \mathbf{I} \mathbf{x} + \mathbf{y}^\top \mathbf{I} \mathbf{y} > 2\mathbf{x}^\top \mathbf{I} \mathbf{y}$. Κατόπιν τούτου

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^\top \mathbf{I} \mathbf{z} &= \alpha^2 \mathbf{x}^\top \mathbf{I} \mathbf{x} + (1 - \alpha)^2 \mathbf{y}^\top \mathbf{I} \mathbf{y} + 2\alpha(1 - \alpha) \mathbf{x}^\top \mathbf{I} \mathbf{y} \\ &< \alpha^2 \mathbf{x}^\top \mathbf{I} \mathbf{x} + (1 - \alpha)^2 \mathbf{y}^\top \mathbf{I} \mathbf{y} + \alpha(1 - \alpha)(\mathbf{x}^\top \mathbf{I} \mathbf{x} + \mathbf{y}^\top \mathbf{I} \mathbf{y}) \\ &< \alpha^2 + (1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha) = 1. \end{aligned}$$

των τριών κυρίων αξόνων αντιστοιχούν στα τρία στάσιμα των αποστάσεων των σημείων του ελλειψοειδούς από την αρχή των αξόνων (εκ των οποίων τα δύο είναι ακρότατα). Επομένως οι κύριοι άξονες είναι αντίστοιχα στις διευθύνσεις στις οποίες η $|\mathbf{x}|^2$ καθίσταται στάσιμη όταν το \mathbf{x} είναι επί της επιφάνειας του ελλειψοειδούς $I_{ij}x_i x_j = 1$. Αυτός είναι πρακτικά ένας πολύ γόνιμος τρόπος εντοπισμού των ιδιοδιανυσμάτων και ιδιοτιμών του συμμετρικού τανυστή αδράνειας \mathbf{I} .



Σχήμα 14: Η προπέλα του σχήματος είναι συμμετρική σε στροφές περί τον άξονά της –που είναι κάθετος στο επίπεδο της προπέλας– κατά γωνία $2\pi/3$. Επομένως ο άξονας αυτός, ο 3, είναι κύριος άξονας του τανυστή αδράνειας ενώ οι άλλοι δύο κύριοι άξονες είναι στο επίπεδο της προπέλας και είναι ίσοι, $I_1 = I_2 = I$, δηλαδή η προπέλα είναι ένας συμμετρικός στροβός. Παράλληλα, επειδή είναι κατα προσέγγιση επίπεδη θα είναι $I_3 \approx 2I$.

Οι συμμετρίες του σώματος αντικατοπτρίζονται με ενδιαφέροντα τρόπο στο ελλειψοειδές αδρανείας και οδηγούν σε γρήγορα συμπεράσματα για το σχήμα του ελλειψοειδούς. Με συμμετρίες του σώματος εννοούμε τους μετασχηματισμούς, \mathbf{T} , στους οποίους η κατανομή μάζας του στερεού δεν αλλάζει, δηλαδή ο \mathbf{T} είναι συμμετρία του στερεού αν για κάθε \mathbf{r} είναι $dm(\mathbf{T}\mathbf{r}) = dm(\mathbf{r})$. Αν ένα σώμα είναι συμμετρικό ως προς ένα επίπεδο τότε το ΚΜ του σώματος θα κείται σε αυτό το επίπεδο και ο ένας κύριος άξονας του τανυστή αδράνειας θα είναι κάθετος στο επίπεδο. Πράγματι, αν ο z είναι αυτός ο κάθετος άξονας, τότε αμέσως έχουμε, λόγω της συμμετρίας, ότι θα είναι $I_{xz} = I_{yz} = 0$ και επομένως ο z θα είναι ο ένας κύριος άξονας ενώ οι άλλοι δύο άξονες θα κείνται στο επίπεδο συμμετρίας. Επομένως το ελλειψοειδές αδρανείας θα έχει έναν κύριο άξονα κάθετο στο επίπεδο συμμετρίας.

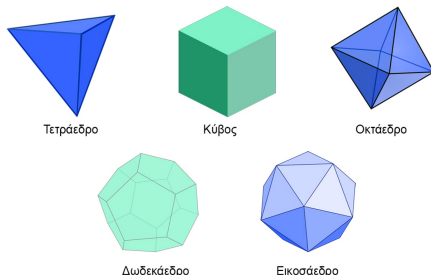
Στο συμπέρασμα αυτό μπορούμε να καταλήξουμε με γενικότερα επιχειρήματα. Παρατηρούμε ότι, αν κάνουμε έναν μετασχηματισμό κατοπτρισμού ως προς κάποιο επίπεδο, ή μία στροφή περί κάποιον άξονα του στερεού τότε, λόγω του τανυστικού χαρακτήρα του τανυστή αδράνειας, το ελλειψοειδές αδρανείας θα μετασχηματιστεί αντίστοιχα. Επομένως, αν το σώμα είναι συμμετρικό σε κατοπτρισμό ως προς κάποιο επίπεδο τότε και το ελλειψοειδές αδρανείας θα είναι

συμμετρικό ως προς αυτό το επίπεδο που σημαίνει από τη γεωμετρία των ελλειψοειδών ότι το επίπεδο αυτό πρέπει να περνά από την αρχή των αξόνων του ελλειψοειδούς και να είναι κάθετο σε έναν από τους κύριους άξονες αδρανείας του στερεού. Καταλήγουμε έτσι στα ίδια συμπεράσματα στα οποία είχαμε καταλήξει με πιο συμβατικά επιχειρήματα παραπάνω. Ομοίως αν το στερεό είναι συμμετρικό σε στροφές περί κάποιον άξονα κατά γωνία $2\pi/n$ με $n \in \mathbb{N}$, τότε και το ελλειψοειδές θα είναι συμμετρικό στις ίδιες στροφές περί τον ίδιο άξονα. Επειδή, όμως, οι μόνοι άξονες, γύρω από τους οποίους αν στραφούν τα ελλειψοειδή κατά γωνία $\pi = 2\pi/2$ αυτά επανέρχονται στον εαυτό τους, είναι οι κύριοι άξονες αυτών, συμπεραίνουμε ότι αν υπάρχει κάποια συμμετρία στροφής του στερεού γύρω από κάποιο άξονα, αυτός είναι και κύριος άξονας αδρανείας του στερεού. Στην περίπτωση μάλιστα που η συμμετρία του στερεού αντιστοιχεί σε $n \neq 2$ συνεπάγεται ότι οι άλλοι δύο κύριοι άξονες αδρανείας που είναι κάθετοι στην άξονα στρο-

φικής συμμετρίας του στερεού θα πρέπει να αντιστοιχούν σε ίδιες ροπές αδράνειας· αν δεν ήταν ίδιες η στροφή στο επίπεδο αυτών κατά $2\pi/n$ αποκλείεται να άφηνε το ελλειψοειδές αδράνειας απείραχτο. Επομένως αν υπάρχει στροφική συμμετρία σώματος κατά $2\pi/n$ με $n \neq 2$ το στερεό είναι ένας συμμετρικός στροβός (βλ. παράδειγμα στο Σχ. 14). Ομοίως αποδεικνύεται ότι το ελλειψοειδές αδράνειας των πλατωνικών στερεών είναι μια σφαίρα, δηλαδή τα στερεά αυτά είναι σφαιρικοί στροβοί. Ένα στερεό εκ περιστροφής είναι συμμετρικό περί τον άξονα περιστροφής κατά οποιανδήποτε γωνία και το σώμα είναι συμμετρικός στροβός, με έναν κύριο άξονα τον άξονα συμμετρίας του σώματος και τους δύο άλλους κύριους άξονες με ίσες ροπές αδράνειας οποιουδήποτε κάθετους άξονες στο επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα συμμετρίας.

Άσκηση 4

Αποδείξτε ότι το ελλειψοειδές αδράνειας όλων των πλατωνικών στερεών είναι σφαιρικό.



Σχήμα 15: Τα 5 πλατωνικά στερεά είναι τα μόνα κυρτά στερεά στα οποία όλες οι έδρες είναι ίσα κανονικά πολύγωνα, καθώς και όλες οι διέδρες γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ γειτονικών εδρών είναι ίσες. Λόγω της μοναδικότητάς τους, ο Πλάτωνας θεωρούσε ότι τα στερεά αυτά αντικατοπτρίζουν τα θεμελιώδη στοιχεία της φύσης: το τετράεδρο τη φωτιά, ο κύβος τη γη, το εικοσάεδρο το νερό, το οκτάεδρο τον αέρα, ενώ το δωδεκάεδρο το συνέδεσε με τα ουράνια, για τα οποία ο Αριστοτέλης υπέθεσε αργότερα ότι πληρούνται από τον αιθέρα ή αλλιώς την “πεμπουσία” (quinta essentia).

Στο οκτάεδρο υπάρχουν τρεις άξονες συμμετρίας σε στροφές $2\pi/4$ που ενώνουν τις απέναντι κορυφές του στερεού.

Το δωδεκάεδρο έχει έδρες που είναι κανονικά πεντάγωνα. Το στερεό είναι συμμετρικό σε στροφές $2\pi/5$ περί τους άξονες που είναι κάθετοι στο κέντρο των 12 πενταγωνικών εδρών (ανά δύο είναι πα-

Απάντηση: Τα 5 πλατωνικά στερεά εικονίζονται στο Σχ. 15. Η απόδειξη ότι το ελλειψοειδές αδράνειας τους είναι σφαιρικό βασίζεται στο ότι μπορούν να βρεθούν σε αυτά τα στερεά δύο τουλάχιστον άξονες ως προς τους οποίους παρουσιάζουν συμμετρία σε συγκεκριμένες στροφές. Η απόδειξη είναι κατ’ ουσίαν ίδια και για τα 5 στερεά.

Το τετράεδρο είναι συμμετρικό σε στροφές $2\pi/3$ γύρω από άξονα που διέρχεται από μία κορυφή του τετραέδρου και είναι κάθετος στην απέναντι έδρα του στερεού (το ύψος δηλαδή του στερεού), ακριβώς όπως και η προπέλα του Σχ. 14. Επομένως και τα τρία ύψη είναι κύριοι άξονες του ελλειψοειδούς αδράνειας του στερεού. Επειδή όμως η γωνία μεταξύ των κυριών αξόνων αυτών δεν είναι $\pi/2$ το ελλειψοειδές αναγκαστικά είναι σφαίρα.

Στον κύβο ένας άξονας συμμετρίας σε στροφές $2\pi/4$ είναι ο άξονας που συνδέει τα κέντρα των τετραγώνων δύο απέναντι εδρών. Άρα αυτός είναι κύριος άξονας, τον σημειώνουμε AB και θεωρούμε ότι αντιστοιχεί σε ροπή αδράνειας I_3 . Οι άλλες ροπές αδράνειας είναι στο επίπεδο που είναι κάθετο στο AB και είναι ίσες μεταξύ τους, $I = I_1 = I_2$ αφού αντιστοιχούν στις άλλες δύο αποστάσεις μεταξύ των άλλων δύο ζευγαριών απέναντι εδρών του κύβου. Ταυτόχρονα είναι ίσες και με την I_3 , αφού και αυτοί οι άξονες θα μπορούσαν να παίξουν τον ίδιο ρόλο με τον άξονα AB. Επομένως και πάλι το ελλειψοειδές είναι σφαίρα.

ράλληλες αλλά τα πεντάγωνά τους δεν έχουν τον ίδιο προσανατολισμό). Και οι 6 αυτοί άξονες που δεν είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους είναι κύριοι και επομένως το ελλειψοειδές είναι σφαιρικό.

Τέλος το εικοσάεδρο έχει 20 κορυφές που ανά δύο βρίσκονται σε αντιδιαμετρικές θέσεις σε σχέση με το κέντρο του στερεού. Το εικοσάεδρο είναι συμμετρικό σε στροφές κατά $2\pi/5$ περί των 10 αξόνων που ενώνουν τις απέναντι κορυφές, αλλά με δεδομένο ότι οι άξονες αυτοί δεν είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους, δεν μπορεί παρά το ελλειψοειδές αδρανείας να είναι και γι' αυτό το στερεό σφαίρα.

6 Η γεωμετρική περιγραφή του Poinsot της κίνησης ελεύθερου στερεού

Το ελλειψοειδές αδρανείας είναι σημαντικό διότι περιέχει όλες τις δυναμικές πληροφορίες για το στερεό και το πως αυτό θα συμπεριφερθεί, όταν του ασκηθούν εξωτερικές ροπές. Επομένως σώματα που περιγράφονται από το ίδιο ελλειψοειδές αδρανείας, αλλά διαφορετικό σχήμα, συμπεριφέρονται, θεμελιωδώς, με τον ίδιο τρόπο.¹⁸ Την ιδέα αυτήν την εξέφρασε γεωμετρικά ο Poinsot,¹⁹ ο οποίος κατάφερε να περιγράψει την πολύπλοκη κίνηση του στερεού γεωμετρικά μέσω του ελλειψοειδούς αδρανείας. Η γεωμετρική κατασκευή του Poinsot δίνει χρήσιμα και εύληπτα αποτελέσματα στην περίπτωση ενός ελεύθερου στερεού στο οποίο δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές. Στη κίνηση του στερεού αυτού διατηρείται η ολική στροφορμή, \mathbf{L} , του στερεού ως προς το ΚΜ του και, όπως αναμένεται, και η περιστροφική κινητική ενέργεια του στερεού, K , ως προς το ΚΜ (θα το αποδείξουμε αυτό σε επόμενο εδάφιο). Ο Poinsot κάνοντας χρήση αυτών των δύο νόμων διατήρησης και ενός κατάλληλου ελλειψοειδούς αδρανείας του σώματος, περιέγραψε ποιοτικά την κίνηση ενός ελεύθερου στερεού. Η περιγραφή αυτή δεν είναι όμως πλήρης διότι δεν προσδιορίζει τη χρονική εξέλιξη της κίνησης που απαιτεί ανάλυση των αντίστοιχων δυναμικών εξισώσεων της κίνησης.

Κατασκευάζουμε το ελλειψοειδές

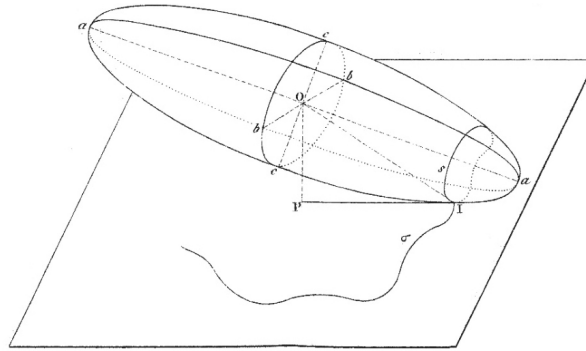
$$I_{ij}\omega_i\omega_j = 2K ,$$

όπου ω η γωνιακή ταχύτητα του στερεού και K η περιστροφική κινητική του ενέργεια. Αυτό το ελλειψοειδές είναι όμοιο²⁰ με το ελλειψοειδές αδρανείας και ονομάζεται *ελλειψοειδές Poinsot* ή *ελλειψοειδές ενέργειας*. Ο Poinsot αντικαθιστά το στερεό με το ελλειψοειδές του, το οποίο λόγω της διατήρησης της ενέργειας είναι ένα στερεό σώμα με σαφείς διαστάσεις και έτσι προσδιορίζει

¹⁸Η πραγματική γεωμετρία του στερεού (το σύνολο που το διαφοροποιεί από το περιβάλλον του) υπεισέρχεται ως παράγων στην κίνηση του στερεού μόνο όταν το στερεό δέχεται ροπές εξαιτίας της επαφής του με κάποιο άλλο σώμα, π.χ. όταν ένα νόμισμα στριφογυρίζει πάνω σε ένα τραπέζι στο πεδίο βαρύτητας, η ροπή που θα ασκηθεί στο νόμισμα εξαρτάται από το πραγματικό σχήμα του στερεού.

¹⁹Ο Luis Poinsot [1777-1859], Γάλλος μαθηματικός και φυσικός, εισήγαγε γεωμετρικές μεθόδους για τη μελέτη της κίνησης στερεών σωμάτων καθιστώντας διαισθητική και γενική (ανεξαρτήτως σχήματος) την κίνηση αυτών. Η ανάλυση αυτή έχει αποτυπωθεί στο έργο του *Théorie nouvelle de la rotation des corps* (1852).

²⁰Απλώς το μέγεθός του είναι μεγαλύτερο από αυτό του ελλειψοειδούς αδρανείας κατά $\sqrt{2K}$.



Σχήμα 16: Το ελλειψοειδές Poinsot κρατώντας το κέντρο του, O , σταθερό και την κατακόρυφη απόσταση $OP = 2K/|\mathbf{L}|$ από το επίπεδο επίσης σταθερή κυλιέται πάνω σε αυτό το επίπεδο. Η κατακόρυφος του επιπέδου έχει τη διεύθυνση της στροφορμής. Το ελλειψοειδές περιστρέφεται με στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα που δίνεται από το διάνυσμα $\boldsymbol{\omega} = OI$. Όπως κυλιέται το ελλειψοειδές το σημείο επαφής, I , διαγράφει επί του επιπέδου την ερπολογράφο, σ , και συγχρόνως οι διαδοχικές θέσεις του I διαγράφουν την πολογράφο, s , επί του ελλειψοειδούς. Η ερπολογράφος είναι η καμπύλη που βλέπει να διαγράφει το άκρο του διανύσματος της $\boldsymbol{\omega}$ ένας αδρανειακός παρατηρητής, ενώ η πολογράφος είναι η καμπύλη που βλέπει να διαγράφει το άκρο της $\boldsymbol{\omega}$ ένας παρατηρητής που κινείται με το σώμα. Στο σχήμα η στροφορμή είναι τέτοια ώστε το σώμα να περιστρέφεται με γωνιακές ταχύτητες κοντά στη διεύθυνση του μικρότερου άξονα αδρανείας του σώματος που αντιστοιχεί στον μεγαλύτερο άξονα του ελλειψοειδούς Oa . (Το σχήμα είναι από το L. Poinsot, 1851: “Théorie nouvelle de la rotation des corps”, *Journal des mathématiques pures et appliquées*, **16**, 9-129. Θα πρέπει να σημειωθεί, όμως, ότι σε αντίθεση με το πως φαντάζεται ο Poinsot το σχήμα της ερπολογράφου, αυτή είναι σε κάθε περίπτωση μια κυρτή καμπύλη (βλ. Σχ. 18).)

την κίνηση του σώματος από την κίνηση του ελλειψοειδούς. Παρατηρούμε ότι η κάθετος στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς, στο σημείο που καταλήγει το στιγμιαίο διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας, $\boldsymbol{\omega}$, είναι ανάλογη της στροφορμής, αφού $\nabla_{\boldsymbol{\omega}} I_{ij} \omega_i \omega_j = 2\mathbf{L}$. Αυτό σημαίνει ότι το εφαπτόμενο επίπεδο, στο σημείο του ελλειψοειδούς που αντιστοιχεί στη γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$, είναι το επίπεδο (στον χώρο των γωνιακών ταχυτήτων) που έχει την ιδιότητα (βλ. Κεφάλαιο 8, Εδάφιο 8)

$$\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}}{|\mathbf{L}|} = \frac{\omega_i L_i}{|\mathbf{L}|} = \frac{\omega_i I_{ij} \omega_j}{|\mathbf{L}|} = \frac{2K}{|\mathbf{L}|} = \text{σταθ} . \quad (40)$$

Όταν δε η στροφορμή και η κινητική ενέργεια του στερεού διατηρείται, όπως συμβαίνει στην ελεύθερη κίνηση, το επίπεδο $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}/|\mathbf{L}| = 2K/|\mathbf{L}|$ δεν αλλάζει, είναι αναλλοίωτο, και γι' αυτό το λόγο αναφέρεται ως το *αναλλοίωτο επίπεδο* της κίνησης του στερεού. Παράλληλα, το ελλειψοειδές Poinsot (που είναι και αυτό αναλλοίωτο ως σχήμα) ανά πάσα στιγμή εφάπτεται στο αναλλοίωτο επίπεδο κρατώντας το κέντρο του σταθερό σε σταθερή απόσταση $2K/|\mathbf{L}|$ από το επίπεδο (βλ. Σχ. 16). Το επίπεδο βρίσκεται πάντα σε επαφή με το ελλειψοειδές διότι αν είναι $I_1 \leq I_2 \leq I_3$ τότε οι δυνατές τιμές της απόστασης της αρχής του ελλειψοειδούς από το

αναλλοίωτο επίπεδο ικανοποιούν την ανισότητα

$$|\omega_{\min}| = \sqrt{\frac{2K}{I_3}} < \frac{2K}{|\mathbf{L}|} \leq \sqrt{\frac{2K}{I_1}} = |\omega_{\max}|, \quad (41)$$

δηλαδή οι τιμές του $2K/|\mathbf{L}|$ βρίσκονται μεταξύ του μεγαλύτερου και μικρότερου ημιάξονα του ελλειψοειδούς Poinsot.

Άσκηση 5

Αν οι κύριες ροπές αδράνειας είναι $I_1 \leq I_2 \leq I_3$, να δείξετε ότι τότε ισχύει η ανισότητα (41).

Απάντηση: Αν $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ είναι οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας στους κύριους άξονες αδράνειας του στερεού, η περιστροφική κινητική ενέργεια είναι $2K = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2$ και το μέτρο της στροφορμής $|\mathbf{L}| = \sqrt{I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2}$. Εξαιτίας της ανισοτικής σχέσης μεταξύ των ροπών αδράνειας ισχύει ότι

$$\sqrt{I_1} \sqrt{I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2} \leq \sqrt{I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2} \leq \sqrt{I_3} \sqrt{I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2},$$

και επομένως ισχύει η ανισότητα

$$\sqrt{I_1} \sqrt{2K} \leq |\mathbf{L}| \leq \sqrt{I_3} \sqrt{2K},$$

που είναι ισοδύναμη με την (41).

Ο τρόπος περιστροφής ενός ελεύθερου στερεού μπορεί τώρα να περιγραφεί πολύ κομψά μέσω του ελλειψοειδούς Poinsot. Στο σύστημα του εργαστηρίου η στροφορμή είναι σταθερή, καθώς και το αναλλοίωτο επίπεδο $\omega \cdot \mathbf{L}/|\mathbf{L}| = 2K/|\mathbf{L}|$ που εφάπτεται στο ελλειψοειδές και διατηρεί, όπως είπαμε, σταθερή απόσταση από το κέντρο του ελλειψοειδούς. Η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα, ω , προσδιορίζεται από το διάνυσμα που συνδέει το κέντρο του ελλειψοειδούς με το σημείο επαφής του ελλειψοειδούς με το αναλλοίωτο επίπεδο. Το ελλειψοειδές περιστρέφεται στιγμιαία με αυτή η γωνιακή ταχύτητα καθώς συγχρόνως εφάπτεται με το αναλλοίωτο επίπεδο. Όλα τα σημεία του περιστρεφόμενου ελλειψοειδούς που βρίσκονται πάνω στο άξονα της γωνιακής ταχύτητας, είναι ακίνητα, οπότε το ίδιο ισχύει και για το σημείο επαφής του ελλειψοειδούς με το αναλλοίωτο επίπεδο, όπως συμβαίνει και με το σημείο επαφής μιας ρόδας με το δάπεδο πάνω στο οποίο αυτή κυλάει. Στην περίπτωση του ελλειψοειδούς, όμως, η αντίστοιχη κύλιση είναι λίγο πιο ιδιόμορφη. Η μεν συνιστώσα της ω που είναι κάθετη στο αναλλοίωτο επίπεδο είναι υπεύθυνη για την περιστροφή του στερεού γύρω από αυτόν τον κάθετο άξονα. Η δε συνιστώσα της ω που είναι παράλληλη με το αναλλοίωτο επίπεδο είναι υπεύθυνη για την κύλιση του ελλειψοειδούς, κατ' αναλογία με το παράδειγμα της ρόδας. Η σύνθετη αυτή κίνηση διενεργείται χωρίς να κινείται το κέντρο του ελλειψοειδούς και η απόσταση αυτού από το αναλλοίωτο

επίπεδο (βλ. Σχ. 16).²¹

Έτσι προσδιορίζεται η κίνηση του ελλειψοειδούς και αντίστοιχα του σώματος, δεδομένου ότι οι κύριοι άξονες του ελλειψοειδούς είναι και οι κύριοι άξονες του σώματος. Όπως κυλιέται το ελλειψοειδές το σημείο επαφής διαγράφει επί του αναλλοιώτου επιπέδου μία καμπύλη που ονομάστηκε από τον Poinsot ερπολογράφος (herpolhode) και συγχρόνως οι διαδοχικές θέσεις του σημείου επαφής διαγράφουν επί του ελλειψοειδούς την πολογράφο (polhode²²). Επομένως η ερπολογράφος είναι η τροχιά που διαγράφει το σημείο επαφής του ελλειψοειδούς ενώ έρπει στο αναλλοίωτο επίπεδο, ενώ η πολογράφος είναι η καμπύλη που διαγράφει το σημείο επαφής πάνω στο ελλειψοειδές, καθώς το τελευταίο στρέφεται στο χώρο. Η ερπολογράφος είναι επίσης η καμπύλη που βλέπει να διαγράφει το άκρο του διανύσματος της ω ένας αδρανειακός παρατηρητής και προσδιορίζει πλήρως την εξέλιξη της γωνιακής ταχύτητας του κινούμενου στερεού (και επομένως και τον άξονα περιστροφής του στερεού) όπως την βλέπει ένας εξωτερικός παρατηρητής, όταν αυτό είναι ελεύθερο να κινείται διατηρώντας σταθερή την ενέργεια και τη στροφορμή του.

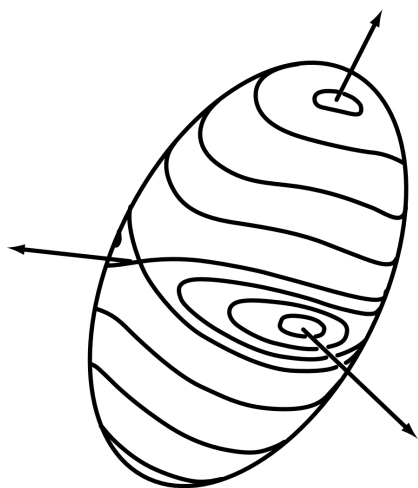
Με την ίδια μέθοδο μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση της γωνιακής ταχύτητας όπως θα την περιέγραφε, τώρα, ένας παρατηρητής που κινείται «κολλημένος» πάνω στο σώμα. Αυτό το σύστημα αναφοράς αναφέρεται ως το σύστημα του σώματος που συνήθως επιλέγεται να είναι το καρτεσιανό σύστημα των κυρίων αξόνων αδράνειας. Για τον μη αδρανειακό παρατηρητή που κινείται μαζί με το σώμα οι κύριοι άξονες αδράνειας είναι ακίνητοι και επομένως το ελλειψοειδές Poinsot παραμένει σταθερό στο χώρο, ενώ η γωνιακή ταχύτητα αλλά και η στροφορμή του σώματος κινούνται, δηλαδή το ελλειψοειδές είναι σταθερό αλλά κινείται το εφαπτόμενο επίπεδο πατώντας πάνω στο ελλειψοειδές στο άκρο της γωνιακής ταχύτητας –το οποίο είναι και το σημείο επαφής με το ελλειψοειδές– ακολουθώντας την διαγραφόμενη πολογράφο. Η πολογράφος δηλαδή είναι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου επαφής ενός επιπέδου που βρίσκεται σε σταθερή απόσταση $2K/|\mathbf{L}|$ από το κέντρο του ελλειψοειδούς καθώς αυτό πατάει χωρίς να ολισθαίνει πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς.

Δεν θέλει πολύ φαντασία για να αντιληφθεί κανείς ότι οι πολογράφοι που διαγράφονται στο ελλειψοειδές Poinsot ενός ασύμμετρου στερεού για διαφορετικές τιμές του $|\mathbf{L}|$, και για δεδομένη τιμή του K , είναι όπως οι καμπύλες στο Σχ. 17. Όταν η στροφορμή είναι τέτοια ώστε η $2K/|\mathbf{L}|$ να είναι ίση με τον μεγαλύτερο ημιάξονα του ελλειψοειδούς Poinsot τότε το επίπεδο τέμνει το ελλειψοειδές μόνο στα σημεία του ελλειψοειδούς που αντιστοιχούν στον μεγάλο ημιάξονα του ελλειψοειδούς και επομένως αν το στερεό τεθεί σε περιστροφή περί τον κύριο άξονα με τη μι-

²¹ Η ακινησία του κέντρου ίσως φαίνεται αντιφατική αναφορικά με την προαναφερθείσα περιστροφή του ελλειψοειδούς περί την κάθετο στο αναλλοίωτο επίπεδο. Όμως αν επιλεγεί ως άξονας αυτής της περιστροφής η κάθετη στο αναλλοίωτο επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο, τότε η κύλιση και η αντίστοιχη μετατόπιση στο αναλλοίωτο επίπεδο του σημείου επαφής είναι απόλυτα συμβατή με αυτή την μη μετατόπιση του κέντρου.

²² Ο όρος οφείλεται αρχικά στον Νεύτωνα και είναι κατασκευασμένος από την ελληνική λέξη *πόλος* που σημαίνει άξονας περί του οποίου στρέφεται κάποιο σώμα και την *οδό* που σημαίνει τον δρόμο, την πορεία. Χρησιμοποιήθηκε μεταγενέστερα από τον Euler και τον Lagrange για την τροχιά που είχαν προβλέψει ότι διαγράφει ο πόλος της Γης λόγω της μετάπτωσής του με εκτιμώμενη περίοδο 9-10 μήνες (τελικά η μετάπτωση αυτή παρατηρήθηκε από τον Chandler το 1891 ότι ήταν περί τους 14 μήνες).

κρότερη ροπή αδράνειας (με θετική ή αρνητική φορά) θα συνεχίσει να περιστρέφεται περί αυτόν τον άξονα. Η πολογράφος τότε θα είναι ένα σημείο που σημαίνει ότι αν το στερεό τεθεί σε περιστροφή περί τον κύριο άξονα με τη μεγαλύτερη ροπή αδράνειας θα συνεχίσει να περιστρέφεται περί αυτόν τον άξονα, «διατρέχοντας» πάνω στο αναλλοίωτο επίπεδο επίσης μια σημειακή ερπολογράφο.



Σχήμα 17: Οι δυνατές πολογράφοι για διαφορετικές τιμές του μέτρου της στροφορμής επί του ελλειψοειδούς Poinsot ενός ασύμμετρου στερεού που αντιστοιχεί σε δοσμένη ενέργεια.

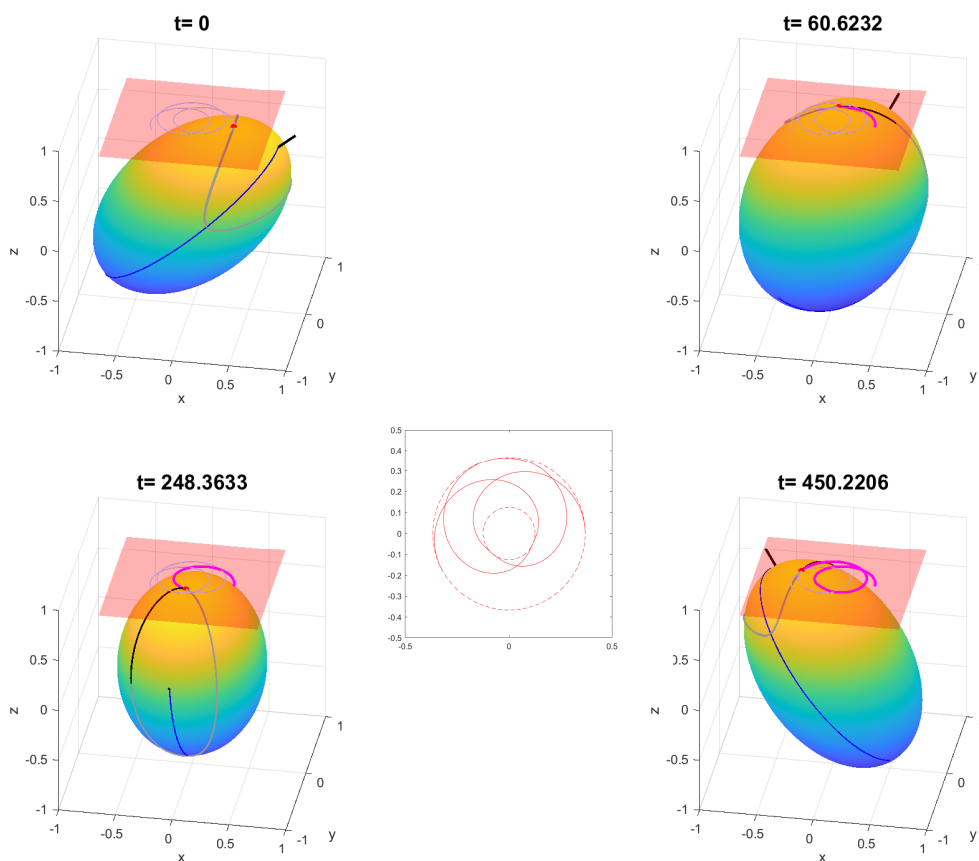
Για λίγο μεγαλύτερες τιμές της στροφορμής, η απόσταση του αναλλοιώτου επιπέδου από το κέντρο είναι λίγο μικρότερες από τον μεγάλο ημιάξονα του ελλειψοειδούς και οι καμπύλες που διαγράφει η γωνιακή ταχύτητα, οι πολογράφοι, περιελίσσονται γύρω από τον μεγαλύτερο άξονα του ελλειψοειδούς Poinsot που αντιστοιχεί στον άξονα με την μικρότερη ροπή αδράνειας (βλ. Σχ. 17). Λόγω συμμετρίας του ελλειψοειδούς οι καμπύλες είναι κλειστές, που σημαίνει ότι ο παρατηρητής που κινείται μαζί με το στερεό παρατηρεί τη γωνιακή ταχύτητα του σώματος να περιστρέφεται γύρω από τον κύριο άξονα που αντιστοιχεί στη μικρότερη ροπή αδράνειας εκτελώντας μια περιοδική κίνηση.²³

Τώρα πάλι όταν η στροφορμή είναι η μέγιστη δυνατή, ώστε η $2K/|\mathbf{L}|$ να είναι ίση με τον μικρότερο ημιάξονα του ελλειψοειδούς, το αναλλοίωτο επίπεδο εφάπτεται στο ελλειψοειδές μόνο σε ένα από τα δύο σημεία που αντιστοιχούν στον μικρότερο ημιάξονα του ελλειψοειδούς. Η πολογράφος είναι πάλι σημειακή και ομοίως και η ερπολογράφος. Αυτό σημαίνει ότι αν το

στερεό τεθεί σε περιστροφή περί τον κύριο άξονα με τη μεγαλύτερη ροπή αδράνειας θα συνεχίσει να περιστρέφεται περί αυτόν τον άξονα. Και πάλι, όταν η στροφορμή είναι λίγο μικρότερη από τη μέγιστη δυνατή στροφορμή, ώστε το αναλλοίωτο επίπεδο να βρίσκεται σε απόσταση λίγο μεγαλύτερη από τον μικρότερο ημιάξονα του ελλειψοειδούς, το αναλλοίωτο επίπεδο θα διαγράφει κλειστές, σχεδόν κυκλικές, καμπύλες περί τον μικρότερο άξονα του ελλειψοειδούς Poinsot (βλ. Σχ. 17). Τέλος όταν η στροφορμή είναι τέτοια ώστε η $2K/|\mathbf{L}|$ να είναι ίση με τον ενδιάμεσο ημιάξονα του ελλειψοειδούς, τότε το σημείο επαφής του αναλλοιώτου επιπέδου με το ελλειψοειδές θα διαγράφει δύο ολόκληρες καμπύλες που θα διέρχονται τεμνόμενες από αυτόν τον άξονα (βλ. τις καμπύλες που τέμνονται χιαστί στο Σχ. 17).²⁴ Η γεωμετρική ανάλυση δεν

²³Η περιοδική κίνηση της γωνιακής ταχύτητας στο σύστημα του στερεού, δεν συνεπάγεται περιοδική κίνηση του στερεού στο αδρανειακό σύστημα (βλ. κεντρικό εικονίδιο στο Σχ. 18 που αναφέρεται στο αδρανειακό σύστημα μετά από μια πλήρη διαγραφή της πολογράφου).

²⁴Το γιατί οι αντίστοιχες γραμμές δεν είναι σημεία, όπως συμβαίνει με τους δύο ακραίους άξονες, μπορεί να γίνει κατανοητό αν φανταστεί κανείς πως πλησιάζουμε την τιμή της στροφορμής που αντιστοιχεί στην τιμή αυτή από επάνω και από κάτω. Από επάνω θα έχουμε ολοένα και μεγαλύτερα δαχτυλίδια που περιβάλλουν τον μεγάλο



Σχήμα 18: Έχουν σχεδιασθεί οι διαδοχικές θέσεις του ελλειψοειδούς Poinsot στο αδρανειακό σύστημα, και οι αντίστοιχοι χρόνοι, σε μονάδες $L/(2K)$, καθώς το ελλειψοειδές περιστρέφεται γύρω από τον στιγμιαίο άξονα της γωνιακής ταχύτητας που καταλήγει στο κινούμενο κόκκινο σημείο. Στο σημείο αυτό, το ελλειψοειδές εφάπτεται στο (κίτρινο) αναλλοίωτο επίπεδο. Προκειμένου να μπορεί να παρακολουθηθεί κανείς την κίνηση του ελλειψοειδούς έχει σχεδιασθεί ένα μαύρο εύθυγραμμο τμήμα κατά μήκος του μεγάλου ημιάξονα του ελλειψοειδούς, καθώς και μια μπλε ημιπερίφεια αυτού που συνδέει τα δύο αντιδιαμετρικά σημεία αυτού επί του μεγάλου άξονα. Καθώς κυλιέται το σώμα η κόκκινη τελεία διαγράφει το μωβ κομμάτι της ερπολογράφου πάνω στο αναλλοίωτο επίπεδο, ενώ παράλληλα διαγράφεται με μαύρο χρώμα η πολογράφος πάνω στο ελλειψοειδές. Η μη διαγραφείσα ακόμη ερπολογράφος και πολογράφος παρουσιάζονται με γκρι χρώμα στο κάθε στιγμιότυπο. Οι χρόνοι που αντιστοιχούν στο κάθε στιγμιότυπο, σε μονάδες $L/(2K)$, αναγράφονται στην κορυφή του κάθε σχεδίου. Στο κεντρικό εικονίδιο έχει σχεδιασθεί η ερπολογράφος για ένα χρονικό διάστημα που το σώμα έχει κυλήσει τόσο ώστε να έχει ολοκληρωθεί η πλήρης διαγραφή της πολογράφος αυτού.

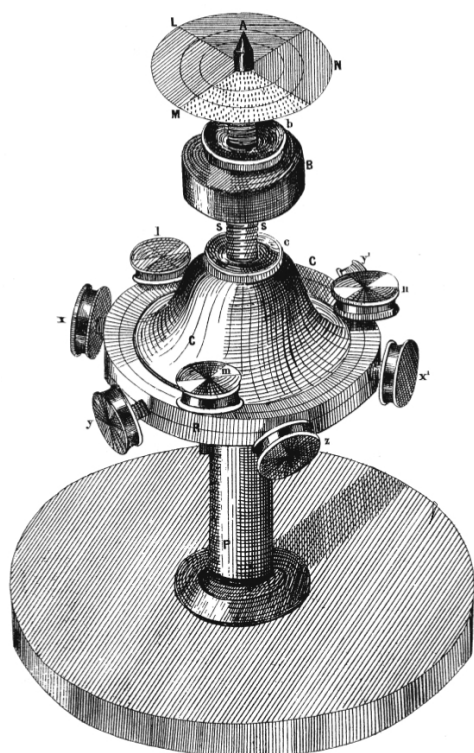
μπορεί τότε να προσδιορίσει πώς ακριβώς θα κινηθεί η γωνιακή ταχύτητα του στερεού. Θα ακολουθήσει τις καμπύλες αυτές; Θα παραμείνει στο σημείο τομής τους; Τα ερωτήματα αυτά όπως

ημιάξονα, ενώ από κάτω θα έχουμε ολοένα μεγαλύτερα δαχτυλίδια που περιβάλλουν τον μικρό ημιάξονα. Για λόγους συνέχειας τα δύο είδη δαχτυλιδιών θα πρέπει να συναντηθούν διερχόμενα από τον ενδιάμεσο ημιάξονα.

και η χρονική εξέλιξη της γωνιακής ταχύτητας επί της πολογράφου θα απαντηθούν μέσω των δυναμικών εξισώσεων που διέπουν την κίνηση του στερεού που θα δούμε σε επόμενο εδάφιο.

Ενώ ήταν αρκετά εύκολο να περιγράψουμε τις πολογράφους που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές της στροφορμής, οι αντίστοιχες ερπολογράφοι σχηματίζουν πολύ πιο πολύπλοκες καμπύλες (βλ. Σχ. 18). Ο Maxwell επινόησε μια ωραία και απλή πειραματική διάταξη²⁵ με την οποία μπορεί κανείς να δει πως διαγράφεται η ερπολογράφος όταν το σώμα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα που είναι στην περιοχή του κύριου άξονα με τη μικρότερη ή μεγαλύτερη ροπή αδράνειας. Ο Maxwell τοποθετεί στον κατάλληλο κύριο άξονα του σώματος ένα δίσκο

που είναι χωρισμένος σε 4 τεταρτημόρια χρωματισμένα διαδοχικά με κόκκινο, κίτρινο, πράσινο και μπλε χρώμα (βλ. Σχ. 19). Όταν το σώμα τεθεί σε περιστροφή, ο στιγμιαίος άξονας περιστροφής αποκαλύπτεται διότι η γύρω περιοχή του είναι σχεδόν ακίνητη και διακρίνει κανείς το χρώμα του τεταρτημορίου του δίσκου στον οποίο βρίσκεται στιγμιαία η γωνιακή ταχύτητα, ενώ οι περιοχές του δίσκου που είναι πιο μακριά από τον άξονα περιστροφής φαίνονται καφετιές.²⁶ Έτσι η θέση της γωνιακής ταχύτητας γίνεται εμφανής διότι καταλαμβάνει το κέντρο ενός χρωματισμένου χωρίου και οι διαδοχικές θέσεις του χρωματισμένου αυτού σημείου διαγράφουν την ερπολογράφο, αποκαλύπτοντας την φορά κίνησης του άξονα της γωνιακής ταχύτητας.



Σχήμα 19: Η διάταξη του Maxwell με την οποία γίνεται εμφανής η ερπολογράφος.

²⁵J. C. Maxwell, 1856: “On an instrument to illustrate Poinsot’s theory of rotation”, που συμπεριλαμβάνεται στη συλλογή W. Niven, “The scientific papers of James Clerk Maxwell, V. I, Dover (1965)).

²⁶Η ανάμιξη διαφορετικών χρωμάτων μπογιάς παράγει διαφορετικό χρώμα από την αντίστοιχη ανάμιξη διαφορετικών χρωμάτων φωτός.

7 Οι κύριες ροπές αδράνειας απλών ομογενών στερεών

Στο εδάφιο αυτό θα υπολογίσουμε τους τανυστές ροπής αδράνειας μερικών απλών γεωμετρικών κατασκευών με μάζα ομοιόμορφα κατανεμημένη.

- (α) **Ευθύγραμμο τμήμα:** Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB συνολικής μάζας M και μήκους L , με τη μάζα του ομογενώς κατανεμημένη με γραμμική πυκνότητα $\rho = M/L$ ώστε $dm = \rho dx$. Το ΚΜ είναι στο μέσο του τμήματος. Ο άξονας στη διεύθυνση του AB είναι κύριος άξονας (ο άξονας 3) με μηδενική ροπή αδράνειας, $I_3 = 0$. Κάθε άξονας κάθετος στο AB είναι επίσης κύριος άξονας αδράνειας με ροπή αδράνειας

$$I_{\perp} = \int_{-L/2}^{L/2} \rho dx x^2 = \rho \frac{L^3}{12} = M \frac{L^2}{12}.$$

Έτσι αν επιλέξουμε ως άξονες 1 και 2, δύο οποιουσδήποτε άξονες που διέρχονται από το μέσο του AB και είναι κάθετοι στο AB θα έχουμε τανυστή ροπής αδράνειας:

$$I_{ij}^{AB} = \frac{ML^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Η δε ροπή αδράνειας ως προς το άκρο A , σύμφωνα με το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων, είναι

$$I_A = I + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = M \left(\frac{L^2}{12} + \frac{L^2}{4} \right) = M \frac{L^2}{3}.$$

- (β) **Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές a, b :** Λαμβάνουμε καρτεσιανό σύστημα ώστε το ορθογώνιο να κείται στο επίπεδο $x - y$ με τις πλευρές του παράλληλες στους άξονες x, y , καταλαμβάνοντας το χωρίο $|x| \leq a/2, |y| \leq b/2$, ώστε το ΚΜ του σώματος να βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Επειδή το σώμα είναι επίπεδο ο άξονας z , που είναι κάθετος στο επίπεδο του ορθογωνίου στην αρχή των αξόνων, είναι κύριος άξονας με ροπή αδράνειας I_3 (τη μέγιστη τιμή των κυρίων ροπών αδράνειας, αφού όλες οι στοιχειώδεις μάζες της ορθογώνιας πλάκας βρίσκονται στη μέγιστη δυνατή απόσταση σε σχέση με οποιονδήποτε άλλον άξονα διέρχεται από το ΚΜ). Επιπλέον, επειδή το σώμα έχει κατοπτρική συμμετρία ως προς τους άξονες x και y , οι άξονες x και y είναι επίσης κύριοι άξονες με ροπές αδράνειας I_1 και I_2 αντίστοιχα. Λόγω επιπεδότητας της κατανομής μάζας είναι $I_3 = I_1 + I_2$.

Αρκεί να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειας I_1 ως προς τον άξονα x για να προσδιορισθούν όλες οι ροπές αδράνειας του ορθογωνίου, όπως θα δούμε. Η επιφανειακή πυκνότητα μάζας του στερεού είναι $\rho = M/(ab)$. Θεωρούμε λωρίδες του ορθογωνίου παράλληλες στον άξονα x σε απόσταση y από τον άξονα x , πλάτους dy και μάζας $dm = \rho a dy$. Η

ροπή αδράνειας κάθε λωρίδας ως προς το ΚΜ (την αρχή των αξόνων) περί τον άξονα της λωρίδας (που είναι παράλληλος στον x) είναι μηδενική και επομένως η ροπή αδράνειας μίας λωρίδας περί τον άξονα x από το θεώρημα των παράλληλων αξόνων είναι

$$dI_1 = 0 + (\rho a dy) \times y^2 ,$$

και επομένως

$$I_1 = \int_{-b/2}^{b/2} dI_1 = \rho a \frac{b^3}{12} = M \frac{b^2}{12} .^{27}$$

Λαμβάνοντας, τώρα, λωρίδες παράλληλες στον άξονα y καταλήγουμε ότι

$$I_2 = M \frac{a^2}{12} .$$

και τελικά η ροπή αδράνειας περί τον άξονα z είναι

$$I_3 = M \frac{a^2 + b^2}{12} . \quad (43)$$

Συνολικά

$$I_{ij}^{\text{ορθ. πλακ.}} = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} . \quad (44)$$

(γ) **Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με πλευρές a, b, c :** Θεωρούμε καρτεσιανό σύστημα ώστε οι πλευρές του παραλληλεπίπεδου να είναι παράλληλες στους άξονες x, y, z , και το παραλληλεπίπεδο να καταλαμβάνει το χωρίο $|x| \leq a/2, |y| \leq b/2, |z| \leq c/2$, ώστε το ΚΜ του στερεού να βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Επειδή το σώμα έχει κατοπτρική συμμετρία ως προς ως προς τα 3 επίπεδα του καρτεσιανού πλαισίου οι κύριοι άξονες του στερεού είναι οι άξονες x, y, z με ροπές αδράνειας I_1 και I_2, I_3 αντίστοιχα.

Αρκεί να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειας I_1 περί τον άξονα x και ομοίως θα προκύψουν και οι υπόλοιπες. Η πυκνότητα του στερεού είναι $\rho = M/(abc)$. Θεωρούμε επίπεδους φλοιούς του παραλληλεπίπεδου παράλληλους στο επίπεδο xy σε απόσταση z από το επίπεδο xy πάχους dz και μάζας $dm = \rho ab dz$. Η ροπή αδράνειας κάθε λωρίδας ως προς το ΚΜ του φλοιού και περί τον άξονα του φλοιού που είναι παράλληλος στον άξονα είναι σύμφωνα με την ανάλυση της (β) γεωμετρικής διάταξης

$$dI_1' = (\rho ab dz) \frac{b^2}{12} ,$$

²⁷Θα μπορούσαμε να αξιοποιήσουμε άμεσα το προηγούμενο αποτέλεσμα για το ευθύγραμμο τμήμα για να λάβουμε το παρόν αποτέλεσμα. Όλη η μάζα της πλάκας θα μπορούσε να συρρικνωθεί κατά μήκος του άξονα x για να βρεθεί η ροπή αδράνειας γύρω από τον άξονα x . Τότε η ορθογώνια πλάκα θα εκφυλιζόταν σε ευθύγραμμο τμήμα μήκους b , εκτεινόμενο στον άξονα y .

και επομένως, από το θεώρημα των παράλληλων αξόνων, θα είναι ως προς το ΚΜ του παραλληλεπιπέδου

$$dI_1 = (\rho ab dz) \times z^2 + (\rho ab dz) \times \frac{b^2}{12}.$$

Έτσι

$$I_1 = \int_{-c/2}^{c/2} dI_1 = M \frac{b^2 + c^2}{12}.^{28}$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα οι ροπές αδράνειας πέρι του άξονες y και z θα είναι

$$I_2 = M \frac{c^2 + a^2}{12}, \quad I_3 = M \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

Συνολικά, λοιπόν, ο τανυστής ροπής αδράνειας θα είναι

$$I_{ij}^{\text{ορθ. παραλ.}} = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Στην περίπτωση του κύβου $a = b = c$, ο τανυστής αδράνειας είναι ιστροπικός και είναι

$$I_{ij} = M \frac{a^2}{6} \delta_{ij}.$$

- (δ) **Ελλειπτικός και κυκλικός δίσκος:** Επιλέγεται το καρτεσιανό σύστημα ώστε ο ελλειπτικός δίσκος να βρίσκεται στο επίπεδο $x - y$ και να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Λόγω κατοπτρικής συμμετρίας, κύριοι άξονες είναι οι x, y και ο z με ροπές αδράνειας I_1, I_2 και I_3 , αντίστοιχα. Η ροπή ως προς τον x άξονα είναι

$$\begin{aligned} I_1 &= \rho \int_{-a}^a dx \int_{-(b/a)\sqrt{a^2-x^2}}^{+(b/a)\sqrt{a^2-x^2}} dy y^2 = \rho \frac{2b^3}{3a^3} \int_{-a}^a dx (a^2 - x^2)^{3/2} \\ &\stackrel{\substack{x \rightarrow \\ a \sin \theta}}{=} \rho \frac{2ab^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos^4 \theta = \rho \frac{2ab^3}{3} \frac{3\pi}{8} = M \frac{b^2}{4}, \end{aligned}$$

²⁸Για άλλη μια φορά μπορεί να χρησιμοποιήσει κανείς το επιχείρημα της “συρρίκνωσης” που συναντήσαμε στην προηγούμενη υποσημείωση για να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Από τη γεωμετρική διάταξη (β) μιας ορθογώνιας πλάκας, μπορούμε να υπολογίσουμε την I_1 του παραλληλεπιπέδου, θεωρώντας το ως μια σειρά από πλάκες διάστασης $b \times c$ που τις διαπερνά κάθετα ο άξονας x , οπότε δεν έχει σημασία αν πρόκειται για μια παχιά πλάκα ή για μια λεπτή πλάκα. Η ροπή αδράνειας I_1 θα είναι αυτή μιας απειροστά λεπτής πλάκας: $M(b^2 + c^2)/12$ (βλ. (43)).

όπου $\rho = M/(\pi ab)$ η επιφανειακή πυκνότητα. Ομοίως είναι

$$I_2 = M \frac{a^2}{4} \quad \text{και} \quad I_3 = M \frac{a^2 + b^2}{4} .$$

Οι αντίστοιχες ροπές αδράνειας για έναν κυκλικό δίσκο είναι:

$$I_1 = I_2 = M \frac{a^2}{4} , \quad I_3 = M \frac{a^2}{2} .$$

Το τελικό αποτέλεσμα για τη ροπή αδράνειας I_3 του κυκλικού δίσκου, το οποίο υπολογίζεται πανεύκολα απευθείας από το ολοκλήρωμα

$$I_3 = \int_0^a dm(\rho_{\perp}) \rho_{\perp}^2 = \frac{M}{\pi a^2} \int_0^a (2\pi \rho_{\perp} d\rho_{\perp}) \rho_{\perp}^2 = \frac{Ma^2}{2} , \quad (46)$$

θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να λάβει κανείς όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα για κυκλικό και ελλειπτικό δίσκο: Οι μεν ροπές αδράνειας του κυκλικού δίσκου I_1, I_2 , για λόγους συμμετρίας θα πρέπει να είναι ίσες μεταξύ τους και ίσες με το ήμισυ της I_3 , αφού $\rho_{\perp}^2 = x^2 + y^2$, όπως συμβαίνει με κάθε επίπεδη κατανομή μάζας. Επομένως

$$I_1 = I_2 = \frac{Ma^2}{4} .$$

Όσον αφορά τον ελλειπτικό δίσκο, θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει ότι αυτός προκύπτει από την ομογενή συμπίεση (ή έκταση) ενός κυκλικού δίσκου κατά τη διεύθυνση του άξονα y , ώστε ο δεύτερος ημιάξονας αυτού να αποκτήσει μήκος b . Έτσι, χωρίς να αλλάξει η συνολική μάζα του αντικειμένου καθώς και η ομογένεια αυτού (η επιφανειακή του πυκνότητα αλλάζει κατά τον παράγοντα b/a) ο δίσκος μετατρέπεται σε ελλειπτικός με ημιάξονες a, b . Τώρα είναι πλέον προφανές ότι η μεν ροπή αδράνειας I_2 δεν θα αλλάξει καθόλου, αφού οι πιο κοντές (ή πιο μακριές) στοιχειώδεις ράβδοι κατά μήκος του άξονα y στις οποίες θα διαχωριστεί ο ελλειπτικός δίσκος θα έχουν την ίδια I_2 ροπή αδράνειας, ανεξαρτήτως του μήκους τους, αφού θα αντιστοιχούν στο ίδιο ποσοστό της συνολικής μάζας M με αυτό του κυκλικού δίσκου ενώ οι αποστάσεις τους από το ΚΜ, x δεν θα αλλάξει. Όμως, η I_1 θα μεταβληθεί κατά τον παράγοντα $(b/a)^2$, αφού όλες οι y αποστάσεις των στοιχειωδών ράβδων παράλληλων στον άξονα x θα αλλάξουν κατά τον παράγοντα b/a λόγω συστολής (ή διαστολής) του δίσκου.

- (ε) **Ομογενής σφαίρα:** Στη σφαίρα όλοι οι άξονες είναι κύριοι άξονες αδρανείας. Η σφαίρα έχει ακτίνα a και πυκνότητα $\rho = M/(4\pi a^3/3)$. Λαμβάνουμε οποιοδήποτε καρτεσιανό πλαίσιο με αρχή το κέντρο της σφαίρας. Τότε οι ροπές αδρανείας ως προς τους τρεις

άξονες του συστήματος αναφοράς είναι $I_1 = I_2 = I_3 = I$. Επομένως

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3) = \frac{2}{3} \int \int \int \rho dx dy dz (x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \frac{2}{3} \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^a r^4 dr \\ &= M \frac{2a^2}{5}. \end{aligned}$$

(στ) **Τριαξονικό Ελλειψοειδές:** Οι κύριοι άξονες ροπές του ομογενούς ελλειψοειδούς που καταλαμβάνει το χωρίο \mathcal{D} :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$

είναι οι άξονες x, y, z με ροπές αδράνειας I_1, I_2, I_3 αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι με τον μετασχηματισμό $(x, y, z) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta)$ με

$$x = a\xi, \quad y = b\eta, \quad z = c\zeta, \quad (47)$$

το ελλειψοειδές μετασχηματίζεται σε σφαίρα $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ μοναδιαίας ακτίνας στο νέα σύστημα συντεταγμένων ξ, η, ζ .

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον μετασχηματισμό μπορούμε αμέσως να υπολογίσουμε τον όγκο του ελλειψοειδούς, αν γνωρίζουμε ότι ο όγκος μιας μοναδιαίας σφαίρας σε τρεις διαστάσεις, που συμβολίζεται \mathcal{S}^3 , είναι $\int \int \int_{\mathcal{S}^3} d\xi d\eta d\zeta = 4\pi/3$, αφού ο όγκος του ελλειψοειδούς $V = \int \int \int_{\mathcal{D}} dx dy dz$ εκτελώντας τον μετασχηματισμό (47) γίνεται

$$V = abc \int \int \int_{\mathcal{S}^3} d\xi d\eta d\zeta = \frac{4\pi}{3} abc,$$

και έτσι η πυκνότητα του ελλειψοειδούς είναι $\rho = M/(4\pi abc/3)$. Επομένως η ροπή αδρανείας I_1 είναι

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \int \int_{\mathcal{D}} \rho dx dy dz (y^2 + z^2) \\ &= \rho abc \int \int \int_{\mathcal{S}^3} d\xi d\eta d\zeta (b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2) \\ &= \dots = \rho abc \int \int \int_{\mathcal{S}^3} d\xi d\eta d\zeta (b^2 + c^2) \eta^2. \end{aligned}$$

Η εξήγηση για την τελευταία απλοποίηση (με την αντικατάσταση $\zeta \rightarrow \eta$) είναι η ακόλουθη: Στην περίπτωση της σφαίρας

$$\int \int \int_{\mathcal{S}^3} d\xi d\eta d\zeta \xi^2 = \int \int \int_{\mathcal{S}^3} d\xi d\eta d\zeta \eta^2 = \int \int \int_{\mathcal{S}^3} d\xi d\eta d\zeta \zeta^2 = \frac{I^{\sigma\phi}}{2} =,$$

όπου $I^{\sigma\phi} = 2/5 \times 4\pi/3 = 8\pi/15$ είναι η ροπή αδράνειας σφαίρας μοναδιαίας ακτίνας και μοναδιαίας πυκνότητας. Επομένως η ροπή αδράνειας του ελλειψοειδούς I_1 , σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι

$$I_1 = \rho abc(b^2 + c^2) \frac{4\pi}{15} = M \frac{b^2 + c^2}{5}. \quad (48)$$

Με ανάλογα επιχειρήματα βρίσκουμε και τις άλλες ροπές αδράνειας:

$$I_2 = M \frac{c^2 + a^2}{5}, \quad I_3 = M \frac{a^2 + b^2}{5}. \quad (49)$$

Στην πραγματικότητα, όλα τα παραπάνω επιχειρήματα περί αναγωγής των κύριων ροπών αδράνειας ενός τριαξονικού ελλειψοειδούς σε αυτές μιας σφαίρας είναι απολύτως ισοδύναμο με τα επιχειρήματα συμπίεσης (ή έκτασης) που χρησιμοποιήσαμε στην περίπτωση του ελλειπτικού δίσκου και των ανάλογων επιπτώσεων που αυτές οι παραμορφώσεις θα επιφέρουν στις αντίστοιχες ροπές αδράνειας.

8 Γενικές εξισώσεις κίνησης του στερεού – εξισώσεις Euler

Όπως έχουμε συζητήσει αναλυτικά στο Κεφάλαιο 12, η κίνηση ενός στερεού προσδιορίζεται από την κίνηση του ΚΜ του, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση:

$$m\ddot{\mathbf{R}}_{KM} = \mathbf{F}, \quad (50)$$

όπου \mathbf{F} η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο στερεό, καθώς και από την κίνηση των στοιχείων του στερεού ως προς το ΚΜ τα οποία όμως, στην περίπτωση του στερεού σώματος, μπορούν μόνο να εκτελούν περιστροφική κίνηση περί το ΚΜ, όπως απέδειξε ο Euler. Έτσι, η θέση του στερεού ως προς το ΚΜ προσδιορίζεται από την εξέλιξη του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας του στερεού, ενώ η εξέλιξη της γωνιακής ταχύτητας προσδιορίζεται με τη σειρά της από την εξέλιξη της στροφορμής του στερεού ως προς το ΚΜ. Η \mathbf{L} ικανοποιεί, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 12, πάντα την εξίσωση

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}, \quad (51)$$

όπου $\boldsymbol{\tau}$ είναι η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το ΚΜ.

Στα στερεά σώματα η \mathbf{L} εξαρτάται γραμμικά από τη γωνιακή ταχύτητα μέσω της σχέσης $L_i = I_{ij}\omega_j$, και επομένως για να προσδιορισθεί η εξέλιξη της γωνιακής ταχύτητας πρέπει να επιλυθεί η εξίσωση:

$$\frac{d(I_{ij}\omega_j)}{dt} = \tau_i,$$

η οποία διευκολύνεται με την επιλογή του κατάλληλου καρτεσιανού πλαισίου. Τέτοιο είναι το καρτεσιανό πλαίσιο 1, 2, 3 που ορίζουν ανά πάσα στιγμή οι κύριοι άξονες του ταυυστή αδράνειας του στερεού διότι σε αυτούς τους άξονες ο ταυυστής αδράνειας είναι χρονοανεξάρτητος με τίμημα όμως τα διανύσματα βάσης του 1, 2, 3 μέσω των οποίων αναλύονται όλα τα διανύσματα να είναι χρονοεξαρτώμενα. Θεωρούμε, λοιπόν, το καρτεσιανό σύστημα 1, 2, 3 των κυρίων αξόνων του στερεού με μοναδιαία διανύσματα βάσης $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}, \hat{\mathbf{3}}$. Σε αυτό το σύστημα η γωνιακή ταχύτητα αναλύεται ως $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{\mathbf{1}} + \omega_2 \hat{\mathbf{2}} + \omega_3 \hat{\mathbf{3}}$ και αντίστοιχα η στροφορμή:

$$\mathbf{L} = L_1 \hat{\mathbf{1}} + L_2 \hat{\mathbf{2}} + L_3 \hat{\mathbf{3}} = I_1 \omega_1 \hat{\mathbf{1}} + I_2 \omega_2 \hat{\mathbf{2}} + I_3 \omega_3 \hat{\mathbf{3}}.$$

Με αυτήν την επιλογή καρτεσιανού συστήματος, η χρονική παράγωγος της στροφορμής, δεδομένου ότι οι ροπές I_1, I_2 και I_3 δεν εξαρτώνται από τον χρόνο, είναι:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} (I_1 \omega_1 \hat{\mathbf{1}} + I_2 \omega_2 \hat{\mathbf{2}} + I_3 \omega_3 \hat{\mathbf{3}}) \\ &= I_1 \frac{d\omega_1}{dt} \hat{\mathbf{1}} + I_2 \frac{d\omega_2}{dt} \hat{\mathbf{2}} + I_3 \frac{d\omega_3}{dt} \hat{\mathbf{3}} + \\ &\quad I_1 \omega_1 \frac{d\hat{\mathbf{1}}}{dt} + I_2 \omega_2 \frac{d\hat{\mathbf{2}}}{dt} + I_3 \omega_3 \frac{d\hat{\mathbf{3}}}{dt}. \end{aligned} \quad (52)$$

Παράλληλα, τα διανύσματα βάσης περιστρέφονται μαζί με το στερεό και επομένως ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\frac{d\hat{\mathbf{1}}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{1}}, \quad \frac{d\hat{\mathbf{2}}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{2}}, \quad \frac{d\hat{\mathbf{3}}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{3}},$$

με αποτέλεσμα η (52) να μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= I_1 \frac{d\omega_1}{dt} \hat{\mathbf{1}} + I_2 \frac{d\omega_2}{dt} \hat{\mathbf{2}} + I_3 \frac{d\omega_3}{dt} \hat{\mathbf{3}} + I_1 \omega_1 (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{1}}) + I_2 \omega_2 (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{2}}) + I_3 \omega_3 (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{3}}) \\ &= I_1 \frac{d\omega_1}{dt} \hat{\mathbf{1}} + I_2 \frac{d\omega_2}{dt} \hat{\mathbf{2}} + I_3 \frac{d\omega_3}{dt} \hat{\mathbf{3}} + \boldsymbol{\omega} \times (I_1 \omega_1 \hat{\mathbf{1}} + I_2 \omega_2 \hat{\mathbf{2}} + I_3 \omega_3 \hat{\mathbf{3}}) \\ &= \left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{\text{περ}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (53)$$

Ο πρώτος όρος της χρονικής μεταβολής της στροφορμής, $d\mathbf{L}/dt|_{\text{περ}}$ είναι η παράγωγος του διανύσματος \mathbf{L} όπως υπολογίζεται από παρατηρητές στο περιστρεφόμενο σύστημα 1, 2, 3 για τους οποίους τα διανύσματα $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}$ και $\hat{\mathbf{3}}$, αλλά και ο ταυυστής ροπής αδράνειας είναι σταθερά. Έτσι, ο παρατηρητής αυτός υπολογίζει ότι η χρονική μεταβολή της στροφορμής είναι:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_r &\equiv \frac{dL_1}{dt} \hat{\mathbf{1}} + \frac{dL_2}{dt} \hat{\mathbf{2}} + \frac{dL_3}{dt} \hat{\mathbf{3}} \\ &= I_1 \frac{d\omega_1}{dt} \hat{\mathbf{1}} + I_2 \frac{d\omega_2}{dt} \hat{\mathbf{2}} + I_3 \frac{d\omega_3}{dt} \hat{\mathbf{3}}. \end{aligned}$$

Ο δε όρος $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$ στην (53) είναι ο ρυθμός μεταβολής που επιφέρει η περιστροφή του διανύσματος \mathbf{L} , η οποία πρέπει να συνυπολογιστεί ώστε να υπολογιστεί ορθά η χρονική παράγωγος της στροφορμής.

Συνεπώς η (51) γραμμένη για τις συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας στο σύστημα του σώματος 1, 2, 3, και κάνοντας χρήση της (53), λαμβάνει τη μορφή:

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = \tau_1, \quad (54\alpha')$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 = \tau_2, \quad (54\beta')$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = \tau_3. \quad (54\gamma')$$

Οι εξισώσεις αυτές (η κάθε μια από τις οποίες μπορεί να σχηματιστεί από την προηγούμενη ακολουθώντας την κυκλική μετάθεση των δεικτών $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$) ονομάζονται εξισώσεις του Euler. Μπορούν ισοδύναμα να γραφούν με μεταβλητές τις συνιστώσες (L_1, L_2, L_3) της στροφορμής στο πλαίσιο 1, 2, 3 οπότε και παίρνουν τη μορφή:

$$\dot{L}_1 + L_2 L_3 \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3} \right) = \tau_1, \quad (55\alpha')$$

$$\dot{L}_2 + L_3 L_1 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) = \tau_2, \quad (55\beta')$$

$$\dot{L}_3 + L_1 L_2 \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) = \tau_3. \quad (55\gamma')$$

9 Ποιοτική περιγραφή της κίνησης ελευθέρων στερεών

Έχουμε ήδη κάνει μία γενική περιγραφή της κίνησης του σώματος, με τη βοήθεια της γεωμετρικής μέθοδο του Poinsot, όταν στο στερεό δεν ασκείται κάποια εξωτερική ροπή και επομένως διατηρείται η στροφορμή του. Εδώ θα εξειδικεύσουμε την περιγραφή αυτή θέτοντας στο επίκεντρο τη συμπεριφορά συμμετρικών στερεών. Όταν στο στερεό δεν ασκείται εξωτερική ροπή, διατηρείται μεν η στροφορμή του, όπως φαίνεται από την (51), αλλά συγχρόνως διατηρείται και η περιστροφική του κινητική ενέργεια, όπως θα το περίμενε κανείς διαισθητικά και όπως θα δείξουμε αναλυτικά, στη συνέχεια.

Πρόταση 1

Όταν σε ένα στερεό διατηρείται η στροφορμή ως προς το ΚΜ διατηρείται και η περιστροφική κινητική ενέργεια περί το σημείο αυτό.

Πρώτη απόδειξη: Η περιστροφική ενέργεια είναι $K = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}/2$. Θα δείξουμε ότι εάν είναι $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$ τότε είναι και $\dot{K} = 0$. Οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας λαμβάνονται ως προς ένα αδρανειακό σύστημα με αρχή το ΚΜ. Ως προς αυτό το σύστημα το στερεό κινείται, καθώς και οι κύριοι άξονες του, με αποτέλεσμα ο τανυστής αδράνειας να είναι χρονοεξαρτώμενος. Ο τανυστής \dot{I}_{ij} , όμως, έχει την

ιδιότητα όταν το σώμα περιστρέφεται περί το ΚΜ με γωνιακή ταχύτητα ω να καθιστά τη διγραμμική μορφή

$$\omega_i \frac{dI_{ij}}{dt} \omega_j = 0, \quad (56)$$

μηδενική (παρότι ο \dot{I}_{ij} δεν είναι εν γένει αντισυμμετρικός τανυστής), όπως θα δείξουμε αργότερα. Η συνεπαγωγή $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{K} = 0$ βασίζεται πάνω στη συμμετρικότητα του I_{ij} σε συνδυασμό με την ιδιότητα (56). Πράγματι, έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{1}{2} \dot{\omega} \cdot \mathbf{L} + \frac{1}{2} \omega \cdot \dot{\mathbf{L}} = \frac{1}{2} \dot{\omega}_i I_{ij} \omega_j \\ &= \frac{1}{2} \omega_j I_{ji} \dot{\omega}_i \quad (\text{λόγω συμμετρικότητας του } I_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \omega_j \frac{d(I_{ji} \omega_i)}{dt} \quad (\text{λόγω της (56)}) \\ &= \frac{1}{2} \omega \cdot \dot{\mathbf{L}} = 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Απομένει να δείξουμε την (56): Επειδή στις περιστροφές όλα τα σημεία του στερεού εξελίσσονται σύμφωνα με την $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, το μέτρο $|\mathbf{r}|^2$ είναι σταθερό και $d|\mathbf{r}|^2/dt = 0$, καθώς και $\boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$. Επομένως είναι

$$\begin{aligned} \omega_i \frac{dI_{ij}}{dt} \omega_j &= \int_V dm \omega_i \frac{d(r_k r_k \delta_{ij} - r_i r_j)}{dt} \omega_j \\ &= \int_V dm \left(|\boldsymbol{\omega}|^2 \frac{d|\mathbf{r}|^2}{dt} - 2(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Η γεωμετρική ερμηνεία αυτής της ενδιαφέρουσας ιδιότητας οφείλεται στο ότι η μεταβολή του τανυστή ροπής αδράνειας οφείλεται στην περιστροφή του σώματος γύρω από τον άξονα της γωνιακής ταχύτητας και στην παραπάνω έκφραση η μεταβολή αυτή συναρτάται με την ίδια τη γωνιακή ταχύτητα. Πρόκειται για την τανυστική σχέση την αντίστοιχη με τη μεταβολή ενός διανύσματος \mathbf{A} που κινείται βάσει της $\dot{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$, όταν αυτό προβληθεί πάνω στο $\boldsymbol{\omega}$, δηλαδή το $\dot{\mathbf{A}} \cdot \boldsymbol{\omega}$.

Δεύτερη απόδειξη: Η πρώτη απόδειξη μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής. Αν αποδείξουμε ότι στην κίνηση ενός στερεού ισχύει η ταυτότητα

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{L} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \quad (58)$$

τότε η διατήρηση της στροφορμής συνεπάγεται αμέσως τη διατήρηση της ενέργειας (βλ. (57)) διότι απλά:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L})}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0.$$

Η ταυτότητα (58) αποδεικνύεται εύκολα αν σκεφτούμε ότι το στερεό αποτελείται από υλικά σημεία που όλα περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Επομένως αν ισχύει η (58) για ένα από τα σωματίδια,

θα ισχύει και για όλα, δεδομένου ότι η στροφορμή είναι το άθροισμα της στροφορμής κάθε σωματιδίου ως προς το κοινό σημείο περιστροφής. Αποδεικνύουμε την (58) για ένα σωματίδιο μάζας m που είναι στη θέση \mathbf{r} ως προς το σημείο περιστροφής. Η ταχύτητα του σωματιδίου είναι $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, η επιτάχυνση $\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$ και η στροφορμή του $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$. Θα δείξουμε ότι για ένα σωματίδιο που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ ισχύει η ταυτότητα:

$$\frac{1}{2} \frac{d(m\dot{\mathbf{r}}^2)}{dt} = m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{L} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt}.$$

Αφενός μεν είναι:

$$m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{r}} \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) = m\dot{\mathbf{r}} \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{L} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt},$$

και αφετέρου

$$m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt}.$$

Η απόδειξη της (58) ολοκληρώθηκε.

Τρίτη απόδειξη. Η περιστροφική κινητική ενέργεια είναι

$$K = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2),$$

όπου $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας στο σύστημα 1,2,3 των κυρίων αξόνων του στερεού, οι οποίες ικανοποιούν τις εξισώσεις (54) με μηδενική εξωτερική ροπή $\boldsymbol{\tau} = 0$ δεδομένου ότι διατηρείται η \mathbf{L} . Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (54) διαδοχικά με ω_1, ω_2 και ω_3 και προσθέτοντάς τις κατά μέλη έχουμε αμέσως:

$$I_1 \omega_1 \dot{\omega}_1 + I_2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + I_3 \omega_3 \dot{\omega}_3 = 0,$$

δηλαδή $\dot{K} = 0$, στο σύστημα του στερεού και εφόσον μιλάμε για ένα βαθμωτό μέγεθος και σε οποιοδήποτε σύστημα.

Συνεπώς, όταν οι εξωτερικές ροπές μηδενίζονται διατηρείται η στροφορμή \mathbf{L} και η περιστροφική ενέργεια K .

Η πρώτη απόδειξη παρατέθηκε για να φανεί η δυσκολία που εμφανίζεται αν επιλεγεί σύστημα αναφοράς στο οποίο ο τανυστής αδρανείας είναι χρονοεξαρτώμενος. Η τρίτη απόδειξη δείχνει την απλούστευση στη μελέτη της δυναμικής που επιτυγχάνεται με την επιλογή του καρτεσιανού συστήματος των κυρίων αξόνων του στερεού που κινούνται με το σώμα αλλά απαιτεί τις εξισώσεις Euler. Η δεύτερη απόδειξη έχει τρία πλεονεκτήματα: βασίζεται σε πρώτες αρχές και τα βήματα είναι απλά και σαφή, δεν αναφέρεται σε συστήματα αναφοράς (είναι αμιγώς διανυσματική) και επίσης έχει μεθοδολογική αξία διότι δείχνει ότι αν μία πρόταση ισχύει για ένα στερεό που αποτελείται από μία σημειακή μάζα η ίδια πρόταση ισχύει για κάθε στερεό, υπό την προϋπόθεση ότι η προς απόδειξη πρόταση έχει γραμμική εξάρτηση από τις μάζες του στερεού.

Η πρώτη σημαντική παρατήρηση που αφορά την κίνηση του ελεύθερου στερεού είναι ότι αν τεθεί αυτό σε περιστροφή γύρω από έναν από τους κύριους άξονες αδρανείας του, θα συνεχίσει να περιστρέφεται περί αυτόν τον κύριο άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Μάλιστα δεν υπάρχουν άλλοι άξονες περιστροφής με αυτήν την ιδιότητα. Με άλλα λόγια, οι περιστροφές

γύρω από τους κύριους άξονες του τανυστή αδρανείας είναι καταστάσεις περιστροφικής ισορροπίας του ελεύθερου στερεού, υπό την έννοια ότι αν τεθεί το στερεό σε περιστροφή περί αυτών των αξόνων, θα συνεχίσει να περιστρέφεται γύρω από αυτούς τους ίδιους άξονες με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Εν μέρει έχουμε ήδη αποδείξει την πρόταση αυτή μέσω των γεωμετρικών επιχειρημάτων του Poinsot. Δείξαμε ότι, αν το αναλλοίωτο επίπεδο είναι στη μέγιστη δυνατή απόσταση από την αρχή του ελλειψοειδούς Poinsot, η πολογράφος είναι μόνο ένα σημείο το οποίο αντιστοιχεί σε περιστροφή περί τον άξονα με τη μικρότερη ροπή αδράνειας και επομένως αν το στερεό τεθεί σε τέτοια περιστροφή τότε το ελεύθερο στερεό θα συνεχίσει να περιστρέφεται περί αυτόν τον άξονα με τη μέγιστη δυνατή ταχύτητα για τη δεδομένη κινητική περιστροφική ενέργεια. Ομοίως, αν το αναλλοίωτο επίπεδο βρίσκεται στην ελάχιστη δυνατή απόσταση από την αρχή του ελλειψοειδούς Poinsot τότε το σώμα περιστρέφεται μόνον περί τον άξονα με την μεγαλύτερη ροπή αδράνειας, με τη μικρότερη δυνατή γωνιακή ταχύτητα για δεδομένη κινητική ενέργεια. Όταν, όμως, η απόσταση του αναλλοίωτου επιπέδου είναι τέτοια ώστε το στερεό να μπορεί να περιστρέφεται περί τον άξονα με την ενδιάμεση ροπή αδρανείας, οι δυνατές τροχιές της γωνιακής ταχύτητας σε αυτή την περίπτωση περιλαμβάνουν εκτός από αυτόν τον άξονα και δύο καμπύλες που ζώνουν το ελλειψοειδές διερχόμενες από τα σημεία του ελλειψοειδούς που αντιστοιχούν στον μεσαίο άξονα αυτού (βλ. Σχ. 17).

Τα γεωμετρικά επιχειρήματα, στα οποία έχουμε καταφύγει ως τώρα, δεν αποκλείουν η γωνιακή ταχύτητα στην τρίτη αυτή περίπτωση να ακολουθήσει αυτές τις καμπύλες, αν αρχικά η γωνιακή ταχύτητα είχε την κατεύθυνση του άξονα με τη μεσαία ροπή αδράνειας. Για να αποκλείσουμε ότι μπορεί να συμβεί αυτό, απαιτείται να χρησιμοποιήσουμε τη μοναδικότητα των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων του Euler (54), δεδομένων αρχικών συνθηκών. Οι εξισώσεις του Euler (54) προβλέπουν ότι υπάρχουν μόνο οι εξής τρεις καταστάσεις περιστροφικής ισορροπίας:

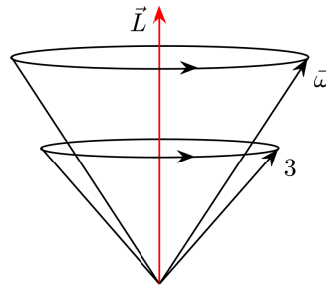
(α) περιστροφή περί τον κύριο άξονα 1: $\omega_1 \neq 0, \omega_2 = \omega_3 = 0,$

(β) περιστροφή περί τον κύριο άξονα 2: $\omega_2 \neq 0, \omega_3 = \omega_1 = 0,$

(γ) περιστροφή περί τον κύριο άξονα 3: $\omega_3 \neq 0, \omega_1 = \omega_2 = 0.$

Λόγω της μοναδικότητας των λύσεων των εξισώσεων Euler, αν η αρχική κατάσταση είναι μία από τις (α), (β), ή (γ), δηλαδή περιστροφή περί κάποιον κύριο άξονα η περιστροφή θα συνεχίσει περί αυτόν τον άξονα. Έτσι όταν το αναλλοίωτο επίπεδο είναι σε απόσταση ίση με τον μεσαίο ημιάξονα του ελλειψοειδούς, δηλαδή είναι $2K/|\mathbf{L}| = \sqrt{2K/I_2}$, η πολογράφος μπορεί να είναι ένα σημείο, αν αρχικά η περιστροφή εκτελείται περί τον μεσαίο άξονα, ή μέρος της καμπύλης που ενώνει τα σημεία τομής του ελλειψοειδούς με τον μεσαίο άξονα χωρίς όμως να τα συμπεριλαμβάνει, αφού σε αυτή την περίπτωση καμία από τις συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας που υπεισέρχονται στις εξισώσεις Euler δεν είναι μηδέν. Σε επόμενο εδάφιο θα εξεταστεί αυτή η κατάσταση αναλυτικά και θα μελετηθεί η ευστάθεια των καταστάσεων περιστροφικής ισορροπίας.

Ειδικά αν ένας σφαιρικός στροβός, όπως για παράδειγμα μία ομογενής σφαίρα ή ένα ομογενές πλατωνικό στερεό, τεθεί σε περιστροφική κίνηση με αρχική γωνιακή ταχύτητα ω , εφόσον



Σχήμα 20: Στο σύστημα του εργαστηρίου ο άξονας συμμετρίας 3, ενός ελεύθερου συμμετρικού στροβού περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα περί το σταθερό διάνυσμα \mathbf{L} διαγράφοντας έναν κυκλικό κώνο. Η γωνιακή ταχύτητα ω έχει σταθερό μέτρο και είναι στο ίδιο επίπεδο με την \mathbf{L} και $\hat{\mathbf{3}}$ διαγράφοντας και αυτή έναν κώνο.

κάθε άξονας που διέρχεται από το ΚΜ είναι κύριος άξονας αδρανείας του σώματος, θα συνεχίσει να περιστρέφεται με αυτήν τη γωνιακή ταχύτητα και τότε η πολογράφος και η ερποπολογγράφος θα είναι σημεία.

Το ίδιο συμβαίνει και με τους περιστροφείς, όπως σε ένα ομογενές ραβδί μηδενικού πάχους. Σε αυτήν την ιδανική περίπτωση δεν νοείται περιστροφή περί τον άξονα του σώματος, που τον σημειώνουμε ως άξονα 3, οπότε η γωνιακή ταχύτητα του περιστροφέα βρίσκεται στο επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα του σώματος. Επειδή οι ροπές αδράνειας του περιστροφέα είναι ίσες στο κάθετο επίπεδο, κάθε άξονας στο κάθετο επίπεδο είναι κύριος άξονας και επομένως αν τεθεί σε περιστροφή το σώμα, επειδή η γωνιακή ταχύτητα θα είναι αναγκαστικά στο επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα συμμετρίας 3, αυτό θα συνεχίσει να περιστρέφεται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Η διαφορά με τον σφαιρικό στρόβο είναι ότι στην περίπτωση του περιστροφέα η γωνιακή ταχύτητα περιορίζεται στο επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα του σώματος.

Τα πρώτα ενδιαφέροντα φαινόμενα στην κίνηση του στερεού εμφανίζονται στους συμμετρικούς στροβούς, όπως είναι οι σβούρες και άλλα στερεά εκ περιστροφής των οποίων η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα συμμετρίας του σώματος I_3 είναι διαφορετική από τις ροπές αδράνειας στο κάθετο επίπεδο $I_1 = I_2 = I$. Το ερώτημα που θέλουμε να απαντήσουμε είναι ποια είναι η κίνηση ενός ελεύθερου συμμετρικού στροβού όταν του προσδώσουμε κάποια γωνιακή ταχύτητα ω σε κατεύθυνση που δεν είναι κύριος άξονας του στερεού.

Λαμβάνουμε το καρτεσιανό σύστημα 1, 2, 3 των κυρίων αξόνων του στερεού που έχει μοναδιαία διανύσματα βάσης αντίστοιχα τα $\hat{\mathbf{1}}$, $\hat{\mathbf{2}}$, $\hat{\mathbf{3}}$. Σε αυτό το σύστημα η γωνιακή ταχύτητα αναλύεται ως $\omega = \omega_1 \hat{\mathbf{1}} + \omega_2 \hat{\mathbf{2}} + \omega_3 \hat{\mathbf{3}}$ και η στροφορμή ως προς το ΚΜ μπορεί να γραφεί με τον εξής τρόπο:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= I(\omega_1 \hat{\mathbf{1}} + \omega_2 \hat{\mathbf{2}}) + I_3 \omega_3 \hat{\mathbf{3}} \\ &= I\omega + (I_3 - I)\omega_3 \hat{\mathbf{3}}, \end{aligned} \quad (59)$$

μιας και οι ροπές αδράνειας στο επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα συμμετρίας είναι ίσες.

Η (59) αποδεικνύει ότι η στροφορμή \mathbf{L} , η γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ και ο άξονας συμμετρίας του σώματος $\hat{\mathbf{z}}$ είναι πάντα στο ίδιο επίπεδο (βλ. Σχ. 20). Στο σύστημα του εργαστηρίου το διάνυσμα της στροφορμής \mathbf{L} είναι σταθερό, ενώ η γωνιακή ταχύτητα και ο άξονας συμμετρίας $\hat{\mathbf{z}}$ του σώματος κινούνται. Ας δούμε πώς: Η γωνιακή ταχύτητα σύμφωνα με την (59) είναι:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{L}}{I} - \frac{I_3 - I}{I} \omega_3 \hat{\mathbf{z}}. \quad (60)$$

Η κίνηση των σημείων του σώματος ως προς το ΚΜ προσδιορίζεται από την εξίσωση κίνησης των υλικών σημείων του σώματος, $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, από τη στιγμή που το σώμα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$. Επομένως, τα σημεία του άξονα $\hat{\mathbf{z}}$ του σώματος (και όχι της γωνιακής ταχύτητας που δεν είναι υλικά σημεία του σώματος) θα κινούνται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{z}}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{z}} = \left(\frac{\mathbf{L}}{I} - \frac{I_3 - I}{I} \omega_3 \hat{\mathbf{z}} \right) \times \hat{\mathbf{z}} \\ &= \left(\frac{\mathbf{L}}{I} \right) \times \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (61)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο άξονας $\hat{\mathbf{z}}$ του σώματος περιστρέφεται περί το σταθερό διάνυσμα \mathbf{L} με σταθερή γωνιακή ταχύτητα

$$\Omega_p = \frac{L}{I}, \quad (62)$$

σχηματίζοντας με αυτό σταθερή γωνία, αφού η (61) συνεπάγεται ότι είναι

$$\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{L}) = 0.$$

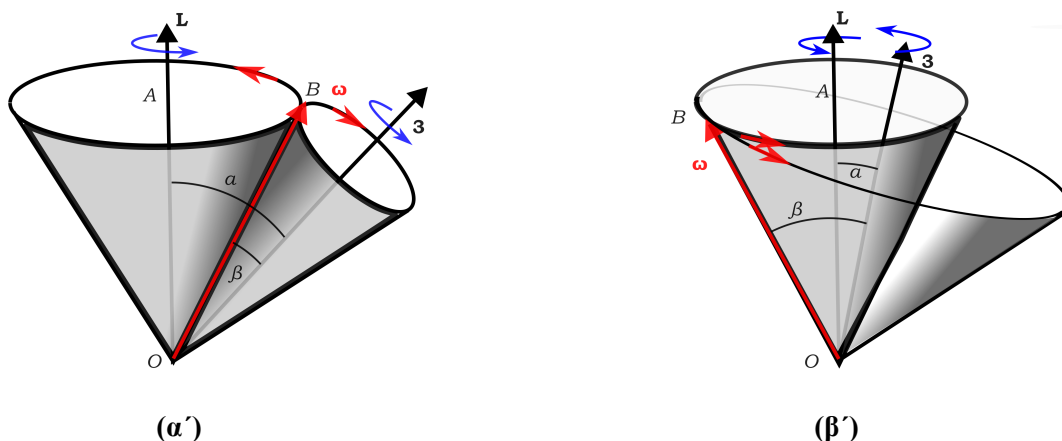
Ο άξονας $\hat{\mathbf{z}}$, λοιπόν, διαγράφει μια κωνική επιφάνεια με άξονα το διάνυσμα \mathbf{L} και γωνιακή ταχύτητα $\Omega_p = L/I$, όπου $L = |\mathbf{L}|$. Η γωνία, α , που σχηματίζει ο άξονας $\hat{\mathbf{z}}$ με τον άξονα της στροφορμής είναι

$$\cos \alpha = \frac{L_3}{L}.$$

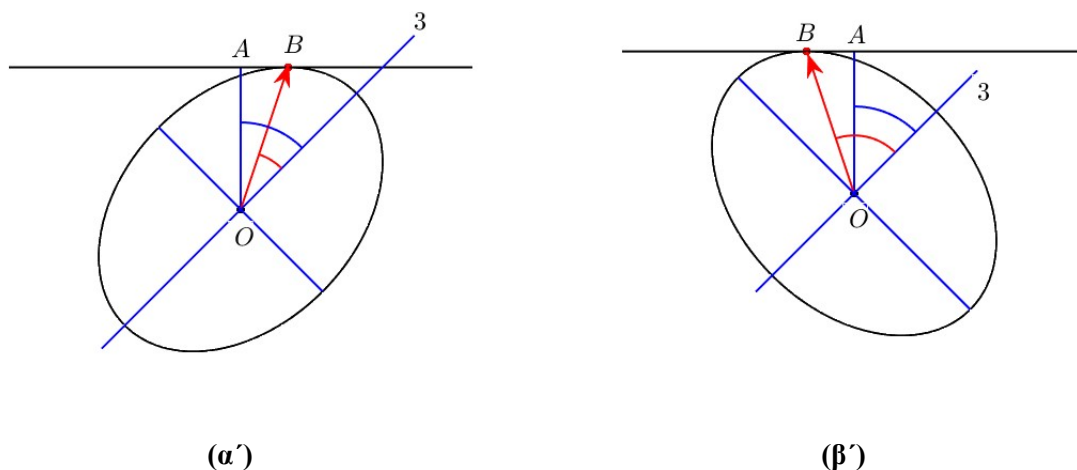
Η γωνιακή ταχύτητα Ω_p είναι η επονομαζόμενη *γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης*, με την οποία ο άξονας συμμετρίας του σώματος μεταπίπτει (precesses) γύρω από το σταθερό διάνυσμα της στροφορμής, κατ' αναλογία με την κίνηση του άξονα της σβούρας.²⁹

Ωστόσο, και η γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$, αυτή καθαυτή, περιστρέφεται περί το σταθερό \mathbf{L} με την ίδια γωνιακή ταχύτητα Ω_p δεδομένου ότι η $\boldsymbol{\omega}$ είναι συνεπίπεδη με το $\hat{\mathbf{z}}$ και το \mathbf{L} . Επιπλέον, η γωνιακή ταχύτητα διαγράφει μια κωνική επιφάνεια με αποτέλεσμα η ερποπολογράφος να είναι

²⁹Όχι γύρω από το διάνυσμα της στροφορμής, όπως θα δούμε αναλυτικά σε επόμενο εδάφιο, αλλά γύρω από την κατακόρυφο στο έδαφος που διέρχεται από το σημείο στήριξής της.



Σχήμα 21: Ο κατακόρυφος κώνος είναι ο κώνος της ερπολογράφου που διαγράφει η γωνιακή ταχύτητα $\omega = \vec{OB}$ συμμετρικού στροβού. Η ερποπολογράφος που διαγράφεται στο αναλλοίωτο επίπεδο είναι κύκλος. Ο λοξός κώνος είναι ο κώνος της πολογράφου που διαγράφει η γωνιακή ταχύτητα ω περί τον άξονα συμμετρίας, $\hat{\mathbf{3}}$ του σώματος στο σύστημα αναφοράς που κινείται με το σώμα. Η πολογράφος που διαγράφει η ω στο ελλειψοειδές Poinsot είναι και αυτή κυκλική. Το αριστερό διάγραμμα (α) αναφέρεται σε επιμήκεις σώμα ($I_3 < I$) και το δεξιό διάγραμμα (β) σε πεπλατυσμένο σώμα ($I_3 > I$). Η φορά που διαγράφεται η πολογράφος και η ερπολογραφος (κόκκινα βέλη), η κίνηση δηλαδή της ω πάνω στους δύο κώνους είναι σύμφωνη και στις δύο περιπτώσεις. Αυτή όμως δεν είναι και η φορά περιστροφής-κύλισης του κώνου της πολογράφου. Στην περίπτωση επιμήκους σώματος η φορά περιστροφής του κώνου της πολογράφου (μπλε βέλος) είναι αντίθετη από τη φορά κίνησης της πολογράφου στον κώνο του σώματος, ενώ στην περίπτωση του πεπλατυσμένου σώματος, οι δύο φορές είναι σύμφωνες (παράβαλε με την έκφραση (63)). Για τη διάταξη των ελλειψοειδών Poinsot με τους κώνους της ερπολογράφου και της πολογράφου και με το αναλλοίωτο επίπεδο βλ. Σχ. 22.



Σχήμα 22: Η διάταξη των ελλειψοειδών Poinsot και του αναλλοίωτου επιπέδου που αντιστοιχεί στο Σχ. 18. Εδώ φαίνεται η τομή των ελλειψοειδών (επιμήκους και πεπλατυσμένου) που διέρχεται από το σημείο επαφής αυτών, B , με το αναλλοίωτο επίπεδο.

κύκλος (βλ. Σχ. 20), αφού το μέτρο της ω είναι σταθερό, αλλά και η γωνία που σχηματίζει η ω με το \mathbf{L} είναι επίσης σταθερή. Το μέτρο της ω είναι σταθερό διότι εφόσον η γωνία α που σχηματίζεται μεταξύ του \mathbf{L} και του $\hat{\mathbf{z}}$ είναι σταθερή και το \mathbf{L} είναι σταθερό, θα είναι σταθερό και το $\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{z}} = L \cos \alpha = L_3 = I_3 \omega_3$. Άρα και η ω_3 . Συγχρόνως, από την (60), προκύπτει ότι το μέτρο της ω είναι

$$|\omega|^2 = \frac{L^2}{I^2} + \left(\frac{I_3 - I}{I} \omega_3 \right)^2 - 2 \frac{I_3 - I}{I^2} \omega_3 (\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{z}}),$$

και επομένως είναι και αυτό σταθερό κατά την κίνηση, όντας όλοι οι όροι σταθεροί. Τέλος, η γωνία μεταξύ του σταθερού μέτρου της ω και του σταθερού διανύσματος \mathbf{L} είναι σταθερή, αφού το εσωτερικό γινόμενο της (60) με την \mathbf{L}

$$\omega \cdot \mathbf{L} = \frac{|\mathbf{L}|^2}{I} - \frac{I_3 - I}{I} \omega_3 \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{L},$$

είναι σταθερό. Σημειωτέον, το εσωτερικό γινόμενο $\omega \cdot \mathbf{L}$ ισούται με το διπλάσιο της κινητικής ενέργειας του σώματος και έχουμε αποδείξει παραπάνω τη διατήρηση της περιστροφικής κινητικής ενέργειας του στερεού.

Επομένως η κίνηση του συμμετρικού στροβού συνίσταται σε περιστροφή περί το σταθερό διάνυσμα \mathbf{L} με γωνιακή ταχύτητα $\Omega_p = L/I$ και συγχρόνως, σύμφωνα με την (60), σε περιστροφή του στερεού περί τον άξονα συμμετρίας του, $\hat{\mathbf{z}}$, με σταθερού μέτρου γωνιακή ταχύτητα

$$-\frac{I_3 - I}{I} \omega_3. \quad (63)$$

Οι δύο προαναφερθείσες γωνιακές ταχύτητες συγχρονίζονται ώστε οι κώνοι να κυλίνουν ο δεύτερος πάνω στον πρώτο, χωρίς ολίσθηση.

Η περιστροφική κίνηση του άξονα συμμετρίας του στερεού ονομάζεται *κανονική μετάπτωση (regular precession)*. Γενικότερα η κίνηση ενός στερεού που περιστρέφεται περί κάποιο σημείο χαρακτηρίζεται ως κανονική μετάπτωση όταν το διάνυσμα θέσης των σημείων του στερεού ως προς το σημείο περιστροφής διαγράφει με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μια κωνική επιφάνεια. Αν άλλαζε η γωνία μεταξύ του άξονα συμμετρίας και του άξονα περιστροφής (εδώ το \mathbf{L}), καθώς μετέπιπε ο άξονας συμμετρίας, τότε η κίνηση αυτή που θα σχετιζόταν με την παλινδρόμηση αυτής της γωνίας, θα ονομαζόταν *κλυδωνισμός ή νεύσις (nutation)*, οπότε θα είχαμε μετάπτωση με κλυδωνισμούς. Στην περίπτωση του συμμετρικού στροβού, ακριβώς λόγω της συμμετρίας του, δεν έχουμε κλυδωνισμούς του άξονα συμμετρίας.

Τώρα, για ένα μη αδρανειακό παρατηρητή που κινείται με το σώμα, ο άξονας $\hat{\mathbf{z}}$ δεν κινείται και μεταπίπτουν σύμφωνα με αυτόν τον παρατηρητή και το διάνυσμα της στροφορμής και της

³⁰Για τον αναγνώστη που πρωτοέρχεται αντιμέτωπος με τις ερμηνείες των διαφόρων περιστροφών, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η ω , όπως αναλύεται στην (59) εκφράζει, μέσω των δύο μη ορθογώνιων συνιστωσών της, την μετάπτωσή της γύρω από το \mathbf{L} καθώς και τη μετάπτωση της $\hat{\mathbf{z}}$ γύρω από την ω ή αντιστρόφως της ω γύρω από την $\hat{\mathbf{z}}$.

γωνιακής ταχύτητας τα οποία διαγράφουν κωνικές επιφάνειες. Δεδομένου ότι ο παρατηρητής περιστρέφεται γύρω από το \mathbf{L} με γωνιακή ταχύτητα Ω_p και περί τον άξονα $\hat{\mathbf{Z}}$ με γωνιακή ταχύτητα που δίνεται από την (63), στο σύστημα του στερεού θα παρατηρεί το \mathbf{L} και το ω να περιστρέφονται περί το $\hat{\mathbf{Z}}$ με γωνιακή ταχύτητα ίση με

$$\omega_p = \frac{I_3 - I}{I} \omega_3, \quad (64)$$

αφού τα τρία διανύσματα είναι συνεπίεδα. Η γωνιακή αυτή ταχύτητα είναι αντίθετη της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του σώματος περί τον άξονα συμμετρίας (63) που παρατηρεί ένας αδρανειακός παρατηρητής.³¹

Η κωνική επιφάνεια που διαγράφει το ω περί το $\hat{\mathbf{Z}}$ στο σύστημα του στερεού, που όπως αναφέραμε ονομάζεται κώνος της πολογράφου, εφάπτεται της κωνικής επιφάνειας που διαγράφει το ω περί το \mathbf{L} στο σύστημα του εργαστηρίου, που όπως αναφέραμε ονομάζεται κώνος της ερπολογράφου. Οι δύο κώνοι εφάπτονται διότι ανά πάσα στιγμή έχουν κοινό το διάνυσμα ω της γωνιακής ταχύτητας, η δε κυκλική πολογράφος που διαγράφεται από το ω στο σύστημα του στερεού εφάπτεται της ερπολογράφου. Τα σημεία του σώματος που είναι στη διεύθυνση της ω είναι στιγμιαία ακίνητα, οπότε η πολογράφος διαγράφεται όπως ο κώνος της πολογράφου κυλιέται επί του κώνου της ερπολογράφου. Η ερμηνεία αυτή της κύλισης του κώνου της πολογράφου επί του ακίνητου κώνου της ερπολογράφου επιβεβαιώνεται (βλ. Άσκηση XXX) διότι μία περιφορά στο κώνο της πολογράφου με γωνιακή ταχύτητα ω_p ισοδυναμεί με μέρος περιφοράς του ω επί της ερπολογράφου που αντιστοιχεί σε γωνιακή ταχύτητα Ω_p . Οι δύο αυτοί κώνοι για την περίπτωση που είναι $I_3 < I$ έχουν σχεδιασθεί στο Σχ. 21α' ενώ για την περίπτωση που είναι $I_3 > I$ στο Σχ. 21β'. Συμμετρικά σώματα τα οποία έχουν $I_3 < I$ είναι τα επιμήκη (*prolate*), όπως οι ψηλοί κύλινδροι, οι ράβδοι, τα βλήματα, και αυτά με $I_3 > I$ είναι τα πεπλατυσμένα (*oblate*), όπως τα συμμετρικά επίπεδα στερεά, οι δίσκοι, τα πιάτα ή ακόμα και η Γη και άλλοι πλανήτες οι οποίοι λόγω της περιστροφής τους παρουσιάζουν πλάτυνση στο ισημερινό τους επίπεδο.

Για να καταλάβουμε τις διαφορές μεταξύ επιμήκων και πεπλατυσμένων στερεών καταφεύγουμε στην κατασκευή Poinsot. Τα ελλειψοειδή Poinsot και η σχετική θέση τους με το εφαπτόμενο σε αυτά αναλλοίωτο επίπεδο έχουν σχεδιασθεί στα Σχ. 22. Το αναλλοίωτο επίπεδο είναι κάθετο στη διεύθυνση της στροφορμής OA και το κέντρο του ελλειψοειδούς είναι σε σταθερή απόσταση ίση με $OA = 2K/|\mathbf{L}|$ από το αναλλοίωτο επίπεδο. Η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα προσδιορίζεται από το διάνυσμα \vec{OB} , με το B να είναι το σημείο επαφής του ελλειψοειδούς με το επίπεδο. Ο άξονας συμμετρίας του σώματος είναι ο $\hat{\mathbf{Z}}$ και η γωνία που σχηματίζει ο $\hat{\mathbf{Z}}$ με την στροφορμή, $\angle\alpha$, καθώς και η γωνία που σχηματίζει ο $\hat{\mathbf{Z}}$ με το ω , $\angle\beta$, είναι όπως έχουμε

³¹Όπως σημειώσαμε και στην προηγούμενη υποσημείωση υπάρχει μια δυσκολία να κατανοήσει κανείς ποιο είναι το φυσικό νόημα αυτής της γωνιακής ταχύτητας και της αντίθετης της, της (63). Η πρώτη περιγράφει τον ρυθμό διαγραφής της πολογράφου, δηλαδή της κίνησης του άξονα περιστροφής, ω , στο σώμα, ενώ η δεύτερη, μαζί με το κομμάτι \mathbf{L}/I , τον ρυθμό διαγραφής της ερπολογράφου, δηλαδή της ω , στο αδρανειακό σύστημα. Οι δύο αυτές γωνιακές ταχύτητες προστιθέμενες δίνουν τη μετάπτωση του άξονα της γωνιακής ταχύτητας, Ω_p , στο αδρανειακό σύστημα, και εξαιτίας της συνεπιπεδότητάς του $\hat{\mathbf{Z}}$ και του ίδιου του άξονα περιστροφής.

επιχειρηματολογήσει σταθερές. Στην περίπτωση των επιμήκων στερεών το ω βρίσκεται μεταξύ της στροφορμής και του άξονα συμμετρίας και είναι $\alpha > \beta$, ενώ στα πεπλατυσμένα το ω και $\hat{\mathbf{3}}$ βρίσκονται εκατέρωθεν της \mathbf{L} , οπότε είναι $\beta > \alpha$. Η διάταξη των Σχ. 22 είναι διαισθητικά προφανής διότι είναι ο μόνος τρόπος που μπορούν να έρθουν σε επαφή τα ελλειψοειδή με το επίπεδο. Αναλυτικά η διαφορά αυτή της διάταξης της θέσης του ω φαίνεται από την (60), διότι όταν το σώμα είναι επίμηκες ($I_3 < I$) η ω προκύπτει προσθέτοντας στην \mathbf{L}/I κάποιο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{3}}$ και επομένως η διάταξη είναι όπως στο Σχ. 22α', ενώ όταν είναι πεπλατυσμένο ($I_3 > I$) η ω προκύπτει προσθέτοντας κάποιο διάνυσμα στην κατεύθυνση $-\hat{\mathbf{3}}$ και η διάταξη είναι όπως στο Σχ. 22β'. Επίσης, επειδή κάθε άξονας κάθετος στον άξονα συμμετρίας $\hat{\mathbf{3}}$ είναι κύριος άξονας με ροπή αδρανείας I , μπορούμε να επιλέξουμε καρτεσιανό σύστημα 1, 2, 3 με τον άξονα 1 στο ίδιο επίπεδο με τα \mathbf{L} , ω και $\hat{\mathbf{3}}$ και έτσι η στροφορμή να έχει συνιστώσες σε αυτό το σύστημα αναφοράς $\mathbf{L} = (L_1, 0, L_3) = (I\omega_1, 0, I_3\omega_3)$ και η γωνιακή ταχύτητα $\omega = (\omega_1, 0, \omega_3)$. Τότε επειδή

$$\tan \alpha = \frac{L_1}{L_3} = \frac{I\omega_1}{I_3\omega_3}, \quad \text{και} \quad \tan \beta = \frac{\omega_1}{\omega_3},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\tan \alpha = \frac{I}{I_3} \tan \beta. \quad (65)$$

Επομένως καταλήγουμε για άλλη μια φορά στο ότι σε επιμήκη σώματα ($I > I_3$) είναι $\alpha > \beta$ και σε πεπλατυσμένα ($I < I_3$) είναι $\alpha < \beta$.

Παράδειγμα

Να μελετηθεί η κίνηση του πολικού άξονα της Γης, γνωστή ως κίνηση Chandler.

Ανάλυση: Η Γη είναι ελαφρώς πεπλατυσμένη στον Ισημερινό λόγω της περιστροφής της και μπορεί να θεωρηθεί ένα ελεύθερο αξονικά στερεό σώμα του οποίου οι ροπές αδρανείας ικανοποιούν τη σχέση

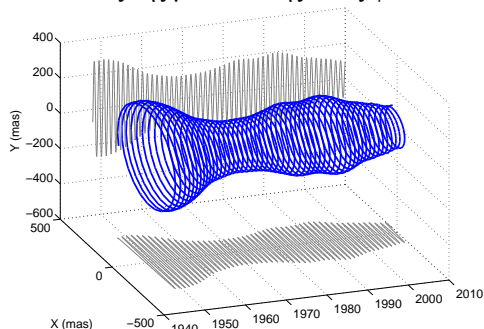
$$\epsilon = \frac{I_3 - I}{I_3} = 0.003273, \quad (66)$$

όπου ϵ είναι η δυναμική εκκεντρότητα του πλανήτη. Επομένως η πολογράφος αναμένεται να μεταπίπτει με περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi(1 - \epsilon)}{\epsilon\omega_3} = \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} d \approx 304.5 d. \quad (67)$$

Την μετάπτωση του άξονα την είχε προβλέψει ο Νεύτωνας* και το 1765 ο Euler υπολόγισε ότι η περίοδος της μετάπτωσης είναι $T = 305 d$. Οι αστρονόμοι όμως δεν μπόρεσαν να εντοπίσουν μετατοπίσεις του άξονα με τέτοιες περιόδους. Ο αμερικανός αστρονόμος Seth Carlo Chandler [1846-1913] όταν εξέτασε κινήσεις του άξονα και σε άλλες περιόδους εντόπισε το 1891 μετάπτωση του άξονα με περίοδο περί τις 433 d. Η διαφορά της περιόδου από αυτήν που υπολόγισε ο Euler εξηγήθηκε την ίδια χρονιά από τον канаδο-αμερικανό αστρονόμο Simon Newcomb [1835-1909] ο οποίος έδειξε ότι προκαλείται

από το ότι η Γη δεν είναι ένα απολύτως στερεό σώμα. Η μεταπτωτική αυτή κίνηση του άξονα προκαλεί σχετικές κινήσεις στη Γη που προκαλούν απόσβεση σε χαρακτηριστικό χρόνο περί τα 70 *y*. Επομένως για να συντηρηθεί η μεταπτωτική κίνηση πρέπει να διεγείρεται συνεχώς, και η κύρια πηγή διέγερσης αποδίδεται πλέον κατά τα 2/3 στις διακυμάνσεις της πίεσης που ασκούνται στο βυθό των ωκεανών από τα μεταβαλλόμενα ωκεάνια ρεύματα επί της Γης, ενώ το υπόλοιπο 1/3 της διέγερσης αποδίδεται στις διακυμάνσεις της ατμοσφαιρικής πίεσης.[†] Οι διακυμάνσεις στη διέγερση οδηγούν και σε διακυμάνσεις στο πλάτος της μετάπτωσης όπως φαίνεται στο Σχ. 23.



Σχήμα 23: Η εξέλιξη της πολογράφου την περίοδο 1949-2010 του άξονα περιστροφής της Γης. Παρουσιάζεται μόνο η μεταβολή που σχετίζεται με τη μετάπτωση Chandler. Οι μετατοπίσεις στο διάγραμμα αναφέρονται στις γωνιακές μετατοπίσεις της τομής του άξονα περιστροφής στην επιφάνεια της Γης από το κέντρο της Γης σε μονάδες mas (= arcsec/1000), όπου 100 mas = 3 m (από τη βάση δεδομένων IERS EOP C01 του International Earth Rotation and Reference Systems Service).

Το γωνιακό άνοιγμα του κώνου της πολογράφου είναι μόλις $\beta \approx 0.2$ arcsec που αντιστοιχεί σε μετατόπιση του άξονα περιστροφής της Γης στην επιφάνεια της Γης της τάξης των 6 m. Επειδή είναι $I_3 \approx I$, η γωνία α που σχηματίζει ο άξονας συμμετρίας της Γης με το διάνυσμα της στροφορμής της Γης, \mathbf{L} , είναι σχεδόν ίση με τη γωνία β , και επομένως η ω της Γης είναι σχεδόν συνευθειακή με την \mathbf{L} . Επομένως ένας εξωτερικός παρατηρητής θα έβλεπε τον άξονα συμμετρίας της Γης και το ω να περιστρέφονται γύρω από το σταθερό \mathbf{L} με γωνιακή ταχύτητα:

$$\Omega_p = \frac{L}{I} \approx \frac{I_3}{I} \omega_3 = \frac{\omega_3}{(1 - \epsilon)}, \quad (68)$$

που αντιστοιχεί σε περίοδο περίπου μίας μέρας

$$T \approx (1 - \epsilon) d = 0.997 d.$$

* Πόρισμα 20 και 22 στην Πρόταση 66 του Βιβλίου 1 της *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*.

† R. S. Gross, 2000: The excitation of the Chandler Wobble, *Geophysical Research Letters* **27**, 2329-2332.

Άσκηση 6

Ο Richard Feynman στο βιβλίο του «*Σίγουρα θα αστειεύσετε κε Φάννμαν*» (τίτλος πρωτοτύπου: “*Surely you are joking, Mr. Feynman*”), αναφέρει ότι θυμάται από την καφετέρια του Cornell ότι καθώς κάποιοι φοιτητές παίζανε πετώντας πιάτα στον αέρα με σχεδόν οριζόντιο προσανατολισμό, σαν δισκοβόλοι, τότε, καθώς το πιάτο κλυδωνιζόταν στο χώρο, το λογότυπο του Cornell που ήταν τυπωμένο στον πάτο του πιάτου περιστρεφόταν δύο φορές πιο γρήγορα απ’ ότι κλυδωνιζόταν το πιάτο. Ήταν, πράγματι, ακριβής η ανάμνηση αυτή του Feynman;

Απάντηση: Η κίνηση του πιάτου ως προς το ΚΜ είναι ελεύθερη, διότι η ροπή που ασκείται στο πιάτο

από το ομογενές πεδίο βαρύτητας στο ΚΜ του πιάτου είναι μηδενική. Επομένως, η περιστροφική κίνηση του πιάτου είναι ελεύθερη. Θεωρούμε ότι το πιάτο είναι κατ' ουσίαν διδιάστατο και επομένως είναι $I_3 \approx 2I$. Αυτό σημαίνει ότι η πολογράφος του πεπλατυσμένου αυτού σώματος διαγράφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_p = \omega_3(I_3 - I)/I \approx \omega_3$, όπου ω_3 είναι η γωνιακή ταχύτητα του πιάτου περί τον άξονα συμμετρίας 3, που παρατηρεί ο Feynman. Η συχνότητα μετάπτωσης του άξονα 3 που παρατηρεί ο Feynman είναι η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης του άξονα 3 που θα παρατηρούσε ένας αδρανειακός παρατηρητής. Είναι δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα που διαγράφει η ερπολογράφος, καθώς ο κώνος της πολογράφου κυλιέται επί της ερπολογράφου (βλ. Σχ. 21(β)). Επειδή το πιάτο κινείται σχεδόν οριζόντια, η στροφορμή, όπως και ο άξονας συμμετρίας 3 του πιάτου, είναι σχεδόν κατακόρυφη και η γωνία α είναι μικρή, ώστε $\tan \alpha \approx \alpha$, $\tan \beta = (I_3/I) \tan \alpha \approx 2\alpha$ με αποτέλεσμα το γωνιακό άνοιγμα του κώνου της ερπολογράφου να είναι $\beta - \alpha \approx \alpha$ και της πολογράφου $\beta \approx 2\alpha$. Έτσι στην περίπτωση αυτή ο κώνος της πολογράφου έχει διπλάσιο γωνιακό άνοιγμα από τον κώνο της ερπολογράφου, και η περιφέρεια της πολογράφου είναι διπλάσια της περιφέρειας της ερπολογράφου. Συνεπώς, η γωνιακή ταχύτητα που διαγράφεται η ερπολογράφος Ω_p , δηλαδή η γωνιακή μετάπτωσης του άξονα που παρατηρεί ο Feynman, είναι η μισή από τη γωνιακή ταχύτητα ω_p που διαγράφει η πολογράφος και επειδή είναι $\omega_p \approx \omega_3$, έχουμε τελικά ότι σχέση μεταξύ των δύο γωνιακών ταχυτήτων που είδε ο Feynman είναι

$$\Omega_p \approx \frac{\omega_3}{2},$$

και όχι αυτή που αφηγήθηκε μετά από χρόνια στο βιβλίο του. Προφανώς ο Feynman πρόσεξε κάτι ιδιαίτερο, δηλαδή το λογότυπο να αλλάζει φορά (να γυρίζει κατά μισή στροφή) κάθε φορά που γινόταν ορατό με αποτέλεσμα να υπάρχει μια σχέση συχνοτήτων 1 προς 2 που ήθελε να κατανοήσει, χωρίς όμως να θυμάται ποια ακριβώς συχνότητα ήταν η διπλάσια της άλλης.

10 Κίνηση ελεύθερου στερεού και μελέτη ευστάθειας της κίνησης

Οι συνιστώσες της στροφορμής \mathbf{L} στο σύστημα του στερεού εξελίσσονται, όπως είδαμε (55), σύμφωνα με τις εξισώσεις του Euler:

$$\dot{L}_1 = L_2 L_3 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right), \quad (69\alpha')$$

$$\dot{L}_2 = L_3 L_1 \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3} \right), \quad (69\beta')$$

$$\dot{L}_3 = L_1 L_2 \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right). \quad (69\gamma')$$

Όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει υπάρχουν τρεις ξεχωριστές πολύ απλές λύσεις των εξισώσεων αυτών:

$$L_1 = \text{σταθερό} \quad , \quad L_2 = L_3 = 0, \quad (70)$$

$$L_2 = \text{σταθερό} \quad , \quad L_3 = L_1 = 0, \quad (71)$$

$$L_3 = \text{σταθερό} \quad , \quad L_1 = L_2 = 0. \quad (72)$$

Αυτές είναι καταστάσεις ισορροπίας και αντιστοιχούν κατά σειρά σε περιστροφή περί τον κύριο άξονα αδράνειας 1 με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_1 , περιστροφή περί τον κύριο άξονα αδράνειας 2 με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_2 και περιστροφή περί τον κύριο άξονα αδράνειας 3 με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_3 . Εφόσον όλες οι ροπές αδράνειας είναι διαφορετικές, οι περιστροφές περί των κύριων αξόνων αδράνειας είναι οι μόνες περιπτώσεις στις οποίες το ελεύθερο σώμα μπορεί να περιστραφεί με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Αν όλες οι ροπές είναι ίδιες, όπως συμβαίνει όταν το στερεό είναι ομογενές και σφαιρικό ή κάποιο από τα πλατωνικά στερεά, τότε αν το σώμα είναι ελεύθερο και τεθεί σε περιστροφή γύρω από οποιονδήποτε άξονα θα συνεχίσει να περιστρέφεται περί αυτόν με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Το ερώτημα που ανακύπτει στην περίπτωση που οι ροπές αδράνειας δεν είναι ίσες είναι αν οι περιστροφές περί τους άξονες αδράνειας είναι ευσταθείς καταστάσεις ισορροπίας. Στην ανάλυση που ακολουθεί δεν θεωρούμε ότι οι ροπές αδράνειας, I_1, I_2, I_3 είναι διατεταγμένες με βάση το μέγεθός τους. Για τον έλεγχο της ευστάθειας διαταράσσουμε στιγμιαία την κατάσταση περιστροφής περί κάποιον κύριο άξονα αδράνειας του στερεού, που χωρίς έλλειψη της γενικότητας μπορεί να ληφθεί η κατάσταση $L_1 = L_0, L_2 = L_3 = 0$, και ελέγχουμε κατά πόσον μικρές διαταραχές από την κατάσταση ισορροπίας θα αυξηθούν εκθετικά. Αν δεν αυξηθούν εκθετικά η κατάσταση θεωρείται ευσταθής. Μετά τη στιγμιαία διαταραχή οι στροφορμές είναι $L_1 = L_0 + L'_1, L_2 = L'_2$ και $L_3 = L'_3$ και η εξέλιξη των διαταραχών ικανοποιεί, τουλάχιστον αρχικά, το γραμμικό σύστημα που προκύπτει έχοντας θεωρήσει ότι οι διαταραχές είναι αρκετά μικρές ώστε οι όροι δεύτερης τάξης να μπορούν να αγνοηθούν ως αμελητέοι:

$$\begin{aligned}\dot{L}'_1 &= 0, \\ \dot{L}'_2 &= \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right) L_0 L'_3, \\ \dot{L}'_3 &= \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) L_0 L'_2.\end{aligned}$$

Στο γραμμικό όριο επειδή η L'_1 είναι αμετάβλητη, η ευστάθεια κρίνεται από τη συμπεριφορά των L'_2 και L'_3 . Η L'_2 ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\ddot{L}'_2 = \left[\frac{(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)}{I_1^2 I_2 I_3} L_0^2 \right] L'_2,$$

από την οποία προκύπτει ότι η περιστροφή περί τον άξονα 1 είναι ευσταθής αν οι ροπές αδράνειας ικανοποιούν την ανισότητα $(I_3 - I_1)(I_1 - I_2) < 0$. Δηλαδή αν είναι $I_3 > I_1$ θα πρέπει να είναι και $I_2 > I_1$, δηλαδή η I_1 πρέπει να είναι η μικρότερη ροπή αδράνειας και αν είναι $I_1 > I_3$ θα πρέπει να είναι και $I_1 > I_2$, δηλαδή η I_1 πρέπει να είναι η μεγαλύτερη ροπή αδράνειας. Σε διαφορετική περίπτωση $I_3 < I_1 < I_2$ ή $I_3 > I_1 > I_2$, δηλαδή αν ο 1 άξονας είναι ο ενδιάμεσος, από πλευράς ροπών αδράνειας, τότε η περιστροφή γύρω από αυτόν καθίσταται ασταθής. Επομένως, οι περιστροφές γύρω από τους άξονες με τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη ροπή αδράνειας είναι ευσταθείς, ενώ οι περιστροφές περί τον άξονα με την ενδιάμεση ροπή αδράνειας είναι ασταθείς. Η πρόταση αυτή αναφέρεται ως το θεώρημα του ενδιάμεσου άξονα

ή ως το θεώρημα της ρακέτας του τένις. Αναφέρεται και ως φαινόμενο Dzhanibekov, ο οποίος διαπίστωσε τις επιπτώσεις του θεωρήματος το 1985 στο διάστημα στη θεαματική κίνηση μίας βίδας σε σχήμα T στο περιβάλλον μηδενικής βαρύτητας³². Το φαινόμενο αυτό ήταν γνωστό ήδη από το 1834 και είχε αναλυθεί πλήρως από τον Poinsot³³. Η αστάθεια αυτή γίνεται αμέσως εμφανής αν πετάξουμε ένα βιβλίο ή μία ρακέτα του τένις περιστρέφοντάς τα αρχικά ως προς τον ενδιάμεσο άξονα αδρανείας των.

Διατάσσουμε τώρα τις ροπές αδρανείας ώστε να είναι $I_1 \leq I_2 \leq I_3$. Η γραμμική ανάλυση περιγράφει τοπικά τις τροχιές της στροφορμής γύρω από τις καταστάσεις ισορροπίας. Οι τροχιές της στροφορμής γύρω από τους υποτιθέμενα ακραίους άξονες 1 και 3 αποδείχθηκε ότι είναι ελλειπτικές, ενώ περί τον υποτιθέμενα ενδιάμεσο άξονα 2, με την ενδιάμεση ροπή αδρανείας, είναι υπερβολικές. Είναι όμως εύκολο στην περίπτωση του ελεύθερου στερεού να προσδιορίσουμε την καθολική εικόνα των τροχιών της στροφορμής διότι το στερεό κινείται διατηρώντας το τετράγωνο της ολικής στροφορμής αλλά και την περιστροφική κινητική ενέργεια και επομένως οι συνιστώσες της στροφορμής ικανοποιούν τους δύο δεσμούς:

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, \quad (73\alpha')$$

$$K = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3}. \quad (73\beta')$$

Οι δύο αυτές σχέσεις μπορούν να απεικονιστούν γραφικά με δύο κλειστές επιφάνειες στον χώρο των στροφορμών: μία σφαίρα ακτίνας L και ένα τριαξονικό ελλειψοειδές με μήκος ημιάξονων $\sqrt{2KI_1} \leq \sqrt{2KI_2} \leq \sqrt{2KI_3}$. Η σφαίρα και το ελλειψοειδές πρέπει αναγκαστικά να τέμνονται, ειδάλως δεν θα υπήρχε λύση για το \mathbf{L} . Οι τροχιές της στροφορμής, στο σύστημα του στερεού, είναι ακριβώς οι καμπύλες που προκύπτουν από την τομή της σφαίρας των στροφορμών και του ελλειψοειδούς της ενέργειας (βλ. Σχ. 26). Οι καμπύλες αυτές είναι το αντίστοιχο των πολογράφων, αλλά για τις στροφορμές και όχι για τις γωνιακές ταχύτητες. Θα μπορούσαμε να τις ονομάσουμε στροφορμοπολογράφους και σχετίζονται με τις πολογράφους μέσω του ταυστή ροπής αδρανείας $L_i^{\text{στρ}} = I_{ij}\omega_j^{\text{πολ}}$. Η προφανής κλειστότητα των στροφορμοπολογράφων όντας η τομή σφαίρας και ελλειψοειδούς, συνεπάγεται αυτόματα και την κλειστότητα των πολογράφων, γεγονός το οποίο αναφέρθηκε μεν παραπάνω, αλλά βασίστηκε σε γεωμετρικά επιχειρήματα κύλισης του αναλλοιώτου επιπέδου πάνω στο ελλειψοειδές Poinsot, όχι και τόσο διαυγή.

Για να υπάρχει τομή μεταξύ τους πρέπει η ακτίνα της σφαίρας να είναι μικρότερη από τον μεγάλο ημιάξονα του ελλειψοειδούς και μεγαλύτερη από τον μικρότερο άξονα αυτού, δηλαδή για δεδομένη ενέργεια K οι επιτρεπόμενες τιμές της στροφορμής πρέπει να βρίσκονται στο διάστημα

$$2KI_1 \leq L^2 \leq 2KI_3,$$

³²<https://youtu.be/1x5UiwEEvpQ>

³³Poinsot, L. 1834, Théorie nouvelle de la rotation des corps, Bachelier, Paris.

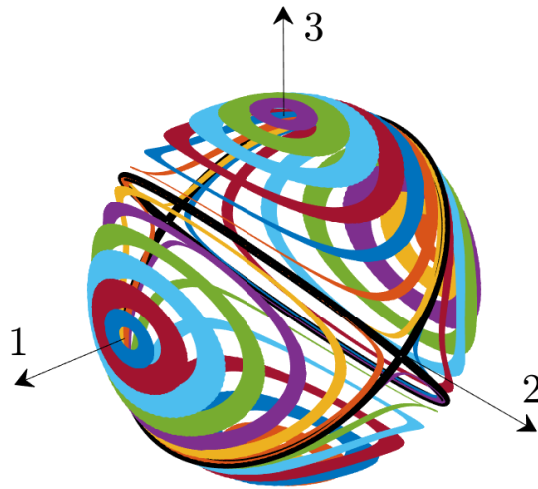


Σχήμα 24: Οι James Van Allen (κέντρο), William Pickering (αριστερά) και Werner von Braun (δεξιά) περιχαρείς παρουσιάζουν στις 31 Ιανουαρίου 1958 τον δορυφόρο Explorer I, που ήταν ο πρώτος δορυφόρος των Η.Π.Α. που τέθηκε σε τροχιά περί τη Γη. Παρότι ο Explorer I είναι γνωστός, διότι αποκάλυψε ότι η Γη έχει ζώνες στις οποίες βρίσκονται παγιδευμένα φορτισμένα σωματίδια, που έχουν ονομασθεί ζώνες Van Allen προς τιμήν του Van Allen που σχεδίασε το σχετικό πείραμα και κατασκεύασε το όργανο για να τις ανιχνεύσει, αυτό που δεν είναι ευρέως γνωστό είναι ότι ο δορυφόρος είχε λανθασμένα σχεδιασθεί. Ενώ βρισκόταν σε τροχιά γύρω από τη Γη έχασε τον επιθυμητό προσανατολισμό του και άρχισε να στριφογυρίζει αλλάζοντας προσανατολισμό ανεξέλεγκτα. Ο δορυφόρος είχε 4 αντένες συμμετρικά τοποθετημένες γύρω του και εξαιτίας αυτών, ενώ αρχικά περιστρεφόταν γύρω από τον άξονα συμμετρίας του διαστημοπλοίου σταδιακά άλλαξε άξονα περιστροφής και οδηγήθηκε σε περιστροφή γύρω από άξονα κάθετο στον επιθυμητό. Οι κεραίες ταλαντώνονταν και έτσι ο δορυφόρος έχανε ενέργεια χωρίς να χάνει στροφορμή. Το αποτέλεσμα ήταν ο δορυφόρος να καταλήξει να περιστρέφεται περί τον άξονα μέγιστης αδράνειας που σε αυτό το αξισυμμετρικό στερεό είναι οποιοσδήποτε άξονας κάθετος στον άξονα συμμετρίας του σώματος. Το πρόβλημα λύθηκε με συνεχείς μικρο-προωθήσεις που άλλαζαν καταλλήλως και τη στροφορμή.

ενώ για δεδομένο L^2 οι επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειας πρέπει να είναι στο διάστημα:

$$\frac{L^2}{2I_3} \leq K \leq \frac{L^2}{2I_1}.$$

Επομένως για δεδομένη στροφορμή η ελάχιστη ενέργεια ενός στερεού στο οποίο δεν ασκούνται



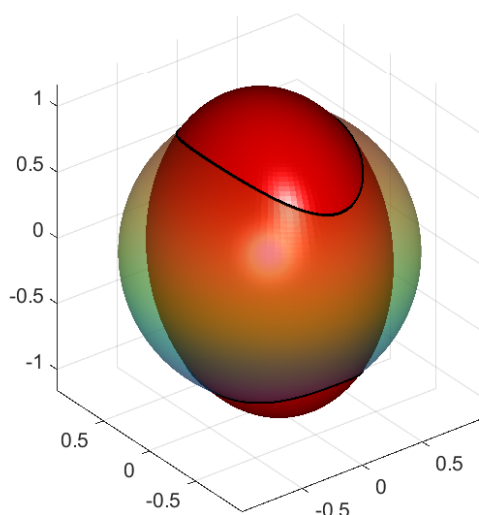
Σχήμα 25: Τροχιές της στροφορμής ελεύθερου στερεού σώματος επί της σφαίρας της ολικής στροφορμής $|\mathbf{L}|^2$ με ροπές αδράνειας $I_1 = 1/3$, $I_2 = 1/2$ και $I_3 = 1$. Οι τροχιές αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές ενέργειας του στερεού: $E = (1/2)(L_1^2/I_1 + L_2^2/I_2 + L_3^2/I_3)$. Η περιστροφή περί τους άξονες 1 και 3, τους άξονες με τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη ροπή αδράνειας, είναι ευσταθής, ενώ η περιστροφή περί τον 2, με την ενδιάμεση τιμή ροπής αδράνειας I_2 , είναι ασταθής. Η κίνηση, στο σύστημα του στερεού, είναι μεν περιοδική και λαμβάνει χώρα κατά μέσο όρο γύρω από τους άξονες 1 ή 3 περνώντας πολύ κοντά στον άξονα 2. Στην ειδική περίπτωση των ετεροκλινικών τροχιών που αντιστοιχούν σε κίνηση του σώματος με ενέργεια ακριβώς ίση με $K = L^2/(2I_2)$, η στροφορμή εξελίσσεται με κατεύθυνση από $(0, L, 0)$ προς $(0, -L, 0)$ και αντιστρόφως, χωρίς να συμπεριλαμβάνονται στις τροχιές τα ακραία σημεία που είναι σημεία ασταθούς ισορροπίας. Οι ετεροκλινικές αυτές τροχιές είναι τα 4 ημικύκλια μεγίστων κύκλων (χωρίς να περιλαμβάνονται σε αυτές τα σημεία ισορροπίας $(0, \pm L, 0)$) το επίπεδο των οποίων σχηματίζει με το επίπεδο $(1, 2)$ διέδρη γωνία Θ , όπου $\tan \Theta = \sqrt{I_1(I_3 - I_2)/(I_3(I_2 - I_1))}$. (Οι τροχιές έχουν υπολογιστεί με αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων Euler. Παρότι χρησιμοποιήθηκε Runge-Kutta τάξης 4 απαιτείται πολύ μικρό χρονικό βήμα για να προκύψουν λύσεις που διατηρούν και την ενέργεια και τη στροφορμή. Το εύρος στις λωρίδες του σχήματος είναι ένδειξη ανακριβούς ολοκλήρωσης λόγω σχετικά μεγάλου βήματος ολοκλήρωσης. Παρά ταύτα προτιμήσαμε αυτό το σχήμα διότι δείχνει πιο καθαρά τις τροχιές όπως αυτές περιελίσσονται στη σφαίρα, αλλά επιπλέον μας διαφωτίζει για το πως θα εξελίσσονταν οι τροχιές αν δεν είχαμε ακριβή διατήρηση της ενέργειας και της στροφορμής.)

ροπές είναι ίση με

$$K_{\min} = \frac{L^2}{2I_3},$$

που σημαίνει ότι η χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση ενός στερεού δεδομένης στροφορμής αντιστοιχεί σε περιστροφή γύρω από τον άξονα μέγιστης ροπής αδράνειας. Αυτό είναι πολύ σημαντικό αποτέλεσμα αφ' εαυτού, αλλά επιπλέον, επειδή τα στερεά κινούμενα χάνουν πιο εύκολα ενέργεια παρά στροφορμή, με την πάροδο του χρόνου το στερεό αναμένεται να περι-

στρέφεται τελικά περί τον κύριο άξονα με τη μέγιστη ροπή αδράνειας, ελαχιστοποιώντας την K για δεδομένο L^2 . Αυτό έγινε οδυνηρά αντιληπτό στην περίπτωση του δορυφόρου Explorer I, ενώ βρισκόταν σε τροχιά περί τη Γη και εξαιτίας απώλειας θερμικής ενέργειας από τις εύκαμπτες κεραιές οδηγήθηκε σε ανεπιθύμητη περιστροφή γύρω από άξονα κάθετο στον άξονα του εξαιρετικά επιμήκους δορυφόρου (βλ. Σχ. 24).



Σχήμα 26: Η διαφανής σφαίρα απεικονίζει τη σφαίρα των στροφορμών, ενώ η ερυθρή ελλειψοειδής επιφάνεια, το ελλειψοειδές ενέργειας, στο χώρο των στροφορμών. Η τομή τους (μαύρες κλειστές καμπύλες) αν και είναι κατ' ουσίαν η πολογράφος (αλλά στο χώρο των στροφορμών) και μοιάζει με την πολογράφο που συζητήθηκε εκτενώς στα προηγούμενα εδάφια, δεν έχει ακριβώς το ίδιο σχήμα. Για να κατασκευάσει κανείς τις συνήθεις πολογράφους στο χώρο των γωνιακών ταχυτήτων, αρκεί να δράσει κανείς πάνω στην στροφορμολογράφο με τον αντίστροφο πίνακα των ροπών αδράνειας. Προφανώς η κλειστότητα των στροφορμολογράφων θα οδηγήσει σε κλειστότητα των πολογράφων.

Η τομή των επιφανειών της σφαίρας της ολικής στροφορμής και του ελλειψοειδούς της ενέργειας, όπως και γενικότερα η τομή οποιωνδήποτε δύο κλειστών επιφανειών, ορίζει μία κλειστή καμπύλη η οποία και προσδιορίζει την τροχιά των συνιστωσών της στροφορμής του στερεού. Οι τροχιές που προκύπτουν για δεδομένη στροφορμή και διαφορετικά ενεργειακά επίπεδα έχουν σχεδιασθεί στο Σχ. 25 και οι οποίες λόγω κατοπτρικής συμμετρίας των επιφανειών ως προς τα επίπεδα $(2, 3)$, $(3, 1)$ και $(1, 2)$ κληρονομούν και αυτές τις ίδιες συμμετρίες. Οι τροχιές που διαγράφει η στροφορμή στην επιφάνεια της σφαίρας των στροφορμών για τις σχετικά χαμηλές ενέργειες $L^2/(2I_2) > K > L^2/(2I_3)$ είναι οι τροχιές περί τον άξονα 3 με την μεγαλύτερη ροπή αδράνειας, ενώ για τις σχετικά υψηλότερες ενέργειες $L^2/(2I_1) > K > L^2/(2I_2)$ είναι οι τροχιές περί τον άξονα 1, που είναι ο άξονας με τη μικρότερη ροπή αδράνειας. Από το σχήμα φαίνεται ότι δεν υπάρχουν κλειστές απομονωμένες τροχιές περί τον άξονα 2, με τη μεσαία ροπή

αδράνειας, όπως είδαμε και από τη γραμμική ανάλυση. Ο τροχιές στην περιοχή του άξονα 2 της στροφορμής χωρίζονται σε 4 είδη: 2 που εκτελούν κατά μέσο όρο περιστροφή περί τον άξονα 1 και δύο περί τον άξονα 3. Οι τροχιές αυτές χωρίζονται από τη διαχωρίζουσα που αντιστοιχεί στις 6 τροχιές που αντιστοιχούν στην ενέργεια $K = L^2/(2I_2)$. Από τις 6 αυτές τροχιές οι δύο είναι οι σημειακές τροχιές των καταστάσεων ισορροπίας $\mathbf{L} = (0, \pm 1, 0)$ και οι άλλες 4 είναι τα τέσσερα ημικύκλια των μεγίστων κύκλων που συνδέουν τα σημεία $(0, \pm L, 0)$ (βλ. Πρόβλημα 17). Οι τροχιές αυτές λέγονται ετεροκλινικές διότι ενώνουν τα δύο σημεία ισορροπίας $(0, \pm L, 0)$, χωρίς να συμπεριλαμβάνουν τα σημεία αυτά.

Θα προσδιορίσουμε αναλυτικά τις τροχιές της στροφορμής γύρω από τον άξονα 3 όταν οι ενέργειες είναι μικρότερες από $L^2/(2I_2)$. Για την περιγραφή της τροχιάς θα χρησιμοποιήσουμε κλασικές πολικές γωνίες (θ, ϕ) με πολικό άξονα τον 3 για να περιγράψουμε³⁴ τη στιγμιαία θέση του \mathbf{L} :

$$L_1 = L \sin \theta \cos \phi, \quad L_2 = L \sin \theta \sin \phi, \quad L_3 = L \cos \theta.$$

Ας δούμε σε ποια θέση θ θα βρίσκεται το \mathbf{L} όταν θα έχει αζιμουθιακή γωνία ϕ . Αν θέσουμε $\tan \phi = L_2/L_1$ οι (73) γίνονται

$$L_1^2(1 + \tan^2 \phi) + L_3^2 = L^2 \quad \text{και} \quad \frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_1^2 \tan^2 \phi}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} = 2K.$$

Επομένως θα είναι

$$L_1^2 = \frac{L^2 - L_3^2}{1 + \tan^2 \phi} \quad \text{και με αντικατάσταση} \quad \frac{L^2 - L_3^2}{1 + \tan^2 \phi} \left(\frac{1}{I_1} + \frac{\tan^2 \phi}{I_2} \right) + \frac{L_3^2}{I_3} = 2K.$$

Λύνοντας ως προς L_3 καταλήγουμε ότι η L_3 εξαρτάται από το ϕ ως εξής:

$$L_3^2(\phi) = L^2 \frac{(1/I_1 - 2K/L^2) + \tan^2 \phi (1/I_2 - 2K/L^2)}{(1/I_1 - 1/I_3) + \tan^2 \phi (1/I_2 - 1/I_3)}. \quad (74)$$

Θέτοντας στη συνέχεια $L_3 = L \cos \theta$ και κάνοντας χρήση της ταυτότητας $\cos^2 \phi = 1/(1 + \tan^2 \phi)$ στην (74) παίρνουμε τη συνάρτηση $\theta(\phi)$ που περιγράφει την καμπύλη επί της σφαίρας που διαγράφει το διάνυσμα \mathbf{L} :

$$\cos(\theta(\phi)) = \pm \sqrt{\frac{\cos^2 \phi + A}{\cos^2 \phi + B}}, \quad (75)$$

όπου οι σταθερές

$$A = \frac{1/I_2 - 2K/L^2}{1/I_1 - 1/I_2}, \quad B = \frac{1/I_2 - 1/I_3}{1/I_1 - 1/I_2}, \quad (76)$$

³⁴Αν οι ενέργειες ήταν στο διάστημα $L^2/(2I_1) > K > L^2/(2I_2)$ τότε η \mathbf{L} θα διέγραφε μια κλειστή καμπύλη, αλλά γύρω από τον άξονα 1, οπότε θα μπορούσαμε και πάλι να χρησιμοποιήσουμε πολικές γωνίες (θ, ϕ) για να περιγράψουμε τη στιγμιαία θέση του \mathbf{L} θεωρώντας τώρα ως πολικό άξονα τον 1 αντί τον 3.

είναι και οι δύο θετικές.³⁵

Έχοντας προσδιορίσει την τροχιά, μπορούμε να προσδιορίσουμε και τη χρονική εξέλιξη των συνιστωσών της στροφορμής. Εκτελώντας μια ενδιάμεση παραγωγή ως προς ϕ και σύμφωνα με την (69γ') θα έχουμε ότι:

$$\dot{L}_3 = \frac{dL_3}{d\phi} \dot{\phi} = \dot{L}_3 = L^2 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right),$$

η οποία μετά από κάποιες πράξεις καταλήγει στην

$$\frac{\dot{\phi}}{\sqrt{(\cos^2 \phi + A)(\cos^2 \phi + B)}} = \pm L \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right), \quad (77)$$

η οποία μπορεί να ολοκληρωθεί και να προσδιορισθεί η $\phi(t)$ αντιστρέφοντας την

$$J(\phi) = \int_0^\phi \frac{d\psi}{\sqrt{(\cos^2 \psi + A)(\cos^2 \psi + B)}} = L \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) t. \quad (78)$$

Στην (78) επιλέξαμε τη θετική φορά περιστροφής περί το άξονα 3. Το ολοκλήρωμα $J(\phi)$ που εμφανίζεται στην (78) ανάγεται σε ελλειπτικά ολοκληρώματα. Η $\theta(t)$ προσδιορίζεται από την (75) και επομένως προσδιορίζεται πλήρως η χρονική εξέλιξη της τροχιάς του \mathbf{L} . Με τον τρόπο αυτό αποδείξαμε ότι η κίνηση ενός ελεύθερου στερεού που διέπεται από τις (69) είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή μπορεί να αναχθεί σε ολοκληρώματα. Η ολοκληρωσιμότητα των εξισώσεων (69) δεν είναι καθόλου προφανής και οφείλεται στη διατήρηση δύο ποσοτήτων: της στροφορμής και της ενέργειας. Η περίοδος της κίνησης είναι

$$T = \frac{I_1 I_2}{I_2 - I_1} \frac{J(2\pi)}{L}.$$

Στην κρίσιμη περίπτωση που είναι $2K/L^2 = 1/I_2$ και επομένως είναι $A = 0$, δηλαδή όταν η ενέργεια είναι ακριβώς ίση με αυτήν που θα επέτρεπε περιστροφή περί τον άξονα με την ενδιάμεση ροπή αδράνειας, τότε η τομή του ελλειψοειδούς της ενέργειας με τη σφαίρα εκφυλίζονται σε επίπεδες τροχιές στο σχήμα ημικυκλίων στα οποία

$$\cos(\theta(\phi)) = \pm \frac{\cos \phi}{\sqrt{\cos^2 \phi + B}}. \quad (79)$$

Η στροφορμή, τότε, διαγράφει τα ημικύκλια που συνδέουν τα $(0, L, 0)$ και $(0, -L, 0)$, που αντιστοιχούν σύμφωνα με την (79) στα σημεία της σφαίρας $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pm\pi/2)$, ο δε χρόνος μετάβασης, T , που σχετίζεται με το διπλάσιο³⁶ του ολοκληρώματος

$$J(\phi) = \int_0^\phi \frac{d\psi}{\cos \psi \sqrt{\cos^2 \psi + B}},$$

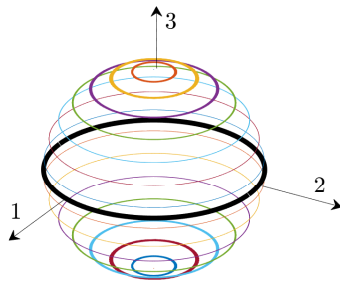
³⁵Ο τύπος των τροχιών της στροφορμής περί τον άξονα 1 δίδεται από την (74), (76) με κυκλική μετάθεση των δεικτών (1, 2, 3).

³⁶Προκειμένου να μεταβεί το στερεό από το ένα ευσταθές σημείο στο άλλο.

στο όριο $\phi \rightarrow \pi/2$, απειρίζεται λογαριθμικά.³⁷ Τα σημεία ισορροπίας $(0, \pm L, 0)$, που και αυτά είναι στην τομή του ελλειψοειδούς με τη σφαίρα, αποτελούν ξεχωριστές απομονωμένες σταθερές τροχιές $\phi(t) = \pm\theta(t) = \pm\pi/2$.

Άσκηση 7

Προσδιορίστε τις τροχιές της στροφορμής σε ένα αξισυμμετρικό σώμα με $I = I_1 = I_2$.



Σχήμα 27: Τροχιές της στροφορμής ελεύθερου αξονικά συμμετρικού στερεού σώματος (με ροπές αδράνειας $I = I_1 = I_2, I \neq I_3$), επί της σφαίρας της ολικής στροφορμής L^2 . Οι τροχιές αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές ενέργειας του στερεού. Οι τροχιές είναι παράλληλοι κύκλοι σε επίπεδα κάθετα στον άξονα 3. Κάθε άξονας που είναι κάθετος στον άξονα 3 είναι κύριος άξονας αδράνειας. Η τομή του ελλειψοειδούς της ενέργειας με ενέργεια $K = L^2/(2I)$ με τη σφαίρα των στροφορμών είναι ο ισημερινός της σφαίρας (μαύρη γραμμή) και κάθε σημείο αυτού είναι σημείο ισορροπίας. Οι ετεροκλινικές τροχιές του Σχ. 25 εκφυλίστηκαν σε ένα συνεχές σημείων ισορροπίας.

Απάντηση: Οι τροχιές σε ένα αξονικά συμμετρικό σώμα είναι κύκλοι σε επίπεδα κάθετα στον άξονα συμμετρίας 3 δεδομένου ότι και το ελλειψοειδές της ενέργειας έχει άξονα συμμετρίας τον 3 (βλ. Σχ. 27). Αυτό σημαίνει ότι η προβολή της στροφορμής στον άξονα 3, η L_3 , είναι σταθερή όπως και η γωνία θ που σχηματίζει η \mathbf{L} με τον άξονα 3. Προφανώς η \mathbf{L} κρατάει σταθερό τον προσανατολισμό της στο χώρο, οπότε το στερεό μεταπίπτει γύρω από αυτήν κρατώντας σταθερή τη γωνία θ . Η τομή του ελλειψοειδούς της ενέργειας με ενέργεια $K = L^2/(2I)$ με τη σφαίρα των στροφορμών είναι ο ισημερινός της σφαίρας (μαύρη γραμμή) και κάθε σημείο του ισημερινού είναι σημείο ισορροπίας, δεδομένου ότι κάθε σημείο του ισημερινού της σφαίρας των στροφορμών αντιστοιχεί σε περιστροφή περί κάποιον κύριο άξονα του στερεού. Οι ετεροκλινικές τροχιές του Σχ. 25 στην περίπτωση ενός τέτοιου συμμετρικού στρόβου εκφυλίστηκαν σε ένα συνεχές σημείων ισορροπίας. Αν όλες οι ροπές αδράνειας ήταν ίσες τότε κάθε σημείο της σφαίρας θα ήταν σημείο ισορροπίας.

Η σταθερότητα της L_3 προκύπτει αμέσως αναλυτικά από την (69γ') σύμφωνα με την οποία είναι $\dot{L}_3 = 0$. Όπως προαναφέρθηκε η γωνία θ είναι και αυτή σταθερή όντας $\cos^{-1}(L_3/L)$ και ίση με

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1/I - 2K/L^2}{1/I - 1/I_3}}, \quad (80)$$

από την λύση του συστήματος (73). Η δε γωνιακή ταχύτητα $\dot{\phi}$ είναι, όπως προκύπτει μέσω απλοποίησης των μηδενικών $I/I_1 - 1/I_2 = 0$ στην (77), και αυτή σταθερή και ίση με

$$\dot{\phi} = \pm L \sqrt{\left(\frac{1}{I} - \frac{1}{I_3}\right) \left(\frac{1}{I} - \frac{2K}{L^2}\right)}, \quad (81)$$

³⁷Η λογαριθμική απόκλιση οφείλεται στο γεγονός ότι γράφοντας το ϕ ως $\pi/2 - \epsilon$ καθώς $\epsilon \rightarrow 0$ το ολοκλήρωμα αποκλίνει ως $\int_0^\epsilon d\xi / \sin \xi = \int_0^\epsilon d\xi / \xi$.

που οδηγεί σε περίοδο περιστροφής της \mathbf{L} περί τον άξονα 3 (η οποία δεν θα πρέπει να συγχέεται με την Ω_p μετάπτωσης του άξονα 3 γύρω από την \mathbf{L} στο αδρανειακό σύστημα)

$$T = \frac{2\pi}{L} \frac{1}{\sqrt{(1/I - 1/I_3)(1 - 2K/L^2)}}.$$

11 Οι γωνίες του Euler

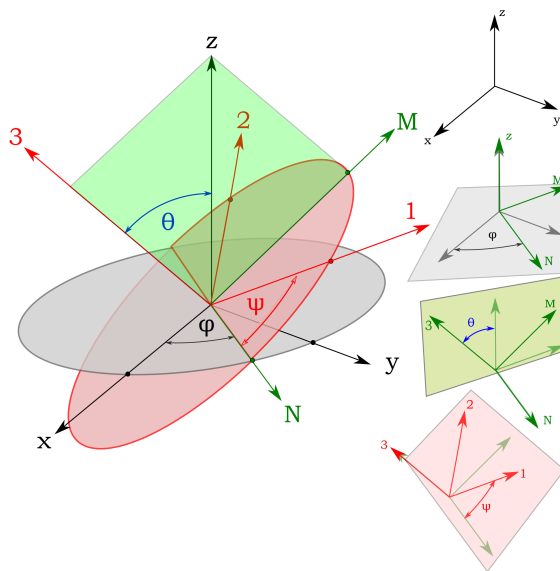
Στο προηγούμενο εδάφιο μελετήσαμε την κίνηση των στροφορμών ενός ελεύθερου στερεού, όπως αυτή αποτυπώνεται από ένα παρατηρητή που κινείται με το στερεό, δηλαδή, στο σύστημα αναφοράς του σώματος. Προσδιορίσαμε ποιες περιστροφές του στερεού είναι ευσταθείς αλλά δεν προσδιορίσαμε την κίνηση του στερεού στον χώρο. Για να μπορέσουμε να περιγράψουμε την κίνηση του στερεού πρέπει να καθορίσουμε τη θέση του στερεού σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Αυτό απαιτεί τον προσδιορισμό 6 συντεταγμένων. Απαιτούνται τρεις συντεταγμένες για να προσδιορισθεί η θέση της αρχής ενός καρτεσιανού πλαισίου κολλημένου στο στερεό και άλλες τρεις για να προσδιορισθεί ο προσανατολισμός αυτού του καρτεσιανού πλαισίου (δύο γωνίες για τον προσδιορισμό της θέσης ενός άξονα του καρτεσιανού συστήματος και άλλη μία γωνία στροφής περί τον πρώτο άξονα για τον προσδιορισμό της θέσης και των άλλων δύο αξόνων του καρτεσιανού συστήματος). Αυτό αρκεί, διότι αν προσδιορισθεί η θέση ενός καρτεσιανού συστήματος αγκιστρωμένου στο στερεό, τότε έχουν προσδιορισθεί και όλα τα σημεία του στερεού δεδομένου ότι αυτά θα έχουν πάντα τις ίδιες συντεταγμένες ως προς το καρτεσιανό σύστημα του στερεού.

Η θέση του καρτεσιανού συστήματος του σώματος 1, 2, 3 ως προς προς το αδρανειακό σύστημα x, y, z προσδιορίζεται συνήθως με τις τρεις γωνίες (ϕ, θ, ψ) του Euler. Οι δύο πρώτες είναι οι σφαιρικές γωνίες, θ, ϕ , καθορισμού ενός άξονα, που συνήθως λαμβάνεται ως ο 3, ενώ η ψ είναι η γωνία στροφής περί τον άξονα 3 που απαιτείται για τον καθορισμό και των υπόλοιπων αξόνων (βλ. Σχ. 28). Οι γωνίες αυτές του Euler προσδιορίζουν και μία ακολουθία στροφών με τις οποίες το σύστημα xyz μετασχηματίζεται στο 1, 2, 3. Η σειρά των στροφών που θα ακολουθήσουμε (βλ. Σχ. 28) για τον μετασχηματισμό του x, y, z στο 1, , έχει ως εξής:

- (α') Μια στροφή κατά γωνία ϕ γύρω από τον αρχικό άξονα z . Το νέο σύστημα x', y', z' έχει κοινό τρίτο άξονα με το αρχικό, $z' = z$, αλλά οι άξονες x' και y' έχουν στραφεί στο επίπεδο xy κατά γωνία ϕ (με τη θετική φορά να κατευθύνεται από τον x προς τον y). Ο άξονας x' σημειώνεται ως N και ο y' ως M' στο Σχ. 28. Ο N αναφέρεται και ως η κατεύθυνση του ανερχόμενου συνδέσμου (nodal line).
- (β') Ακολουθεί μια στροφή κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα x' έτσι ώστε ο νέος άξονας z'' να λάβει κλίση θ σε σχέση με τον παλιό άξονα z' (που σενέπιπτε με τον z). Η στροφή πραγματοποιείται στο επίπεδο $y'z'$, και ο νέος άξονας z'' είναι στραμένος σε σχέση με

τον z' κατά γωνία θ (με τη θετική φορά να κατευθύνεται από τον y' προς τον z') ενώ ο νέος άξονας y'' σημειώνεται με M .

(γ') Καταλήγουμε με μια ακόμη στροφή κατά γωνία ψ γύρω από τον άξονα z'' (με τη θετική φορά να κατευθύνεται από τον x'' προς τον y''). Το τελικό σύστημα αξόνων $x'''y'''z'''$ είναι το 1, 2, 3.



Σχήμα 28: Οι τρεις γωνίες του Euler (ϕ, θ, ψ) που προσδιορίζουν το καρτεσιανό σύστημα 1, 2, 3 του στερεού ως προς το σύστημα x, y, z . Ο άξονας 3 προσδιορίζεται μέσω της σφαιρικής πολικής γωνίας θ και της αζιμουθιακής ϕ με πολικό άξονα τον 3, και η γωνία ψ αρκεί για να προσδιορισθούν και οι άξονες 1 και 2. Η κατεύθυνση N είναι αυτή του ανερχόμενου συνδέσμου, όπου το επίπεδο 1, 2 αρχίζει να ανέρχεται πάνω από το επίπεδο x, y καθώς στρίβουμε δεξιόστροφα από το 1 προς το 2. Η κατεύθυνση M είναι κάθετη στο επίπεδο $N, 3$, έτσι ώστε οι άξονες $N, M, 3$ να σχηματίζουν ένα τρισσορθογώνιο δεξιόστροφο σύστημα. Στο δεξί μέρος του σχήματος φαίνονται οι διαδοχικές στροφές ϕ, θ, ψ και το επίπεδο που λαμβάνουν χώρα αυτές σε σχέση με το αποτέλεσμα της προηγούμενης στροφής (θαμποί άξονες).

Ακολουθεί μια ανάλυση η οποία σε πρώτη ανάγνωση φαίνεται παράλογη. Αντί να επιλεγεί ένα συγκεκριμένο τρισσορθογώνιο σύστημα αξόνων χρησιμοποιείται μια μίξη αξόνων όπου δεν είναι όλοι κάθετοι ανά δύο. Ο λόγος είναι ότι κατά την κίνηση των στερεών υπάρχουν συγκεκριμένοι μη ορθογώνιοι άξονες που παρουσιάζουν ιδιαίτερο φυσικό νόημα. Ο ένας σχετίζεται με τη διατήρηση της στροφορμής ή κάποιον προεξάρχοντα άξονα του αδρανειακού συστήματος, όπως αυτόν του βαρυντικού πεδίου. Ο δεύτερος σχετίζεται με τον άξονα συμμετρίας του σώματος ο οποίος πιθανώς να βρίσκεται σε κίνηση εντός του αδρανειακού συστήματος, αλλά είναι και ο άξονας γύρω από τον οποίο στροβιλίζεται το σώμα και γύρω από τον οποίο όσο και να στραφεί το αξονικά συμμετρικό σώμα δεν διαφοροποιείται η κατάσταση του σώματος.

Έτσι, η διαφορική μετατόπιση του στερεού προσδιορίζεται από τη στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα του στερεού η οποία αν αναλυθεί στον άξονα z , με μοναδιαίο διάνυσμα \hat{z} , και στους

άξονες 3 και N , με μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{Z}}$ και $\hat{\mathbf{N}}$ που προσδιορίζονται από τη στιγμιαία θέση του σώματος, είναι

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{N}} + \dot{\psi} \hat{\mathbf{3}}. \quad (82)$$

Αυτή η ανάλυση της $\boldsymbol{\omega}$ παρακολουθεί τις μεταβολές των τριών γωνιών του Euler όταν το στερεό μετατοπίζεται από τη θέση (ϕ, θ, ψ) στη θέση $(\phi + d\phi, \theta + d\theta, \psi + d\psi)$: της ϕ γύρω από τον z -άξονα, της θ γύρω από τον N -άξονα και της ψ γύρω από τον 3-άξονα.³⁸ Το διάνυσμα όμως της γωνιακής ταχύτητας τώρα μπορεί να αναλυθεί και σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα αναφοράς. Αν επιλέξουμε το αδρανειακό καρτεσιανό σύστημα x, y, z τότε θα είναι:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \hat{\mathbf{x}} + \omega_y \hat{\mathbf{y}} + \omega_z \hat{\mathbf{z}}, \quad (83)$$

και αν επιλέξουμε το καρτεσιανό σύστημα του σώματος 1, 2, 3 τότε θα είναι:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{\mathbf{1}} + \omega_2 \hat{\mathbf{2}} + \omega_3 \hat{\mathbf{3}}. \quad (84)$$

Προσέξτε ότι η αρχική ανάλυση που κάναμε (82), σε αντίθεση με τις δύο τελευταίες (83,84), δεν αναφέρεται σε κάποιο από τα δύο τρισσορθόγωνα συστήματα αναφοράς. Παρά ταύτα οι τρεις άξονες είναι μη συνεπίπεδοι, εκτός από την ειδική περίπτωση που $\theta = 0$, οπότε οι άξονες $\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{3}}$ συμπίπτουν.³⁹

Η γωνιακή ταχύτητα συνήθως αναλύεται στους άξονες 1, 2, 3 του σώματος που συνήθως λαμβάνονται ως οι άξονες των κυρίων ροπών αδράνειας και είναι χρήσιμο να εκφράσουμε τις γωνιακές ταχύτητες σε αυτούς τους άξονες συναρτήσει των γωνιών Euler. Με απλή γεωμετρία από το Σχ. 28 βρίσκουμε ότι είναι

$$\hat{\mathbf{z}} = \cos \theta \hat{\mathbf{3}} + \sin \theta \hat{\mathbf{M}}, \quad \hat{\mathbf{M}} = \sin \psi \hat{\mathbf{1}} + \cos \psi \hat{\mathbf{2}}, \quad \hat{\mathbf{N}} = \cos \psi \hat{\mathbf{1}} - \sin \psi \hat{\mathbf{2}}, \quad (85)$$

και επομένως η (82) γίνεται:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \dot{\phi} [\cos \theta \hat{\mathbf{3}} + \sin \theta (\sin \psi \hat{\mathbf{1}} + \cos \psi \hat{\mathbf{2}})] + \dot{\theta} (\cos \psi \hat{\mathbf{1}} - \sin \psi \hat{\mathbf{2}}) + \dot{\psi} \hat{\mathbf{3}} \\ &= \hat{\mathbf{1}} [\cos \psi \dot{\theta} + \sin \psi (\dot{\phi} \sin \theta)] + \hat{\mathbf{2}} [-\sin \psi \dot{\theta} + \cos \psi (\dot{\phi} \sin \theta)] + \hat{\mathbf{3}} [\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta]. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις που συνδέουν τις γωνιακές ταχύτητες στο σύστημα του στερεού με τις γωνιακές ταχύτητες των γωνιών Euler:

$$\omega_1 = \cos \psi \dot{\theta} + \sin \theta \sin \psi \dot{\phi} \quad (86\alpha')$$

$$\omega_2 = -\sin \psi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \psi \dot{\phi} \quad (86\beta')$$

$$\omega_3 = \cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi}. \quad (86\gamma')$$

³⁸Θυμηθείτε ότι οι διαφορικές (απειροστές) στροφές μετατίθενται μεταξύ τους, οπότε δεν έχει σημασία αν οι στροφές αυτές εκτελούνται με την παραπάνω σειρά ή όχι.

³⁹Ακόμη και σε αυτή την περίπτωση, πάντως μπορούμε να θεωρήσουμε τη γωνία θ οσοδήποτε μικρή, αλλά μη μηδενική, για να έχουμε τη δυνατότητα να αναλύουμε όλα τα διανύσματα στην πλαγιογώνια βάση $\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{3}}$.

Αυτή είναι η γωνιακή ταχύτητα του στερεού αναλυμένη σε ταχύτητες των γωνιών Euler, που ορίζουν μια βάση που συμπεριστρέφεται μαζί με το στερεό σώμα.

Στην ανάλυση της δυναμικής των αξονικά συμμετρικών σωμάτων γίνεται ευρεία χρήση της στιγμιαίας γωνιακής ταχύτητας του καρτεσιανού συστήματος $\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{Z}}$, που να μην διαφέρει από το σύστημα του σώματος, αφού ο άξονας $\hat{\mathbf{N}}$ είναι πάντα οριζόντιος, αλλά λόγω της συμμετρίας του σώματος οι άξονες $\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{M}}$ είναι ισοδύναμοι με τους $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}$ που στριφογυρίζουν μαζί με το σώμα, για την ανάλυση οποιουδήποτε διανύσματος κατασκευάζεται με τη χρήση των κυρίων ροπών αδράνειας. Η γωνιακή ταχύτητα του $\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{Z}}$ συναρτήσει των γωνιών Euler είναι

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{N}} \\ &= \dot{\phi} [\cos \theta \hat{\mathbf{Z}} + \sin \theta \hat{\mathbf{M}}] + \dot{\theta} \hat{\mathbf{N}} \\ &= \dot{\theta} \hat{\mathbf{N}} + \dot{\phi} \sin \theta \hat{\mathbf{M}} + \dot{\phi} \cos \theta \hat{\mathbf{Z}}.\end{aligned}$$

Όπως γίνεται αμέσως αντιληπτό, η τελευταία αυτή έκφραση για το $\boldsymbol{\omega}$ προκύπτει από την (86) θέτοντας $\psi = 0$ και κάνοντας την αντικατάσταση $\hat{\mathbf{1}} \rightarrow \hat{\mathbf{N}}$ και $\hat{\mathbf{2}} \rightarrow \hat{\mathbf{M}}$, αφού τα $\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{M}}$ είναι συνεπίεδα με τα $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}$ και στραμμένα κατά $-\psi$ σε σχέση με τα δεύτερα.

Έχοντας προσδιορίσει την εξέλιξη των στροφορμών ή των γωνιακών ταχυτήτων στο σύστημα του σώματος μέσω των εξισώσεων του Euler μπορούμε να προσδιορίσουμε και τη θέση του σώματος ($\phi(t), \theta(t), \psi(t)$) ολοκληρώνοντας τις (86), που συνήθως, όταν το σώμα δεν είναι ελεύθερο, είναι εφικτό μόνο αριθμητικά.

12 Γενική κίνηση συμμετρικού στερεού του οποίου οι δύο ροπές αδράνειας είναι ίσες

Αν το σώμα είναι ελεύθερο και η συνολική στροφορμή του σώματος \mathbf{L} και η ολική κινητική του ενέργεια K είναι σταθερά:

$$K = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Η παραπάνω σχέση με K, \mathbf{L} σταθερά, προφανώς δεν συνεπάγεται ότι και η $\boldsymbol{\omega}$ είναι σταθερή. Αυτό που συνεπάγεται, είναι σταθερή προβολή της $\boldsymbol{\omega}$ στη διεύθυνση της \mathbf{L} .

Ας δούμε τώρα πώς εξελίσσεται το διάνυσμα της στροφορμής στο σύστημα του σώματος. Αν (1, 2, 3) είναι οι κύριοι άξονες του σώματος με ροπές αδρανείας $I_1 = I_2 = I$, η κίνηση του \mathbf{L} (στο σύστημα του στερεού) είναι:

$$\dot{L}_1 - L_2 L_3 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I} \right) = 0, \quad (87)$$

$$\dot{L}_2 - L_3 L_1 \left(\frac{1}{I} - \frac{1}{I_3} \right) = 0, \quad (88)$$

$$\dot{L}_3 = 0, \quad (89)$$

που σημαίνει ότι διατηρείται κατά την κίνηση, όχι μόνο το μέτρο της στροφορμής $|\mathbf{L}|$ αλλά και η συνιστώσα της στροφορμής στον άξονα συμμετρίας⁴⁰ (άξονας 3) του σώματος, δηλαδή αν $\hat{\mathbf{3}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα συμμετρίας του στερεού θα είναι

$$\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{3}} = L_3(0) , \quad (90)$$

που συνεπάγεται ότι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του άξονα συμμετρίας του σώματος και του διανύσματος της στροφορμής παραμένει σταθερή κατά την κίνηση.

Ας εξετάσουμε, τώρα, την εξέλιξη της στροφορμής ενός μη ελεύθερου συμμετρικού σώματος.

$$\dot{L}_1 - L_2 L_3 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I} \right) = \tau_1 , \quad (91)$$

$$\dot{L}_2 - L_3 L_1 \left(\frac{1}{I} - \frac{1}{I_3} \right) = \tau_2 , \quad (92)$$

$$\dot{L}_3 = \tau_3 , \quad (93)$$

όπου $\boldsymbol{\tau} = \tau_1 \hat{\mathbf{1}} + \tau_2 \hat{\mathbf{2}} + \tau_3 \hat{\mathbf{3}}$. Θα προσπαθήσουμε να συνδέσουμε (λόγω ομοιότητας) τις δύο πρώτες σχέσεις (91,92) μιγαδοποιώντας τες:

$$\frac{d}{dt}(L_1 + iL_2) - i \frac{L_3}{I_3} \left(\frac{I_3 - I}{I} \right) (L_1 + iL_2) = (\tau_1 + i\tau_2) , \quad (94)$$

ενώ την τρίτη σχέση (93) θα την ολοκληρώσουμε άμεσα για να λάβουμε

$$L_3(t) = L_3(0) + \int_0^t \tau_3(s) ds . \quad (95)$$

Δεδομένου ότι από το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορούμε να υπολογίσουμε την $L_3(t)$, μπορούμε να ξαναγράψουμε την προηγούμενη μιγαδική σχέση ως

$$\frac{dl}{dt} + i\omega_p(t)l = \tau \quad (96)$$

με $l = L_1 + iL_2$, $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, και

$$\omega_p(t) = \frac{L_3(t)}{I_3} \left(\frac{I_3 - I}{I} \right) . \quad (97)$$

Η παραπάνω γραφή είναι πιο συνοπτική και ανάλογα με την περίπτωση δράσης των εξωτερικών δυνάμεων μπορεί να οδηγήσει ευκολότερα σε σε φορμαλιστικές, τουλάχιστον, απαντήσεις αναφορικά με την εξέλιξη της κίνησης του σώματος.

⁴⁰Η περίπτωση που εξετάζουμε με $I_1 = I_2 = I$, εκτός από τα στερεά που παρουσιάζουν αξονική συμμετρία (κύλινδρος, κώνος κλπ) περιλαμβάνει και τα στερεά με κατάλληλη διακριτή συμμετρία σε περιστροφή γύρω από κάποιον άξονα (π.χ. πρίσματα).

• **Περίπτωση 1η: Ελεύθερο σώμα.** Στην περίπτωση αυτή, την οποία μελετήσαμε και παραπάνω, $\tau = \mathbf{0}$, οπότε $L_3 = L_3(0)$ και

$$\omega_p(t) = \frac{L_3(0)}{I_3} \frac{I_3 - I}{I} = \frac{I_3 - I}{I} \omega_3 = \omega_p(0) = \text{σταθ} .$$

Η δε (97) θα έχει ως λύση την

$$\begin{aligned} L_1(t) + iL_2(t) &= l(t) = l(0)e^{-i\omega_p(0)t} \\ &= [L_1(0) \cos(\omega_p(0)t) + L_2(0) \sin(\omega_p(0)t)] + \\ &\quad i[L_2(0) \cos(\omega_p(0)t) - L_1(0) \sin(\omega_p(0)t)] . \end{aligned} \quad (98)$$

Από τις σχέσεις μεταξύ των διανυσμάτων βάσης στο σύστημα του στερεού και στο αδρανειακό σύστημα μπορούμε να επαναπροσδιορίσουμε όλα τα μεγέθη στο αδρανειακό σύστημα. Έτσι, η στροφορμή στο αδρανειακό σύστημα θα πρέπει να είναι σταθερή, όπως αμέσως φαίνεται από την (98).

Προκειμένου να υπολογίσουμε την αντιστοιχούσα χρονική εξέλιξη των γωνιών του Euler $\phi(t), \theta(t), \psi(t)$ θα κατασκευάσουμε ένα καρτεσιανό τρισσορθογώνιο σύστημα x, y, z και θα μετρήσουμε τη στροφή του στερεού ως προς αυτό. Από τη στιγμή που το σώμα είναι ελεύθερο δεν υπάρχει κάποια εξωτερική προτιμώμενη διεύθυνση οπότε μπορούμε να προσανατολίσουμε το αδρανειακό σύστημα όπως εμείς επιθυμούμε. Οι μοναδικές δύο διευθύνσεις που διαθέτουμε από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι ο αρχικός άξονας περιστροφής του σώματος και ο άξονας 3 (ο άξονας συμμετρίας του). Ας επιλέξουμε τον άξονα z του αδρανειακού συστήματος επί του επιπέδου των δύο παραπάνω αξόνων έτσι ώστε η διεύθυνση $\hat{\mathbf{3}}$ να σχηματίζει γωνία $\theta(0)$ με τη διεύθυνση $\hat{\mathbf{z}}$, ενώ για την διεύθυνση $\hat{\mathbf{x}}$ θα επιλέξουμε μια διεύθυνση κάθετη στο προαναφερθέν επίπεδο. Όντας κάθετη στην $\hat{\mathbf{x}}$, η $\hat{\mathbf{3}}$, μπορούμε να επιλέξουμε και τον άξονα $\hat{\mathbf{1}}$ του στερεού να συμπίπτει με τον $\hat{\mathbf{x}}$. Αυτοί οι άξονες που στήσαμε αφορούν στην αρχική χρονική στιγμή $t = 0$. Ως προς το αδρανειακό σύστημα x, y, z , οι άξονες 1, 2, 3 θα αρχίσουν, στη συνέχεια, να στρέφονται, με αρχικό άξονα περιστροφής τον άξονα του $\omega(0)$. Ας αναλύσουμε τη στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα του σώματος στους άξονες 1, 2, 3 του σώματος:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{\mathbf{1}} + \omega_2 \hat{\mathbf{2}} + \omega_3 \hat{\mathbf{3}} \quad (99)$$

αλλά, όπως είδαμε παραπάνω, όταν υπολογίσαμε τη χρονική εξέλιξη των συνιστωσών της στροφορμής

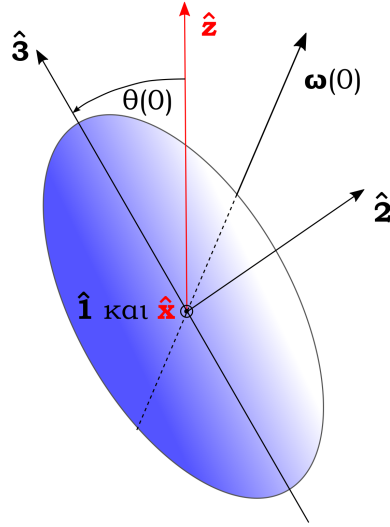
$$\omega_3 = L_3/I_3 = \text{σταθερό} ,$$

ενώ

$$\omega_1 + i\omega_2 = (L_1 + iL_2)/I = (L_1(0) + iL_2(0))e^{-i\omega_p(0)t}/I = (\omega_1(0) + i\omega_2(0))e^{-i\omega_p(0)t} .$$

Δεδομένης της θέσης του άξονα $\hat{\mathbf{1}}$, αρχικά, θα έχουμε λοιπόν ότι

$$\tilde{\Omega}(t) \equiv \omega_1(t) + i\omega_2(t) = (0 + i\omega_2(0))e^{-i\omega_p(0)t} . \quad (100)$$



Σχήμα 29: Τοποθέτηση των αξόνων, έτσι ώστε ο άξονας συμμετρίας του σώματος και η διεύθυνση του ω τη στιγμή $t = 0$ να σχηματίζουν ένα επίπεδο από το οποίο να διέρχεται ο άξονας \hat{z} .

Ας αναλύσουμε τώρα το ω στους μη ορθογώνιους άξονες $\hat{\mathbf{3}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{N}}$.⁴¹ Καταρχάς θα πρέπει να στρέψουμε τα διανύσματα $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}$, έτσι ώστε να λάβουμε τις συνιστώσες ω_N, ω_M . Παρατηρούμε ότι ο μιγαδικός συνδυασμός $\omega_1 + i\omega_2$ σε συνδυασμό με τον μιγαδικό αριθμό $e^{i\psi}$ δίνουν

$$\begin{aligned} (\omega_1 + i\omega_2)e^{i\psi} &= (\omega_1 \cos \psi - \omega_2 \sin \psi) + i(\omega_2 \cos \psi + \omega_1 \sin \psi) \\ &= \omega_N + i\omega_M. \end{aligned} \quad (101)$$

Παράλληλα, η ανάλυση των $\hat{\mathbf{M}}$ και $\hat{\mathbf{3}}$ σε $\hat{\mathbf{z}}$ και $\hat{\mathbf{3}}$ θα δώσει

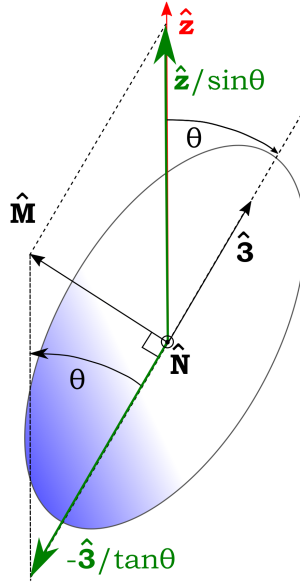
$$\omega_3 \hat{\mathbf{3}} + \omega_M \hat{\mathbf{M}} = \left(\omega_3 - \frac{\omega_M}{\tan \theta} \right) \hat{\mathbf{3}} + \frac{\omega_M}{\sin \theta} \hat{\mathbf{z}}. \quad (102)$$

Η παραπάνω ανάλυση του $\hat{\mathbf{M}}$ στο πλαγιογώνιο σύστημα $\hat{\mathbf{3}}, \hat{\mathbf{z}}$ προκύπτει άμεσα από τη γεωμετρία του Σχ. 30 που αποτελεί εξέλιξη στο χρόνο του Σχ. 29, με τους άξονες $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}, \hat{\mathbf{3}}$ να έχουν στραφεί σε μια καινούργια θέση και τα $\hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{M}}$ να ορίζουν το ίδιο επίπεδο με τα $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}$, με το $\hat{\mathbf{N}}$ κάθετο στο επίπεδο των $\hat{\mathbf{3}}, \hat{\mathbf{z}}$ και το $\hat{\mathbf{M}}$ επί του επιπέδου. Εξισώνοντας στη συνέχεια τις συνι-

⁴¹Ο λόγος που το κάνουμε αυτό είναι για να έχουμε άμεσες εκφράσεις των ρυθμών μεταβολής για τις τρεις γωνίες Euler σύμφωνα με την (82)

⁴²Σύμφωνα με τις σχέσεις (85).

⁴³Μην ξεχνάτε ότι το ω δεν έχει ποτέ συνιστώσα στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{N}}$, αφού το $\hat{\mathbf{N}}$ είναι εξ' ορισμού κάθετο στο επίπεδο των $\hat{\mathbf{z}}, \omega$.



Σχήμα 30: Ανάλυση του στιγμιαίου συστήματος $\hat{\mathbf{3}}, \hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{N}}$ στο σύστημα $\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{N}}$.

στάσεις του ω στο σύστημα $\hat{\mathbf{3}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{N}}$ με τον ορισμό των συνιστωσών αυτών ως ρυθμοί μεταβολής των τριών γωνιών του Euler θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi} &= \omega_3 - \frac{\omega_M}{\tan \theta} = \omega_3(0) - \frac{\Im\{\tilde{\Omega}e^{i\psi}\}}{\tan \theta} = \omega_3(0) - \frac{\Im\{i\omega_2(0)e^{i(\psi-\omega_p(0)t)}\}}{\tan \theta} \\
 &= \omega_3(0) - \frac{\omega_2(0) \cos(\psi - \omega_p(0)t)}{\tan \theta}, \\
 \dot{\phi} &= \frac{\omega_M}{\sin \theta} = \frac{\Im\{\tilde{\Omega}e^{i\psi}\}}{\sin \theta} = \frac{\Im\{i\omega_2(0)e^{i(\psi-\omega_p(0)t)}\}}{\sin \theta} \\
 &= \frac{\omega_2(0) \cos(\psi - \omega_p(0)t)}{\sin \theta}, \\
 \dot{\theta} &= \omega_N = \Re\{i\omega_2(0)e^{i(\psi-\omega_p(0)t)}\} \\
 &= \omega_2(0) \sin(\psi - \omega_p(0)t). \tag{103}
 \end{aligned}$$

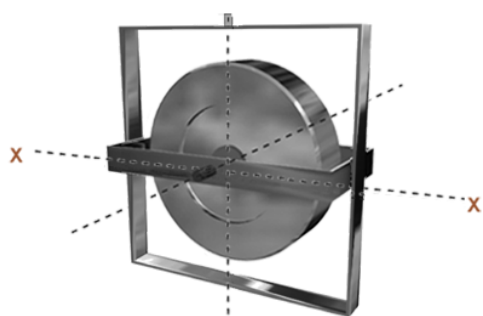
Παρατηρούμε ότι η λύση του παραπάνω συστήματος διαφορικών εξισώσεων καθίσταται τετριμμένη αν είναι $\psi = \omega_p(0)t$. Τότε η θ θα είναι σταθερή, ενώ οι άλλες δύο γωνίες θα εξελίσσονται με σταθερό ρυθμό. Για παράδειγμα αν θέσουμε $\psi(t) = \omega_p(0)t$, τότε η πρώτη εξίσωση θα δώσει

$$\dot{\psi} = \omega_p(0) = \omega_3(0) - \frac{\omega_2(0)}{\tan \theta},$$

η οποία και μηδενίζεται αν η $\omega(0)$ είχε αρχικά την κατεύθυνση του \hat{z} . Δηλαδή το σώμα δεν είχε αρχικά κάποιο ιδιοστροβιλισμό.

13 Προσεγγιστική ανάλυση κίνησης ταχέως περιστρεφόμενου συμμετρικού μη ελεύθερου στροβού

Όταν ένα σώμα κινείται με μεγάλη γραμμική ταχύτητα δύσκολα αλλάζει πορεία. Ομοίως, όταν ένα σώμα περιστρέφεται με μεγάλη γωνιακή ταχύτητα, δύσκολα αλλάζει ο άξονας περιστροφής του. Τόσο δύσκολα, μάλιστα, που μία περιστρεφόμενη σβούρα μπορεί να στέκεται όρθια υπερνικώντας τη δύναμη της βαρύτητας. Η γυροσκοπική αυτή ευστάθεια, όπως λέγεται, που αποκτούν τα σώματα όταν περιστρέφονται είναι η αρχή των γυροσκοπίων⁴⁴ τα οποία αποτελούνται από έναν τροχό με μεγάλη ροπή αδράνειας που περιστρέφεται εξαιρετικά γρήγορα και είναι αναρτημένος κατάλληλα ώστε να μπορεί να περιστρέφεται ως προς το κέντρο του, που παραμένει πάντα σταθερό, προς κάθε δυνατή κατεύθυνση. Το όργανο αυτό είναι



Σχήμα 31: Η ανάρτηση του Cardan η οποία επιτρέπει στον περιστρεφόμενο τροχό να λαμβάνει οποιοδήποτε θέση στον χώρο. Η ανάρτηση αυτή χρησιμοποιείται στην κατασκευή γυροσκοπίων.

πολύ χρήσιμο στην πλοήγηση και χρησιμοποιείται ευρέως, διότι όταν ένα τέτοιο γυροσκόπιο τοποθετηθεί σε ένα όχημα, π.χ. ένα πλοίο ή ένα αεροπλάνο, θα συνεχίσει να δείχνει την κατεύθυνση που είχε αρχικά ο άξονάς του όταν είχε τεθεί σε περιστροφή π.χ. την κατακόρυφο, παρότι το πλοίο κλυδωνίζεται στα κύματα ή όταν το αεροπλάνο ίπταται ανάποδα. Η ιδιοφυής ανάρτηση με την οποία εξασφαλίζεται η λειτουργία του γυροσκοπίου είναι η καλούμενη ανάρτηση Cardan.⁴⁵ Η ανάρτηση Cardan αποτελείται από δύο πλαίσια μικρής μάζας με τη δυνατότητα να στρέφεται το καθένα ελεύθερα γύρω από κάθετους μεταξύ τους άξονες. Ο τροχός έχει τον άξονά του στηριγμένο στο εσωτερικό πλαίσιο, σε άξονα κάθετο στον άξονα στήριξης του πλαισίου του

στο εξωτερικό πλαίσιο. Με κατάλληλα έδρανα περιστροφής, όλοι οι άξονες μπορούν να περιστρέφονται σχεδόν ελεύθερα από τριβές. Με τον τρόπο αυτό ο τροχός μπορεί να λάβει οποιοδήποτε προσανατολισμό στο χώρο, ενώ το κέντρο του παραμένει ακλόνητο.

Θέλουμε, τώρα, να εξετάσουμε τι συμβαίνει σε ένα στερεό, όταν ένα σημείο του είναι σταθερό, αλλά ο άξονας περιστροφής του δεν περιορίζεται και επιπλέον ασκείται στο σώμα κάποια δύναμη, όπως για παράδειγμα μία σβούρα που περιστρέφεται περί το σημείο επαφής της στο

⁴⁴Το όνομα του οργάνου οφείλεται στον Jean Bernard Léon Foucault [1819-1868], ο οποίος σε πείραμα το 1852 με το όργανο αυτό κατάφερε να εντοπίσει τον άξονα περιστροφής της Γης.

⁴⁵Αποτελεί απόδοση στα γαλλικά, Jérôme Cardan, του ονόματος του Ιταλού μαθηματικού, φυσιοδίφη και εφευρέτη Gerolamo Cardano [1501-1576], γνωστού στην Αλγεβρα για την εισαγωγή των αρνητικών και φανταστικών αριθμών. Η ανάρτηση Cardan είχε προηγουμένως εφευρεθεί από τον Φίλωνα του Βυζαντίου [-280 – -220], σημαντικό μαθηματικό και μηχανικό της Ελληνιστικής περιόδου.

δάπεδο, ή ένα νόμισμα που κυλιέται στο δάπεδο. Αυτό θα αποτελέσει το αντικείμενο των επομένων εδαφίων. Στο παρόν εδάφιο θα καταφύγουμε σε μια απλή περιγραφή για τη συμπεριφορά αξονικά συμμετρικών στερεών, όταν σε αυτά ασκούνται δυνάμεις, ενώ περιστρέφονται με μεγάλη γωνιακή ταχύτητα περί τον άξονα συμμετρίας τους. Ας θεωρήσουμε μια σβούρα η οποία περιστρέφεται με μεγάλη γωνιακή ταχύτητα ω_3 περί τον άξονα συμμετρίας της 3 (βλ. Σχ. 32). Η στροφορμή του σώματος είναι $\mathbf{L} \approx I_3\omega_3\hat{\mathbf{3}}$, όπου $\hat{\mathbf{3}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα συμμετρίας. Η σχέση $\mathbf{L} \approx I_3\omega_3\hat{\mathbf{3}}$ είναι προσεγγιστική διότι έχουμε αμελήσει τις συνιστώσες της στροφορμής που μπορεί να προκύψουν αν το σώμα εκτελεί και άλλες περιστροφικές κινήσεις, αλλά αν προετοιμάσουμε την περιστροφή του σώματος στον άξονα 3, η παραπάνω έκφραση θα δώσει, τουλάχιστον, την αρχική στροφορμή αυτού. Αν, το σώμα αποκλίνει από την κατακόρυφο, η δύναμη της βαρύτητας \mathbf{F} θα ασκεί ροπή ως προς το σημείο επαφής A του σώματος με το έδαφος με αποτέλεσμα η εξίσωση που διέπει την εξέλιξη της στροφορμής να είναι

$$\frac{d(I_3\omega_3\hat{\mathbf{3}})}{dt} = I_3\dot{\omega}_3\hat{\mathbf{3}} + I_3\omega_3\frac{d\hat{\mathbf{3}}}{dt} = (a\hat{\mathbf{3}}) \times \mathbf{F}, \quad (104)$$

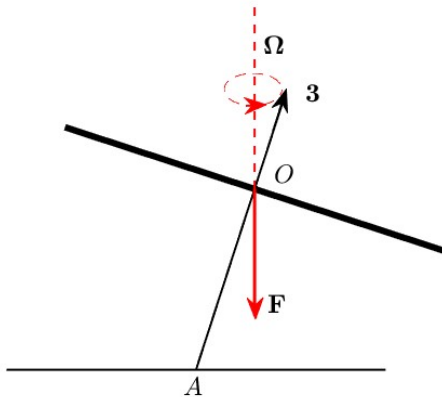
όπου $AO = a$ είναι η απόσταση του σταθερού σημείου A από το ΚΜ, O , του σώματος. Η εξίσωση αυτή παρότι είναι προσεγγιστική, διότι έχουμε αμελήσει τις άλλες συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας, είναι ευρέως χρήσιμη όταν το σώμα περιστρέφεται με μεγάλη γωνιακή ταχύτητα.

Επειδή η ροπή είναι κάθετη στο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{3}}$ η στροφορμή δεν αλλάζει στην διεύθυνση $\hat{\mathbf{3}}$ και επομένως είναι $\dot{\omega}_3 = 0$. Αυτό φαίνεται επίσης αμέσως λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο της (104) με το $\hat{\mathbf{3}}$. Επομένως η κίνηση του άξονα του σώματος διέπεται από την εξίσωση:

$$\frac{d\hat{\mathbf{3}}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{3}}, \quad \boldsymbol{\Omega} = -\frac{a}{I_3\omega_3}\mathbf{F}, \quad (105)$$

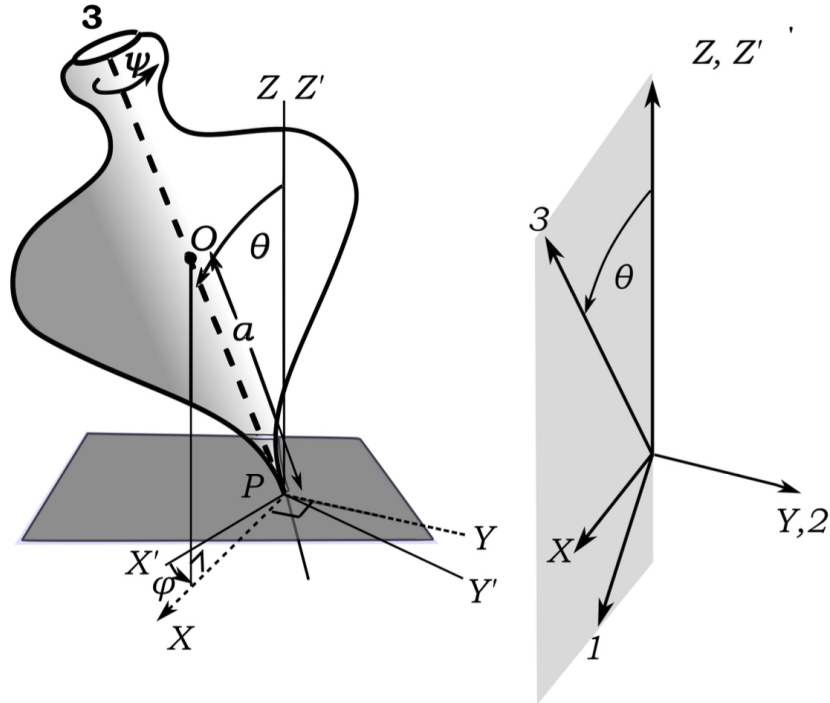
που σημαίνει ότι ο άξονας συμμετρίας της σβούρας κινείται κάθετα στην ασκούμενη δύναμη και μεταπίπτει περί τον άξονα της δύναμης με γωνιακή ταχύτητα που δίνεται από την (105). Είναι αξιοσημείωτο ότι η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης είναι αντιστρόφως ανάλογη της ω_3 , οπότε, όσο πιο γρήγορα περιστρέφεται το σώμα, τόσο πιο μικρότερη είναι

η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης $\boldsymbol{\Omega}$, ενώ οι προσεγγίσεις που οδήγησαν στην (105) καθίστανται ακόμα πιο ακριβείς. Η ποιοτική ανάλυση αυτή έχει γενική ισχύ και χαρακτηρίζει τη συμπεριφορά όλων των ταχέως περιστρεφόμενων αξισυμμετρικών στερεών όταν σε αυτά ασκούνται δυνάμεις.



Σχήμα 32: Η σβούρα περιστρέφεται με μεγάλη γωνιακή ταχύτητα και όταν παρουσιάζει κλίση σε σχέση με την κατακόρυφο, η δύναμη \mathbf{F} της βαρύτητας ασκεί ροπή ως προς το σημείο επαφής A της σβούρας με το έδαφος, με αποτέλεσμα ο άξονας συμμετρίας 3 του σώματος να περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\Omega}$ παράλληλη στην $-\mathbf{F}$.

14 Η σβούρα του Lagrange



Σχήμα 33: Η σβούρα του Lagrange είναι ένα αξονικά συμμετρικό σώμα που περιστρέφεται περί το σταθερό άκρο του P στο ομογενές πεδίο βαρύτητας. Το ΚΜ του σώματος O βρίσκεται σε απόσταση a από το P . Ο άξονας συμμετρίας σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο PZ . Λαμβάνουμε το σύστημα του σώματος 1, 2, 3 με αρχή το P , το καρτεσιανό σύστημα X, Y, Z με αρχή το P και $PX \perp PZ$ και επί του επιπέδου $ZP3$ και τέλος το αδρανειακό σύστημα X', Y', Z' . Οι γωνίες Euler (ϕ, θ, ψ) λαμβάνονται ως προς το αδρανειακό σύστημα X', Y', Z' όπου ο άξονας Z' είναι κατακόρυφος. Η ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας PX με τον X' , η θ η γωνία $\angle ZP3$ και ψ η γωνία που έχει περιστραφεί το σώμα περί τον άξονα 3.

Η σβούρα του Lagrange (η κλασική σβούρα-παιχνίδι) είναι ένα αξονικά συμμετρικό στερεό που περιστρέφεται περί το αιχμηρό κάτω άκρο της στο ομογενές πεδίο βαρύτητας (βλ. Σχ. 33). Αυτό που χαρακτηρίζει τη σβούρα του Lagrange είναι ότι το σημείο περιστροφής της είναι σταθερό. Η αξονική συμμετρικότητα του σώματος και η περιστροφή περί το σταθερό σημείο επιτρέπουν τελικά την ολοκλήρωση των εξισώσεων της κίνησης. Αν κάποιος από τους δύο αυτούς περιορισμούς απουσιάζει, το πρόβλημα καθίσταται ιδιαίτερα δύσκολο και τελικά είναι αδύνατο να αναχθεί στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, όπως κάναμε με το ελεύθερο στερεό ακόμη και αν αυτό ήταν μη συμμετρικό.

Η θέση του σώματος προσδιορίζεται από τις γωνίες Euler (ϕ, θ, ψ) ως προς ένα αδρανειακό σύστημα X', Y', Z' με τον άξονα Z' κατακόρυφο (βλ. Σχ. 33). Ο άξονας συμμετρίας του σώματος $P3$ σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο. Για τον προσδιορισμό της κίνησης της σβούρας

λαμβάνουμε δύο ακόμη βοηθητικά μη αδρανειακά πλαίσια: (α) Το X, Y, Z με αρχή το P και PX στο επίπεδο $ZP3$ με $PX \perp PZ$, έτσι ώστε ϕ να είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας PX με τον X' . (β) Το σύστημα $1, 2, 3$ με αρχή το P άξονα 3 τον άξονα συμμετρίας του σώματος και άξονα 2 ίδιο με τον άξονα (και τον άξονα 1 επί του επιπέδου $ZP3$).⁴⁶ Η γωνία ψ είναι η γωνία που περιστρέφεται το σώμα περί τον άξονα 3 και μετριέται από τον άξονα PX (που συμπίπτει με τον άξονα 1). Προσέξτε ότι οι άξονες 1 και 2 δεν περιστρέφονται με το σώμα περί τον άξονα 3 , επειδή όμως το σώμα είναι αξονικά συμμετρικό, οι άξονες 1 και 2 συνεχίζουν να είναι κύριοι άξονες του ταυστή ροπών αδράνειας. Τα $\hat{1}, \hat{2}$ και $\hat{3}$ είναι μοναδιαία διανύσματα στους άξονες του $1, 2, 3$, ενώ τα \hat{x}, \hat{y} και \hat{z} είναι μοναδιαία διανύσματα του X, Y, Z .

Τα δύο συστήματα X, Y, Z και $1, 2, 3$ δεν είναι αδρανειακά. Το μεν καρτεσιανό σύστημα X, Y, Z περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα

$$\Omega = \dot{\phi} \hat{z} \equiv \Omega \hat{z} ,$$

περί τον κατακόρυφο άξονα Z' σε σχέση με το X', Y', Z' ενώ το $1, 2, 3$ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα

$$\omega' = \dot{\phi} \hat{z} + \dot{\theta} \hat{y} ,^{47}$$

σε σχέση με το X', Y', Z' , ενώ, τέλος το ίδιο το σώμα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα

$$\omega = \dot{\phi} \hat{z} + \dot{\theta} \hat{y} + \dot{\psi} \hat{3} ,$$

σε σχέση με το X', Y', Z' . Οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας του σώματος, ω , στους κύριους άξονες είναι $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Σημειώνουμε ότι $\hat{z} \cdot \hat{3} = \cos \theta$ (βλ. Σχ. 33) και

$$\hat{z} = -\sin \theta \hat{1} + \cos \theta \hat{3} , \quad \hat{x} = \cos \theta \hat{1} + \sin \theta \hat{3} ,$$

και επομένως

$$\omega_1 = -\dot{\phi} \sin \theta , \quad \omega_2 = \dot{\theta} , \quad \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta .$$

Η στροφορμή του σώματος \mathbf{L} ως προς το σημείο περιστροφής της σβούρας, P , εξελίσσεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \underbrace{a\hat{3}}_{\vec{r}_O} \times (-mg\hat{z}) = -mga \hat{3} \times \hat{z} = mga \sin \theta \hat{2} , \quad (106)$$

⁴⁶Προσέξτε οι στροφές που χρησιμοποιήσαμε εδώ για να καταλήξουμε στο σύστημα του σώματος δεν είναι ακριβώς αυτές που χρησιμοποιήσαμε για να ορίσουμε τις γωνίες Euler στο εδάφιο 11. Εκεί (βλ. Σχ. 28) αφού δημιουργήσαμε τον άξονα \hat{N} στρίβοντας τον άξονα x κατά ϕ πάνω στο επίπεδο $x - y$, στη συνέχεια στρέψαμε κατά θ το επίπεδο αυτό γύρω από τον άξονα \hat{N} . Εδώ η αντίστοιχη στροφή επιτελέστηκε γύρω από τον άξονα Y και όχι γύρω από τον X , τον αντίστοιχο του \hat{N} .

⁴⁷Η επιπλέον συνιστώσα της γωνιακής ταχύτητας έχει θετικό πρόσημο, αφού μια στροφή στην κατεύθυνση του \hat{y} θα προκαλέσει αύξηση της κλίσης θ του άξονα 3 .

όπου a η απόσταση του P από το ΚΜ και $-mg\hat{z}$ η δύναμη της βαρύτητας. Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα 3 είναι I_3 , ενώ ως προς του άξονες 1 και 2 είναι I . Έτσι η στροφορμή είναι:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= I\omega_1 \hat{\mathbf{1}} + I\omega_2 \hat{\mathbf{2}} + I_3\omega_3 \hat{\mathbf{3}} \\ &= I\boldsymbol{\omega} + (I_3 - I)\omega_3 \hat{\mathbf{3}} \\ &= I\boldsymbol{\omega} + \frac{I_3 - I}{I_3}L_3 \hat{\mathbf{3}},\end{aligned}\quad (107)$$

όπου $L_3 = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{3}}$ η συνιστώσα της στροφορμής στον άξονα 3. Από την (107) μπορούμε να εκφράσουμε τη γωνιακή ταχύτητα του σώματος $\boldsymbol{\omega}$ συναρτήσει των στροφορμών:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{L}}{I} + \frac{I - I_3}{II_3}L_3 \hat{\mathbf{3}}. \quad (108)$$

Στη σβούρα του Lagrange ενώ δεν διατηρείται η συνολική στροφορμή L^2 , διατηρείται η συνιστώσα της στροφορμής στον κατακόρυφο άξονα $L_z = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ καθώς και η συνιστώσα της στροφορμής στον άξονα συμμετρίας του σώματος, $L_3 = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{3}}$, αφού η μεταβολή της στροφορμής είναι κάθετη και στο $\hat{\mathbf{z}}$ και στο $\hat{\mathbf{3}}$ σύμφωνα με την (106). Διατηρείται επίσης και η συνολική (κινητική + δυναμική) ενέργεια της σβούρας

$$E = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} + mga \cos \theta. \quad (109)$$

Άσκηση 9

Δείξτε ότι στην σβούρα του Lagrange διατηρούνται οι L_z και L_3 καθώς και η ενέργεια E .

Απάντηση: Η ροπή $-mga \hat{\mathbf{3}} \times \hat{\mathbf{z}}$ δεν έχει συνισταμένη ούτε στον άξονα Z ούτε στον άξονα 3 και από την (106) προκύπτει ότι:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0, \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{3}} = 0.$$

Επομένως η $L_z = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ διατηρείται αφού ισχύει επίσης ότι $d\hat{\mathbf{z}}/dt = 0$, δεδομένου ότι το $\hat{\mathbf{z}}$ είναι χρονοανεξάρτητο. Επειδή δε το 1, 2, 3 περιστρέφεται περί το αδρανειακό X', Y', Z' με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}'$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{3}}}{dt} &= \boldsymbol{\omega}' \times \hat{\mathbf{3}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{3}} \\ &= \left(\frac{\mathbf{L}}{I} + \frac{I - I_3}{II_3}L_3 \hat{\mathbf{3}} \right) \times \hat{\mathbf{3}} = \frac{1}{I}\mathbf{L} \times \hat{\mathbf{3}},\end{aligned}$$

που συνεπάγεται ότι διατηρείται και η $L_3 = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{3}}$, διότι, πέραν του ότι είναι $(d\mathbf{L}/dt) \cdot \hat{\mathbf{3}} = 0$, είναι και

$$\mathbf{L} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{3}}}{dt} = 0.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του στερεού είναι

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} \right) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{L} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}},$$

αφού, λόγω της συμμετρικότητας του τανυστή ροπής αδράνειας \mathbb{I} και της χρονοανεξαρτησίας του \mathbb{I} στο σύστημα 1, 2, 3 έχουμε

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{L} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbb{I} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}}.$$

Σε παρόμοιες εκφράσεις είχαμε καταλήξει στο εδάφιο 9 όταν αποδείξαμε τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας ενός ελεύθερου στερεού, με τη μόνη διαφορά ότι τότε η στροφορμή διατηρούνταν.

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας μέσω της (106) και της ανάλυσης της γωνιακής ταχύτητας, θα είναι:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}} - mga\dot{\theta} \sin \theta \\ &= (\omega_1 \hat{\mathbf{1}} + \omega_2 \hat{\mathbf{2}} + \omega_3 \hat{\mathbf{3}}) \cdot (mga \sin \theta \hat{\mathbf{2}}) - mga\dot{\theta} \sin \theta \\ &= 0, \end{aligned}$$

δεδομένου ότι είναι $\omega_2 = \dot{\theta}$.

Η διατήρηση των τριών ποσοτήτων L_z , L_3 και E επιτρέπουν τελικά τον προσδιορισμό της κίνησης με αναγωγή σε ολοκληρώματα.

Για τον προσδιορισμό των εξισώσεων κίνησης γράφουμε τη στροφορμή στο σύστημα 1, 2, 3 και τότε έχουμε, δεδομένου ότι το 1, 2, 3 περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}'$ ως προς το αδρανειακό,

$$\left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{1,2,3} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L} = mga \sin \theta \hat{\mathbf{2}}, \quad (110)$$

όπου $\mathbf{L} = I\omega_1 \hat{\mathbf{1}} + I\omega_2 \hat{\mathbf{2}} + I_3\omega_3 \hat{\mathbf{3}}$. Έτσι οι εξισώσεις της στροφορμής της σβούρας είναι:

$$I\dot{\omega}_1 + I_3\omega_2'\omega_3 - I\omega_3'\omega_2 = 0 \quad (111\alpha')$$

$$I\dot{\omega}_2 + I\omega_3'\omega_1 - I_3\omega_1'\omega_3 = mga \sin \theta \quad (111\beta')$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0. \quad (111\gamma')$$

Δείξαμε προηγουμένως (Άσκηση 9) ότι οι συνιστώσες της στροφορμής $L_3 = I_3\omega_3$ και

$$L_z = L_3 \cos \theta - L_1 \sin \theta = I_3\omega_3 \cos \theta - I(-\dot{\phi} \sin \theta) \sin \theta = I_3\omega_3 \cos \theta + I\dot{\phi} \sin^2 \theta$$

διατηρούνται. Οι διατηρήσεις αυτές θα προέκυπταν αν ολοκληρώναμε άμεσα τις εξισώσεις (111γ', 111α') με λίγες παραπάνω πράξεις για να εξαχθεί η δεύτερη διατήρηση. Συνεπώς γράφοντας $\dot{\phi} = \Omega$ οι (111) είναι ισοδύναμες με το ακόλουθο σύστημα:

$$I\ddot{\theta} = (I\Omega^2 \cos \theta - I_3\omega_3\Omega + mga) \sin \theta, \quad (112\alpha')$$

$$I\Omega \sin^2 \theta + I_3\omega_3 \cos \theta = L_z, \quad (112\beta')$$

$$I_3\omega_3 = L_3. \quad (112\gamma')$$

Δεδομένων των αρχικών τιμών των $L_z, L_3, \theta(0)$ και $\dot{\theta}(0)$ και χρησιμοποιώντας την (112β') και (112γ') για τον προσδιορισμό του ω_3 και του Ω συναρτήσει του θ η (112α') παίρνει τη μορφή:

$$I\ddot{\theta} = F_{\text{ev}}(\theta) = -\frac{dV_{\text{ev}}(\theta)}{d\theta}, \quad (113)$$

η οποία περιγράφει μονοδιάστατη κίνηση σε κάποιο δυναμικό και μπορεί να ολοκληρωθεί. Το ενεργό δυναμικό προσδιορίζεται εύκολα από τη διατήρηση της ενέργειας:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(I\omega_1^2 + I\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) + mga \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}(I\Omega^2 \sin^2 \theta + I\dot{\theta}^2 + I_3\omega_3^2) + mga \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + V_{\text{ev}}(\theta). \end{aligned}$$

Με δεδομένο ότι το ω_3 είναι σταθερό, το ενεργό δυναμικό στην (113) είναι:

$$\begin{aligned} V_{\text{ev}}(\theta) &= \frac{1}{2}I\Omega^2 \sin^2 \theta + \frac{L_3^2}{2I_3} + mga \cos \theta \\ &= \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} + mga \cos \theta. \end{aligned} \quad (114)$$

και επομένως η κίνηση προκύπτει από την ανάλυση της

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2(E - V_{\text{ev}}(\theta))}{I}, \quad (115)$$

η οποία προβλέπει περιοδική κίνηση στο θ με εύρος το πλάτος του διαστήματος $V_{\text{ev}}(\theta) \leq E$. Στο επόμενο εδάφιο θα εξετάσουμε τη μορφολογία του ενεργού δυναμικού της σβούρας και τις κινήσεις που προκύπτουν.

Πριν συζητήσουμε, όμως, τη γενικότερη κίνηση της σβούρας θα προσδιορίσουμε τις καταστάσεις ισορροπίας των εξισώσεων (112) στις οποίες τα θ, Ω, ω_3 έχουν σταθερές τιμές και θα εξετάσουμε την ευστάθειά τους. Οι καταστάσεις ισορροπίας προκύπτουν όταν οι θ, Ω, ω_3 ικανοποιούν, βάσει της (112α'), τη συνθήκη:

$$(I\Omega^2 \cos \theta - I_3\omega_3\Omega + mga) \sin \theta = 0. \quad (116)$$

Επομένως οι δυνατές καταστάσεις ισορροπίας είναι:

- (α) Κατακόρυφη περιστροφή: $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$ ⁴⁸ και οποιαδήποτε τιμή της ω_3 . Η Ω δεν ορίζεται στην περίπτωση αυτή αφού ο άξονας 3 συμπίπτει με τον άξονα Z.

⁴⁸Θεωρούμε ότι το αιχμηρό άκρο της σβούρας είναι απλώς ακλόνητο και δεν υπάρχει κάποιο «δάπεδο» που απαγορεύει στη σβούρα να αναποδογυρίσει.

(β) Μετάπτωση του άξονα, όντας σε οριζόντια θέση: $\theta = \pi/2$, οποιαδήποτε τιμή της ω_3 και

$$\Omega = \frac{mga}{I_3\omega_3} .$$

(γ) Μετάπτωση του άξονα σε ενδιάμεση γωνία: $0 < \theta < \pi/2, \pi/2 < \theta < \pi$, και

$$\Omega_{\pm} = \frac{I_3\omega_3}{2I \cos \theta} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Imga \cos \theta}{I_3^2\omega_3^2}} \right) , \quad (117)$$

Η κατάσταση αυτή πραγματοποιείται εφόσον είναι

$$\omega_3^2 \geq \frac{4Imga \cos \theta}{I_3^2} , \quad (118)$$

δηλαδή εφόσον η ω_3 είναι αρκετά μεγάλη και η γωνία θ είναι οξεία.

Όταν η σβούρα περιστρέφεται όρθια στην κατάσταση (α) και είναι $\theta = 0$, η σβούρα καλείται υπνωτισμένη (sleeping top). Αναφέρεται έτσι διότι είναι δύσκολο να διακρίνει κανείς ανη σβούρα περιστρέφεται ή όχι και για κάποιο παράξενο λόγο στέκεται όρθια παρότι αυτή η κατάσταση είναι βαρυντικά ασταθής. Με την πάροδο του χρόνου, καθώς η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής θα έχει μειωθεί, η σβούρα ξυπνά και αρχίζει να κλυδωνίζεται.

Είναι ενδιαφέρον ότι στις ενδιάμεσες καταστάσεις ισορροπίας (γ) για κάθε θ και ω_3 αντιστοιχούν δύο γωνιακές ταχύτητες μετάπτωσης, μία υψίσυχη και μία χαμηλόσυχη. Στο όριο που η σβούρα περιστρέφεται πολύ γρήγορα και είναι

$$\frac{\sqrt{Imga}}{I_3\omega_3} \ll 1 ,$$

οι δύο αυτές συχνότητες αποκλίνουν μεταξύ τους, και η μεν υψίσυχη, τάξης $O(\omega_3)$, ασυμπτωτικά είναι

$$\Omega_+ \approx \frac{I_3\omega_3}{I \cos \theta} , \quad (119)$$

η δε χαμηλόσυχη, τάξης $O(1/\omega_3)$, ασυμπτωτικά είναι

$$\Omega_- \approx \frac{mga}{I_3\omega_3} . \quad (120)$$

Όταν η σβούρα μεταπίπτει με συχνότητα Ω_+ η περιστροφική ενέργεια κυριαρχεί της βαρυντικής και η συχνότητα μετάπτωσης προσεγγίζει τη συχνότητα μετάπτωσης του ελεύθερου στερεού. Η κατάσταση αυτή μετάπτωσης και περιστροφής, όταν δηλαδή οι γωνιακές ταχύτητες μετάπτωσης Ω και περιστροφής ω_3 ικανοποιούν τη σχέση

$$I\Omega \cos \theta = I_3\omega_3 , \quad (121)$$

καλείται *γυροσκοπική ισορροπία*. Από την (112α') φαίνεται ότι γυροσκοπική ισορροπία προκύπτει πάντα αν είναι $\Omega^2 \gg \ddot{\theta}$ και η κινητική ενέργεια είναι πολύ μεγαλύτερη της δυναμικής, $I\Omega^2 \gg mga$, ώστε να είναι αμελητέα η επιρροή της βαρύτητας. Στην περίπτωση αυτή το στερεό μεταπίπτει ως ελεύθερο στερεό με την ολική του στροφορμή κατακόρυφη και ίση με $\mathbf{L} = I\Omega \hat{z}$ και τότε η (121) δεν είναι τίποτε παραπάνω από την πρόταση ότι η L_3 είναι η προβολή της \mathbf{L} στον άξονα συμμετρίας του στερεού.

Στην αργή μετάπτωση Ω_- κυριαρχεί η βαρυτική δύναμη και η (120) προκύπτει με απλά επιχειρήματα, όπως στο προηγούμενο εδάφιο. Επειδή το σώμα περιστρέφεται πολύ γρήγορα περί τον άξονα συμμετρίας του και είναι $\omega_3 \gg \Omega_-$, η ολική στροφορμή είναι τώρα σχεδόν συγγραμμική με τον άξονα συμμετρίας του σώματος, $\mathbf{L} \approx L_3 \hat{\mathbf{3}}$, ενώ συγχρόνως η στροφορμή \mathbf{L} και ο άξονας συμμετρίας μεταπίπτουν αργά με γωνιακή ταχύτητα Ω περί τον κατακόρυφο άξονα Z που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα $\mathbf{3}$. Η L_3 διατηρείται, διότι η ροπή της εξωτερικής δύναμης δεν έχει συνιστώσα στο επίπεδο $ZO\mathbf{3}$, και επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &\approx \frac{d(L_3 \hat{\mathbf{3}})}{dt} = L_3 \frac{d\hat{\mathbf{3}}}{dt} = I_3 \omega_3 \Omega \hat{z} \times \hat{\mathbf{3}} \\ &= \boldsymbol{\tau} = (a\hat{\mathbf{3}}) \times (-mg\hat{z}), \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης (120).

Προσέξτε ότι η συνθήκη (118) δεν περιορίζει τα ω_3 για τα οποία προκύπτουν καταστάσεις ισορροπίας όταν είναι $\theta > \pi/2$. Μάλιστα όταν είναι $\omega_3 = 0$ και άρα δεν περιστρέφεται περί τον άξονά της η σβούρα, η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης της σφαίρας εκφυλίζεται στην δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη περιστροφή του αντίστοιχου σφαιρικού εκκρεμούς περί τον κατακόρυφο άξονα με γωνιακή ταχύτητα:

$$\Omega = \pm \frac{mga}{I \cos \theta}$$

(βλ. Κεφάλαιο 10). Αν διαταραχθούν οι καταστάσεις σταθερής μετάπτωσης, η σβούρα αρχίζει να κλυδωνίζεται μεταβάλλοντας την κλίση της θ καθώς αυτή μεταπίπτει. Αυτές οι κινήσεις λέγονται νεύσεις ή κλυδωνισμοί της σβούρας (nutations).

Άσκηση 10

Προσδιορίστε για ποιές γωνιακές ταχύτητες περιστροφής, ω_3 , η κατακόρυφη θέση της σβούρας $\theta = 0$ είναι ευσταθής και προσδιορίστε τη συχνότητα των νεύσεων αν η υπνωτισμένη αυτή σβούρα διαταραχθεί στιγμιαία.

Απάντηση: Στην κατάσταση ισορροπίας $\theta = 0$ είναι $L_z = L_3 = I_3 \omega_3$ και το ενεργό δυναμικό (114)

είναι:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{εν}}(\theta) &= \frac{L_3^2(1 - \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} + mga \cos \theta . \\
 &= \frac{L_3^2}{2I} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} + mga \cos \theta . \\
 &\underset{\theta \approx 0}{=} \frac{L_3^2}{2I_3} + mga + \left(\frac{I_3^2 \omega_3^2}{4I} - mga \right) \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4) .
 \end{aligned}$$

Ο συντελεστής του όρου $\theta^2/2$ στην παραπάνω έκφραση παίζει το ρόλο συχνότητας ταλαντωτή ω_0^2 . Επομένως αν η σβούρα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μεγαλύτερη από την

$$\omega_3^2 \geq \frac{4I m g a}{I_3^2} ,$$

τότε η όρθια θέση της σβούρας, η οποία είναι πάντα ασταθής αν το σώμα δεν περιστρεφόταν, καθίσταται ευσταθής και η συχνότητα των νεύσεων είναι $\omega_\nu = \sqrt{I_3^2 \omega_3^2 / (4I^2) - m g a / I}$.

Αντίστοιχα η κατάσταση $\theta = \pi$, όπου τώρα $L_z = -L_3 = -I_3 \omega_3$, είναι πάντα ευσταθής, όπως φαίνεται με απευθείας αντικατάσταση των παραπάνω τιμών στην (114) και ανάπτυγμα των ποσοτήτων γύρω από τη γωνία $\theta = \pi$. Παρατηρήστε επίσης ότι η περιστροφή της σβούρας αυξάνει τη συχνότητα ταλαντώσεων περί τη βαρυτικά ευσταθή κατάσταση ισορροπίας $\theta = \pi$.

Άσκηση 11

Προσδιορίστε την ευστάθεια των καταστάσεων σταθερής μετάπτωσης του στερεού υπό κλίση $\theta \neq 0, \pi$. Προσδιορίστε τη συχνότητα ταλαντώσεων όταν η κατάσταση ισορροπίας διαταραχτεί ελαφρά και το στερεό μεταπίπτει (α) με γωνιακή ταχύτητα $\Omega = m g a / (I_3 \omega_3)$, (β) με τη γωνιακή ταχύτητα γυροσκοπικής ισορροπίας $\Omega = I_3 \omega_3 / (I \cos \theta)$, με $\theta \neq \pi/2$, στο όριο $\omega_3 \gg \sqrt{m g a / I_3}$. Ποιά από τις δύο αυτές καταστάσεις είναι πιο ευσταθής;

Απάντηση: Η σταθερότητα θα εξετασθεί μέσω των εξισώσεων κίνησης. Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο τις (112β'), (112γ'), το σύστημα των εξισώσεων κίνησης (112) γίνονται για $\theta \neq 0, \pi$:

$$I \ddot{\theta} = (I \Omega^2 \cos \theta - I_3 \omega_3 \Omega + m g a) \sin \theta \quad (122\alpha')$$

$$I \sin \theta \dot{\Omega} + (2I \Omega \cos \theta - I_3 \omega_3) \dot{\theta} = 0 \quad (122\beta')$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0 . \quad (122\gamma')$$

Έστω Ω', θ' μικρές αποκλίσεις από την κατάσταση της σβούρας όταν αυτή περιστρέφεται υπό κλίση θ_0 , ενώ μεταπίπτει με γωνιακή ταχύτητα Ω_0 και έχει γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω_3 . Δεν διαταράσσουμε την ω_3 διότι ακόμη και αν διαταρασσόταν, η τιμή της θα ήταν σταθερή λόγω της (122γ') και αυτή η μεταβολή θα προσέθετε έναν σταθερό μη ομογενή όρο στις εξισώσεις που διέπουν τις άλλες διαταραχές και θα οδηγούσε απλώς σε μία σταθερή γωνιακή μετατόπιση της απόκρισης της σβούρας. Επειδή είναι $I \Omega_0^2 \cos \theta_0 - I_3 \omega_3 \Omega_0 + m g a = 0$, μικρές αποκλίσεις θ', Ω' από τις θ_0, Ω_0 ικανοποιούν τις

γραμμικοποιημένες εξισώσεις

$$I\ddot{\theta}' = [(2I\Omega_0 \cos \theta_0 - I_3\omega_3) \sin \theta_0] \Omega' - [I\Omega_0^2 \sin^2 \theta_0] \theta' \quad (123\alpha')$$

$$I \sin \theta_0 \dot{\Omega}' + [2I\Omega_0 \cos \theta_0 - I_3\omega_3] \theta' = 0. \quad (123\beta')$$

Επειδή όλοι οι συντελεστές των εξισώσεων αυτών είναι χρονοανεξάρτητοι, οι εξισώσεις αυτές δέχονται λύσεις της μορφής $\theta' = \hat{\theta}e^{i\omega_\nu t}$ και $\Omega' = \hat{\Omega}e^{i\omega_\nu t}$ όπου το ω_ν είναι η συχνότητα των νεύσεων γύρω από το σημείο ισορροπίας εφόσον το ω_ν είναι πραγματικό, άλλως η κατάσταση ισορροπίας είναι ασταθής. Εισάγοντας αυτές τις λύσεις στις (123α'), (123β') έχουμε:

$$\begin{aligned} -\omega_\nu^2 I \hat{\theta} &= (2I\Omega_0 \cos \theta_0 - I_3\omega_3) \sin \theta_0 \hat{\Omega} - (I\Omega_0^2 \sin^2 \theta_0) \hat{\theta}, \\ I \sin \theta_0 \hat{\Omega} &= -(2I\Omega_0 \cos \theta_0 - I_3\omega_3) \hat{\theta}, \end{aligned}$$

και επομένως είναι

$$\omega_\nu^2 = \frac{(2I\Omega_0 \cos \theta_0 - I_3\omega_3)^2}{I^2} + \Omega_0^2 \sin^2 \theta_0, \quad (124)$$

που σημαίνει ότι οι καταστάσεις σταθερής μετάπτωσης σε γωνίες $\theta \neq 0, \pi$ είναι πάντα ευσταθείς.

(α) Αν είναι $\Omega_0 \approx mga/(I_3\omega_3)$ τότε $\omega_3 \gg \Omega_0$ και μια διαταραχή της καταστασης ισορροπίας προκαλεί υψίσυχνες νεύσεις με συχνότητα

$$\omega_{\nu-} \approx \frac{I_3\omega_3}{I}.$$

(β) Αν διαταράξουμε τη γυροσκοπική ισορροπία με $\Omega_0 \approx I_3\omega_3/(I \cos \theta)$ τότε η συχνότητα νεύσεων που εμφανίζονται έχουν την ακόμη μεγαλύτερη συχνότητα

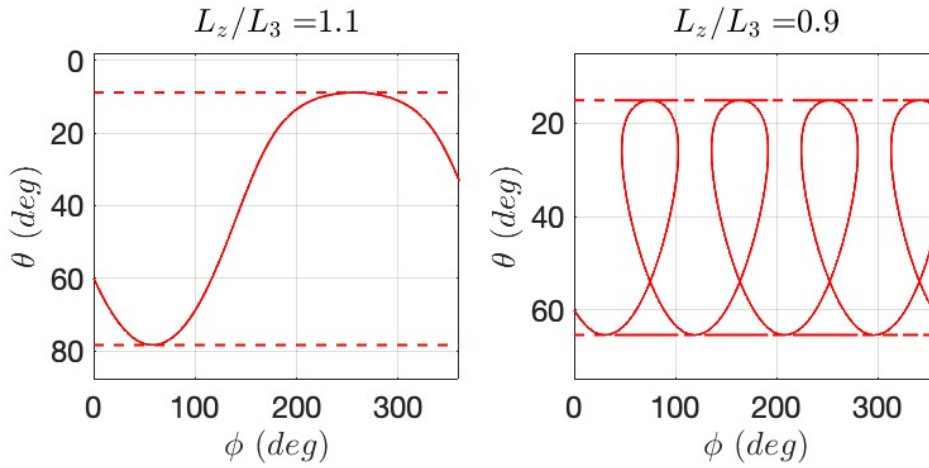
$$\omega_{\nu+} \approx \frac{I_3\omega_3}{I \cos \theta},$$

που σημαίνει ότι η κατάσταση αυτή είναι πιο ευσταθής. Προσέξτε ότι στην περίπτωση αυτή η συχνότητα των νεύσεων $\omega_{\nu+}$ είναι ίση με τη συχνότητα μετάπτωσης.

14.1 Η γενική κίνηση της σβούρας του Lagrange

Στο προηγούμενο εδάφιο καταλήξαμε στο ότι η σβούρα διέπεται από τρεις διατηρούμενες ποσότητες, L_3, L_z, E και ένα ενεργό δυναμικό (114) που ελέγχει την χρονοεξέλιξη της κλίσης της σβούρας θ . Έτσι, δεδομένων των L_z, L_3 και E , η γενική κίνηση προκύπτει από την εξέλιξη της $\theta(t)$ μέσω της (115). Η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης του άξονα $\dot{\phi}$ προκύπτει εκ των υστέρων, αφότου προσδιορισθεί η εξέλιξη της θ μέσω της σχέσης:

$$\dot{\phi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta(t)}{I \sin^2 \theta(t)}. \quad (125)$$



Σχήμα 34: Παραδείγματα τροχιών της σβούρας. Όταν είναι $L_z/L_3 > 1$ η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης $\dot{\phi}$ έχει σταθερό πρόσημο και η τροχιά είναι όπως στο αριστερό γράφημα. Αν είναι $L_z/L_3 < 1$ και το εύρος των γωνιών θ της κίνησης εμπεριέχει τη γωνία θ_0 που ικανοποιεί την εξίσωση $\cos \theta_0 = L_z/L_3$, τότε η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης $\dot{\phi}$ αλλάζει πρόσημο κατά διαστήματα και η τροχιά είναι όπως στο δεξί γράφημα.

Θέτοντας $x = \cos \theta$ στην (115) η εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$\dot{x}^2 = f(x), \quad (126)$$

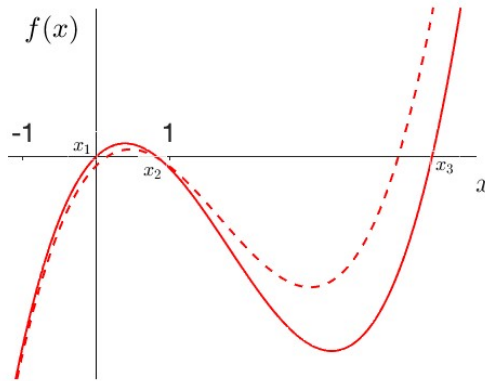
με

$$f(x) = \frac{1}{I} \left(2E - \frac{L_3^2}{I_3} - 2mgax \right) (1 - x^2) - \frac{(L_z - L_3x)^2}{I^2}. \quad (127)$$

Παρότι το φυσικό πρόβλημα περιορίζεται στο διάστημα $-1 \leq x \leq 1$, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε τις ρίζες του κυβικού πολυωνύμου $f(x)$ σε όλη την πραγματική ευθεία.

- 1. Πρώτη παρατήρηση:** Η κίνηση της σβούρας απαιτεί τιμές των L_z , L_3 και E τέτοιες ώστε να είναι $f(x) \geq 0$ για κάποιες τιμές του x στο διάστημα $-1 \leq x \leq 1$. Ως συνέπεια, το κυβικό πολυώνυμο $f(x)$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες (βλ. Σχ. 35).⁴⁹ Με απλή εφαρμογή διαπιστώνουμε ότι $f(\pm 1) \leq 0$. Επειδή είναι $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) > 0$ και $f(1) \leq 0$ είναι φυσικό, για λόγους συνέχειας της f , να υπάρχει πάντα τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα $x_3 \geq 1$. Παράλληλα, αφού η σβούρα κινείται έχοντας συνεχώς κάποια κλίση $x(t) \in [-1, 1]$, υπάρχει x' στο διάστημα $[-1, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x') \geq 0$ που αυτομάτως, αφού $f(\pm 1) \leq 0$, μας εξασφαλίζει ότι υπάρχουν άλλες δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2 στο διάστημα $-1 \leq x_1 \leq x' \leq x_2 \leq 1$. Επομένως η $f(x)$ είναι ένα κυβικό πολυώνυμο με πραγματικές ρίζες

⁴⁹Ένα κυβικό πολυώνυμο έχει οπωσδήποτε είτε μία, είτε τρεις πραγματικές ρίζες. Θα μπορούσε βέβαια από τις τρεις πραγματικές ρίζες, η μια να είναι διπλή.



Σχήμα 35: Το πολυώνυμο τρίτου βαθμού $f(x)$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες εκ των οποίων οι δύο, η x_1 και x_2 , είναι εντός του διαστήματος $|x| \leq 1$ ενώ η τρίτη x_3 είναι αναγκαστικά $x_3 \geq 1$. Η σβούρα εκτελεί περιοδική κίνηση στο x στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Με μικρή αλλαγή των παραμέτρων γράφημα της $f(x)$ μετακινείται στη διάστιχη καμπύλη ενώ η κίνηση που προκύπτει είναι κοντά στην αρχική και τείνει στην αρχική όσο το πλάτος της διαταραχής μικραίνει.

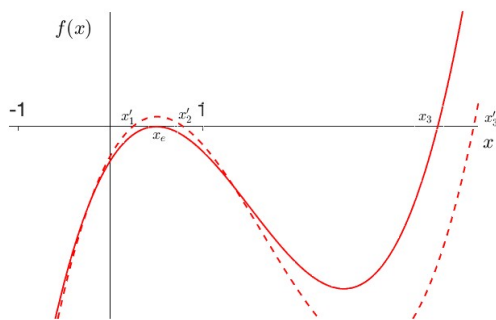
x_1, x_2, x_3 :

$$f(x) = \frac{2mga}{I}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \text{ με } -1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1 \leq x_3, \quad (128)$$

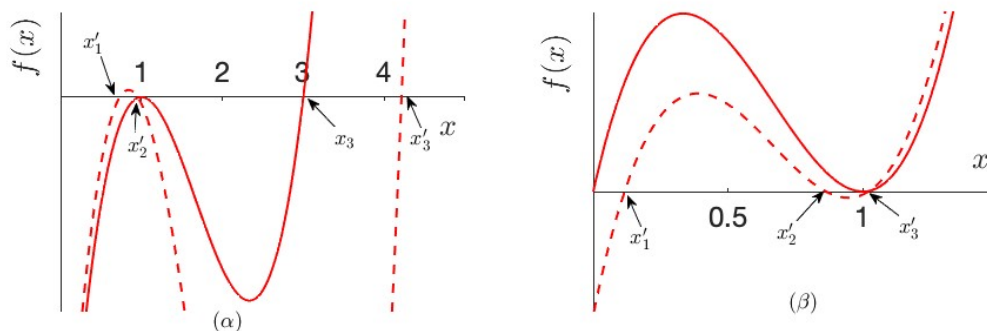
και η σβούρα κινείται μεταξύ των γωνιών θ_1 και θ_2 , όπου $\cos \theta_1 = x_1$ και $\cos \theta_2 = x_2$. Η κίνηση στις γωνίες θ τώρα μπορεί να ολοκληρωθεί. Τα ολοκληρώματα που προκύπτουν είναι ελλειπτικά ολοκληρώματα. Έχοντας προσδιορίσει τη χρονική εξάρτηση της x , η γωνία ϕ προσδιορίζεται άμεσα στη συνέχεια ολοκληρώνοντας την (125). Γραφήματα της τροχιάς της σβούρας έχουν σχεδιαστεί στο Σχ. 34, για την περίπτωση που είναι $L_z/L_3 > 1$ οπότε η γωνιακή ταχύτητα της μετάπτωσης έχει σταθερό πρόσημο και για την περίπτωση $L_z/L_3 < 1$ οπότε, σύμφωνα με την (125), η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης ενδέχεται να αλλάξει πρόσημο.⁵⁰

- Δεύτερη παρατήρηση:** Στις καταστάσεις ισορροπίας δύο από τις ρίζες εκφυλίζονται σε μία. Στην κατάσταση ισορροπίας με $x_e = -1$ ή $-1 < x_e < 1$ η διπλή ρίζα προκύπτει από εκφυλισμό των x_1 και x_2 , ενώ στην περίπτωση της κατακόρυφης ισορροπίας $x_e = 1$ η διπλή ρίζα σχηματίζεται ή από εκφυλισμό των x_1 και x_2 αλλά μπορεί να προκύψει και από εκφυλισμό των x_2 και x_3 . Το γράφημα της $f(x)$ αρκεί για να προσδιοριστεί η ευστάθεια των καταστάσεων της κίνησης της σβούρας. Αν για παράδειγμα η σβούρα εκτελεί περιοδική κίνηση στο x , η $f(x)$ θα έχει τότε τη μορφή του Σχ. 35. Αν διαταραχθεί

⁵⁰Το αν θα συμβεί αυτή η αναστροφή της φοράς της μετάπτωσης εξαρτάται από το αν το εύρος του διαστήματος $[\cos \theta_1, \cos \theta_2] = [x_1, x_2]$ (το οποίο εξαρτάται από την επιλογή των τιμών των L_z, L_3 , και), περιλαμβάνει την τιμή L_z/L_3 .



Σχήμα 36: Κόκκινη καμπύλη: η $f(x)$ που αντιστοιχεί σε κεκλιμένη κατάσταση ισορροπίας της σβούρας υπό γωνία x_e . Στην περίπτωση αυτή η $f(x)$ έχει διπλή ρίζα στο x_e που προκύπτει από εκφυλισμό των x_1 και x_2 . Μικρή διαταραχή μεταβάλλει την $f(x)$ στην παραπλήσιά της (διάστικτη κόκκινη καμπύλη) και τότε η σβούρα κλυδωνίζεται στο διάστημα $[x'_1, x'_2]$ περί το x_e . Η κατάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής, διότι όσο μικραίνει το πλάτος της διαταραχής τόσο μικραίνει και το εύρος της ταλάντωσης περί το x_e . Πιστεύετε ότι θα μπορούσε η διαταραχή να οδηγήσει το γράφημα σε πλήρη απώλεια ριζών πέριξ της x_e ;



Σχήμα 37: (α) Κόκκινη καμπύλη: η $f(x)$ όταν η σβούρα βρίσκεται στην κατακόρυφη κατάσταση ισορροπίας $x_e = 1$ ($\theta = 0$) περιστρεφόμενη με $\omega_3^2 > 4Imga/I_3^2$. Διάστικτη καμπύλη: η $f(x)$ όταν η κατάσταση ισορροπίας διαταραχτεί. Στη διαταραγμένη $f(x)$ η διπλή ρίζα $x_e = 1$ σπάει σε δύο ρίζες $x'_1 < x'_2 < 1$ οι οποίες τείνουν στην $x_e = 1$ όταν το πλάτος της διαταραχής τείνει στο μηδέν και η αρχικά κατακόρυφη σβούρα εκτελεί μικρές ταλαντώσεις στο διάστημα $[x'_1, x'_2]$ πλησίον του $x_e = 1$ και επομένως η ισορροπία $x_e = 1$ είναι και πάλι ευσταθής, παρά το γεγονός ότι η τιμή x_e δεν εμπίπτει στην επιτρεπτή περιοχή κίνησης. (β) Κόκκινη καμπύλη: η $f(x)$ όταν η σβούρα βρίσκεται στην κατακόρυφη κατάσταση ισορροπίας $x_e = 1$ ($\theta = 0$) περιστρεφόμενη με $\omega_3^2 < 4Imga/I_3^2$. Στην περίπτωση αυτή η $f(x)$ εφάπτεται του άξονα x στο $x_e = 1$ έχοντας τα κοίλα προς τα πάνω και οι γενικές ρίζες x_2 και x_3 έχουν εκφυλιστεί στη διπλή ρίζα στο $x_e = 1$. Όταν αυτή η ισορροπία διαταραχτεί, προκύπτει η διάστικτη καμπύλη με αποτέλεσμα η σβούρα να κινείται στο διάστημα $[x'_1, x'_2]$ απομακρυνόμενη από το σημείο ισορροπίας. Η κατακόρυφη κατάσταση ισορροπίας είναι τώρα ασταθής.

η κίνηση και αλλάζουν οι σταθερές E , L_z , L_3 κατά λίγο, το γράφημα της $f(x)$ θα είναι παραπλήσιο με το αρχικό, όπως φαίνεται στο Σχ. 35, και οι δύο ρίζες x_1 και x_2 , οι οποίες αναγκαστικά πρέπει να είναι στο διάστημα $-1 < x < 1$, απλώς μετατοπίζονται κατά λίγο.

3. **Τρίτη Παρατήρηση:** Στην κατάσταση ισορροπίας σε κάποια θέση x_e με $-1 < x_e < 1$ οι δύο ρίζες x_1 και x_2 της $f(x)$ έχουν εκφυλιστεί στη διπλή ρίζα x_e και τότε το γράφημα της $f(x)$ εφάπτεται στον άξονα x (βλ. Σχ. 36). Αν διαταράξουμε αυτήν την κατάσταση ισορροπίας και δεν προκύψει κάποια παραπλήσια κατάσταση ισορροπίας, τότε οι δύο εκφυλισμένες ρίζες θα ξεχωρίσουν αναγκαστικά, διότι πρέπει να υπάρχουν πάντα δύο ρίζες στο διάστημα $[-1, 1]$, και η σβούρα θα ταλαντώνεται στο μικρό αυτό διάστημα $[x'_1, x'_2]$ γύρω από το x_e (βλ. Σχ. 36). Αυτή η ανάλυση δείχνει ότι όλες οι καταστάσεις ισορροπίας της σβούρας σε ενδιάμεσες γωνίες είναι ευσταθείς. Η κατακόρυφη ανεστραμμένη θέση, $\theta = \pi$, είναι επίσης πάντα ευσταθής αλλά η όρθια θέση, $\theta = 0$, είναι ευσταθής μόνον όταν το ω_3 είναι αρκούντως μεγάλο (βλ. Σχ. 37).

Άσκηση 12

Η σβούρα, όταν δεν περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της, συμπεριφέρεται ακριβώς όπως το σφαιρικό εκκρεμές που συναντήσαμε και μελετήσαμε στο Κεφ. 10. Να μελετηθούν οι διαφορές από το σφαιρικό εκκρεμές που προκύπτουν στην κίνηση της σβούρας, όταν αυτή παρουσιάζει και ιδιοπεριστροφή.

Απάντηση: Αν συγκρίνει κανείς την κίνηση που αφορά στη γωνία θ ενός σφαιρικού εκκρεμούς και μιας σβούρας παρατηρεί ότι η θ κίνηση και των δύο σωμάτων διέπεται από μια εξίσωση της μορφής $\ddot{x}^2 = f(x)$, όπου $x = \cos \theta$ και η $f(x)$ και στις δύο περιπτώσεις δίνεται από ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού, με παρόμοιους, αλλά όχι ακριβώς ίδιους συντελεστές. Έτσι για το μεν σφαιρικό εκκρεμές έχουμε (βλ. Κεφ. 10 εξ. (39)):

$$f_{\sigma\phi}(x) = 2 \left(\frac{E}{ml^2} + \omega^2 x \right) (1 - x^2) - \frac{L_z^2}{m^2 l^4}$$

ενώ για τη σβούρα, θεωρώντας ως $\theta = 0$ την κατώτερη θέση, θα είναι

$$f_{\sigma\beta}(x) = 2 \left(\frac{E}{I} - \frac{L_3^2}{2II_3} + \frac{mga}{I} x \right) (1 - x^2) - \frac{(L_z + L_3 x)^2}{I^2}.$$

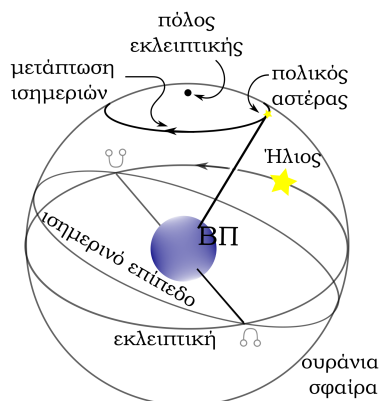
Παρατηρήστε ότι το πρόσημο του x στην πα, σε σχέση με την έκφραση (127), έχει αντιστραφεί, ακριβώς λόγω αλλαγής της αρχής μέτρησης της θ . Ακολουθώντας, θέτουμε στην $f_{\sigma\beta}$, (α) $I = ml^2$, που είναι πράγματι η ροπή αδράνειας της μάζας του σφαιρικού εκκρεμούς κάθετα στη ράβδο, (β) $E' = E - L_3^2/(2I)$, που είναι η ενέργεια της σβούρας δίχως την ιδιοπεριστροφική κινητική ενέργεια, και (γ) $\omega'^2 = mga/I$, που είναι η συχνότητα αιώρησης της σβούρας ως φυσικό εκκρεμές, αν αγνοήσουμε την ιδιοπεριστροφή της. Με τις αλλαγές αυτές λαμβάνουμε μια έκφραση ακριβώς σαν την $f_{\sigma\phi}$ με μοναδική διαφορά τον τελευταίο όρο ο οποίος παύει να είναι σταθερός και καθίσταται εξαρτώμενος από το x , μέσω της αλλαγής $L_z \rightarrow L_z + L_3 x$. Σε αντίθεση με το σφαιρικό εκκρεμές όπου υπάρχουν δύο κλίμακες συχνότητας η ω και η $L_z/(ml^2)$, στη σβούρα υπάρχει και μια τρίτη ενδογενής κλίμακα συχνότητας, η $\omega_3 = L_3/I_3$. Αναμένεται λοιπόν και αυτή να διαμορφώνει τις δύο φυσικές συχνότητες κίνησης της σβούρας, της μετάπτωσης και της νέυσης.

Αν η L_3 είναι της ίδιας τάξης, ή πολύ μεγαλύτερη από την L_z , η συνάρτηση $f_{\sigma\beta}$ διαφοροποιείται σημαντικά από την $f_{\sigma\phi}$. Έτσι ακόμη και αν τα βασικά χαρακτηριστικά των ριζών της f εντός του διαστήματος $[-1, 1]$ διατηρούνται –γεγονός που εξασφαλίζει την κίνηση είτε της σβούρας είτε του σφαιρικού εκκρεμούς εντός μια ζώνης γωνιών–, οι χρονικές κλίμακες της μετάπτωσης και της νεύσης είναι γενικά αρκετά διαφορετικές στα δύο συστήματα και θα ήταν άστοχο να τις συγκρίνουμε. Η μοναδική περίπτωση που μπορούμε να συγκρίνουμε τα δύο συστήματα είναι όταν $L_3 \ll L_z$, οπότε ο όρος $L_3 x$ αναμένεται να προκαλέσει μικρές τροποποιήσεις από αυτές της κίνησης του σφαιρικού εκκρεμούς. Γράφοντας τη διόρθωση που θα προκαλέσει ο νέος όρος σε πρώτη τάξη ως προς L_3 θα έχουμε $f_{\sigma\beta}(x) \approx f_{\sigma\phi}(x) - 2(L_z L_3 / I^2)x$ θεωρώντας όλους τους άλλους όρους των f κοινούς. Η συμβολή αυτού του νέου όρου είναι η ακόλουθη: Αν το εκκρεμές της μη περιστρεφόμενης σβούρας διέγραφε έναν κώνο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης και με σταθερή κλίση $\theta_0 = \cos^{-1} x_0 < \pi/2$, θεωρώντας δηλαδή το $x_0 > 0$ διπλή ρίζα της $f_{\sigma\phi}$, η παρουσία της L_3 –υποθέτοντας ότι $L_z L_3 > 0$ – θα έλεγε κανείς ότι θα οδηγούσε σε απώλεια ριζών! Αυτό είναι αδύνατον, αφού οπωσδήποτε η περιστρεφόμενη σβούρα κάπως θα κινηθεί αν αρχικά της δώσουμε τις ίδιες αρχικές συνθήκες με την μη περιστρεφόμενη σβούρα. Στην πραγματικότητα θα πρέπει να θεωρήσουμε μια κάπως ψηλότερη τιμή της $E' + \delta E$ ώστε να αποκατασταθεί η φαινόμενη απώλεια ριζών. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού το στερεό σώμα της σβούρας με $I_3 \neq 0$ δεν μπορεί να αντιστοιχηθεί με μια σημειακή μάζα στο άκρο αβαρούς ράβδου. Αν όμως ανυψώσουμε την τιμή της E' αυτό θα έχει ως συνέπεια (α) μια μικρή μετατόπιση του σημείου ισορροπίας προς πιο μικρές τιμές του x (πιο μεγάλη γωνία θ) και (β) μια αύξηση της $-f''(x_0)$ που συνδέεται με την $V''_{\text{εν}}$ και επομένως με την συχνότητα νεύσης. Έτσι οι θ ταλαντώσεις της σβούρας θα είναι ελαφρώς ταχύτερες από τις ταλαντώσεις που θα έκανε το αντίστοιχο σχεδόν κωνικό εκκρεμές μιας αναρτημένης μη περιστρεφόμενης σβούρας.

15 Η μετάπτωση των ισημεριών

Η Γη, λόγω ιδιοπεριστροφής, είναι ελαφρώς πεπλατυσμένη στον Ισημερινό και μπορεί να θεωρηθεί ως ένα στερεό με κύριες ροπές αδράνειας I_3 και I με $\epsilon = (I_3 - I)/I_3 = 0.003273$. Ο άξονας συμμετρίας όμως της Γης δεν είναι κάθετος στην επίπεδο της εκλειπτικής επί του οποίου κινείται ο Ήλιος αλλά σχηματίζει γωνία περί τις 23.44° με αποτέλεσμα κατά την περιφορά της Γης περί τον Ήλιο (που γίνεται αντιωρολογιακά κοιτώντας το ηλιακό σύστημα από το Βορρά), η διάρκεια της μέρας να αυξάνεται για μισό χρόνο και μετά να μειώνεται. Δύο φορές τον χρόνο, στις ισημερίες, η μέρα διαρκεί όση ώρα διαρκεί και η νύχτα. Για να προσδιορίσουν την ημερομηνία των ισημεριών οι αστρονόμοι θεωρούν την τομή του εκλειπτικού επιπέδου με το επίπεδο του Ισημερινού της Γης που τη σημειώνουν με την ευθεία $\delta\delta \mathcal{Q}$, που διέρχεται από το κέντρο της Γης, O . Η ευθεία αυτή ονομάζεται ευθεία των συνόδων. Ένας παρατηρητής επί της Γης⁵¹ βλέπει τον Ήλιο να κινείται αντιωρολογιακά (με θετική φορά δηλαδή) επί της εκλειπτικής (βλ. Σχ. 38), αφού όταν δύο σώματα παρουσιάζουν σχετική κίνηση οι φορές κίνησης αυτών αντιστρέφονται όταν μεταπηδούμε από το σύστημα αναφοράς του ενός σώματος στο άλλο, ενώ οι

⁵¹ Στην παρούσα συζήτηση δεν λαμβάνουμε υπόψη την ιδιοπεριστροφή της Γης στην κίνηση του Ήλιου. Θεωρούμε ότι παρατηρούμε τη θέση του Ήλιου σε κάθε περίοδο ιδιοπεριστροφής της Γης, η οποία, σημειωτέον, δεν αντιστοιχεί ακριβώς σε μία ημέρα 24 ωρών (ηλιακή ημέρα), αλλά σε 23 h, 56' 4.09'' (αστρική ημέρα).



Σχήμα 38: Το επίπεδο της εκλειπτικής και το επίπεδο του Ισημερινού τέμνονται στη γραμμή των συνόδων Ο Ηλιος κινείται με αρνητική φορά ως προς τη Γη και ανέρχεται στο Βόρειο ημισφαίριο την εαρινή ισημερία στο σημείο της τροχιάς του Ο άξονας της Γης μεταπίπτει περιστρεφόμενος και αυτός με αρνητική φορά περί άξονα κάθετο στο επίπεδο της εκλειπτικής προκαλώντας τελικά μετάπτωση των ισημεριών με περίοδο 2600 έτη.

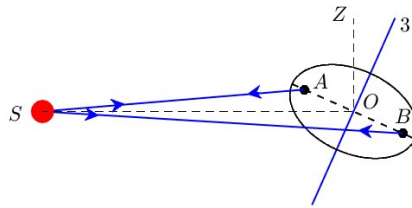
αντίστοιχες φορές περιστροφής είναι κοινές.⁵² Οι ισημερίες συμβαίνουν όταν ο Ήλιος περνά από την ευθεία $\delta\delta \Psi$. Όταν ο Ήλιος ανέρχεται, στο Βόρειο ημισφαίριο διασχίζει την ευθεία $O \delta\delta$ και τότε έχουμε την εαρινή ισημερία, οπότε εισερχόμαστε στην Άνοιξη. Όταν ο Ήλιος κατέρχεται στο Νότιο ημισφαίριο, διασχίζει την ευθεία $O \Psi$ και έχουμε τη φθινοπωρική ισημερία, οπότε και εισερχόμαστε στο Φθινόπωρο. Το 2025, για παράδειγμα, οι δύο αυτές ισημερίες θα συμβούν στις 20 Μαρτίου στις 9:01 GMT και στις 22 Σεπτεμβρίου στις 6:20 GMT, αντίστοιχα.

Η ανακάλυψη ότι ο άξονας της Γης μεταπίπτει κατά 50 arcsec/yr περιστρεφόμενος με αρνητική φορά περί ένα άξονα κάθετο στην εκλειπτική αποδίδεται στον Ίππαρχο και τοποθετείται στο 129 π.Χ. Ως αποτέλεσμα αυτής της μετάπτωσης η γραμμή των συνόδων $\delta\delta \Psi$ περιστρέφεται πολύ αργά και οι ημερομηνίες των ισημεριών διολισθαίνουν σταδιακά προς τους προγενέστερους μήνες (βλ. Σχ. fig:equi00).

Η διολίσθηση αυτή προσδιορίζεται από την αλλαγή του ζωδιακού αστερισμού που βρίσκεται στη διεύθυνση της ανερχόμενης συνόδου. Σήμερα η ανερχόμενη σύνοδος βλέπει προς τον αστερισμό του Ιχθύος και η (αστρολογική) Εποχή μας χαρακτηρίζεται ως η Εποχή του Ιχθύος. Η Εποχή αυτή βαίνει προς το τέλος της και θα την διαδεχθεί (κατά το 2700 μ.Χ.) η Εποχή του Υδροχόου όπως ανακοινώθηκε πανηγυρικά στο τραγούδι “Age of Aquarius” και το ελληνικό «Υδροχόος».⁵³ Η μετάπτωση είναι αργή, έχει περίοδο περί τα 25800 yrs, οπότε κατά μέσο όρο κάθε Εποχή έχει διάρκεια περί τα 2150 yrs.

⁵² Δοκιμάστε να κινηθείτε γύρω από κάποιον φίλο/η σας και συγκρίνετε το πώς βλέπετε εσείς και αυτός/ή να περιστρέφεται ο/η άλλος/η.

⁵³ Αντίστοιχα, στο δίσκο “The Age of Aquarius” των 5th Dimension, και στο δίσκο «Χαράτσι» του Νίκου Παπάζογλου.



Σχήμα 39: Λόγω της πλάτυνσης της Γης η βαρυτική δύναμη που ασκείται στη Γη από τον Ήλιο δεν είναι κεντρική και η τετραπολική ροπή του δυναμικού αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο σωμάτων προκαλεί ροπή επί της Γης, που οδηγεί σε μετάπτωση του άξονα συμμετρίας της Γης, 3, περί τον άξονα OZ με ωρολογιακή φορά.

Ο Νεύτωνας ήταν ο πρώτος που εξήγησε το φαινόμενο από πρώτες αρχές. Έδειξε ότι η μετάπτωση προκαλείται από τη ροπή που ασκείται στη Γη από τον Ήλιο λόγω του πεπλατυσμένου σχήματός της. Το βαρυτικό δυναμικό της Γης λόγω της πλάτυνσης εμφανίζει και τετραπολικούς όρους και επειδή ο άξονας της Γης δεν είναι κάθετος στο επίπεδο της εκλειπτικής ο Ήλιος ασκεί ροπή στη περιστρεφόμενη Γη (βλ. Σχ. 39) με αποτέλεσμα να μεταπίπτει ο άξονας συμμετρίας της Γης, όπως ακριβώς συμβαίνει με τη σβούρα. Επίσης, ο Νεύτων έδειξε ότι αν προστεθεί στην ροπή από τον Ήλιο και η ροπή από τη Σελήνη, τότε η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης συμφωνεί αρκετά καλά με τις παρατηρήσεις και επομένως αρκεί η αλληλεπίδραση με αυτά τα δύο σώματα για να περιγράψει κανείς το φαινόμενο.

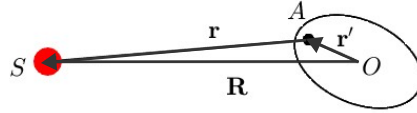
Για να προσδιορίσουμε την μετάπτωση του άξονα της Γης πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τη ροπή που ασκείται στο ΚΜ της Γης από τον Ήλιο. Η ροπή αυτή είναι το άθροισμα των ροπών των βαρυτικών δυνάμεων που ασκούνται σε όλα τα $\mathbf{r}' \times \mathbf{F}_{SA}$, όπου \mathbf{F}_{SA} η δύναμη που ασκείται στο σημείο A της Γης από τον Ήλιο και \mathbf{r}' η θέση του A ως προς το ΚΜ της Γης. Το άθροισμα αυτό υπολογίζεται ευκολότερα αν χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{F}_{SA} = -\mathbf{R} \times \mathbf{F}_{AS} ,$$

όπου $\mathbf{F}_{AS} = -\mathbf{F}_{SA}$ είναι η δύναμη που ασκεί η σημειακή μάζα στο A επί του Ήλιου και \mathbf{R} η θέση του Ήλιου ως προς το ΚΜ της Γης⁵⁴ (βλ. Σχ. 40). Επομένως η συνολική ροπή που ασκείται στη Γη είναι:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \sum_{\mathbf{r}'} \mathbf{r}' \times \mathbf{F}_{SA} \\ &= -\mathbf{R} \times \sum_{\mathbf{r}'} \mathbf{F}_{AS} \\ &= M_S \mathbf{R} \times \nabla_{\mathbf{R}} \Phi(\mathbf{R}) , \end{aligned} \quad (129)$$

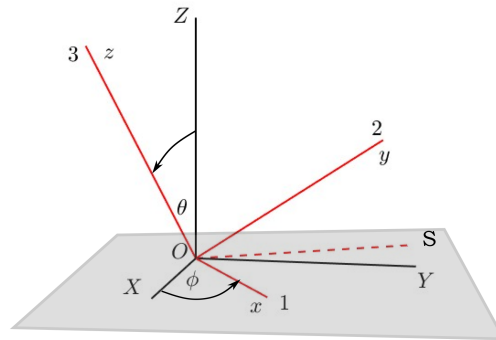
⁵⁴Η σχέση αυτή μπορεί να θεωρηθεί το ανάλογο του νόμου δράσης-αντίδρασης, δηλαδή ο 3ος νόμος του Νεύτωνα για τις ροπές. Από το τρίγωνο SAO έχουμε $|\mathbf{R}|/\sin(\angle SAO) = |\mathbf{r}'|/\sin(\angle ASO)$.



Σχήμα 40: \mathbf{R} είναι η θέση του Ήλιου S ως προς το ΚΜ της Γης O , \mathbf{r}' η θέση του σημείου A ως προς το ΚΜ της Γης και $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{r}'$. Εάν \mathbf{F}_{SA} η δύναμη που ασκείται στο A από τον Ήλιο και \mathbf{F}_{AS} η δύναμη που ασκείται στον Ήλιο από το A , τότε είναι $\mathbf{r}' \times \mathbf{F}_{SA} = -\mathbf{R} \times \mathbf{F}_{AS}$.

όπου M_S η μάζα του Ήλιου και $\Phi(\mathbf{R})$ το δυναμικό Γης στη θέση του Ήλιου. Το δυναμικό $\Phi(\mathbf{R})$ της Γης, αν υποθεθεί ότι έχει το σχήμα ενός αξονικά συμμετρικού σφαιροειδούς, έχει το πολυπολικό ανάπτυγμα (βλ. εξίσωση (89) του Κεφαλαίου 15 καθώς και τις (48), (49) του παρόντος Κεφαλαίου):

$$\Phi(\mathbf{R}) = -\frac{GM_\Gamma}{R} - \frac{G(I_3 - I)}{2R^5}(R^2 - 3z^2) + \dots,$$



Σχήμα 41: Το επίπεδο της εκλειπτικής είναι το XY και το 123 είναι το καρτεσιανό σύστημα των κύριων άξονων της Γης. Η θ είναι η γωνία 23.44° που σχηματίζει ο άξονας συμμετρίας της Γης με τον άξονα Z . Ο άξονας 1 είναι η ευθεία των συνόδων. Η διακεκομμένη ημιευθεία ορίζει την κατεύθυνση \mathbf{R} στην οποία βρίσκεται ο Ήλιος και επομένως, εκτός από τους άξονες $x, 1$, βρίσκεται και αυτή στο επίπεδο της εκλειπτικής XY .

όπου $\mathbf{R} = (x, y, z)$ οι συντεταγμένες του Ήλιου στο καρτεσιανό πλαίσιο 123 των κύριων άξονων της Γης με αρχή το O (βλ. Σχ. 41) και I_3, I είναι οι κύριες ροπές αδράνειας.

Επομένως η ροπή που ασκείται στη Γη είναι

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \frac{3GM_S(I_3 - I)}{R^5} \mathbf{R} \times (z\hat{\mathbf{3}}) \quad 55 \\ &= \frac{3GM_S(I_3 - I)z}{R^5} (y\hat{\mathbf{1}} - x\hat{\mathbf{2}}),\end{aligned}\quad (130)$$

και κυριαρχείται από τον τετραπολικό όρο του δυναμικού.⁵⁶

Στην (130) η \mathbf{R} εκτελεί ως υποθέσουμε κυκλική κίνηση ακτίνας R και συχνότητας ω , ώστε η θέση του Ήλιου στο σύστημα XYZ του Σχ. 41 να είναι

$$X = R \cos \omega t, \quad Y = R \sin \omega t, \quad Z = 0.$$

Στο σύστημα 123 οι συντεταγμένες του Ήλιου είναι

$$\begin{aligned}x &= X \cos \phi + Y \sin \phi = R \cos(\phi + \omega t) \\ y &= (-X \sin \phi + Y \cos \phi) \cos \theta = -R \sin(\phi + \omega t) \cos \theta \\ z &= (X \sin \phi - Y \cos \phi) \sin \theta = R \sin(\phi + \omega t) \sin \theta.\end{aligned}$$

Επομένως η ροπή από τον Ήλιο έχει την εξής ετήσια χρονοεξάρτηση

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{3GM_S(I_3 - I)}{R^3} [\sin^2(\phi + \omega t) \sin \theta \cos \theta \hat{\mathbf{1}} + \sin(\phi + \omega t) \cos(\phi + \omega t) \sin \theta \hat{\mathbf{2}}].$$

Ο όρος $\sin(\phi + \omega t) \cos(\phi + \omega t)$ έχει μηδενικό ετήσιο μέσο όρο και δεν συμβάλλει σε φαινόμενα που έχουν περίοδο πολύ μεγαλύτερη από το ένα έτος, όπως η μετάπτωση των ισημεριών. Ο μόνος όρος που συμβάλλει μακροπρόθεσμα στην μετάπτωση είναι ο όρος $\sin^2(\phi + \omega t)$ ο οποίος έχει ετήσιο μέσο όρο $1/2$ και έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ροπή που ευθύνεται για την μετάπτωση του άξονα περιστροφής είναι η μέση ετήσια ροπή:

$$\langle \boldsymbol{\tau} \rangle = -\frac{3GM_S(I_3 - I)}{2R^3} \sin \theta \cos \theta \hat{\mathbf{1}}.$$

Η μετάπτωση γίνεται περί τον άξονα Z και δεδομένου ότι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης, ω_3 , είναι πολύ μεγαλύτερη από τη γωνιακή ταχύτητα της μετάπτωσης Ω ο ρυθμός μετάπτωσης μπορεί να εκτιμηθεί αμέσως ότι είναι

$$\Omega \simeq \frac{|\langle \boldsymbol{\tau} \rangle|}{I_3 \omega_3 \sin \theta} = \frac{3}{2} \frac{GM_S (I_3 - I)}{R^3} \frac{\cos \theta}{I_3 \omega_3}. \quad 57 \quad (131)$$

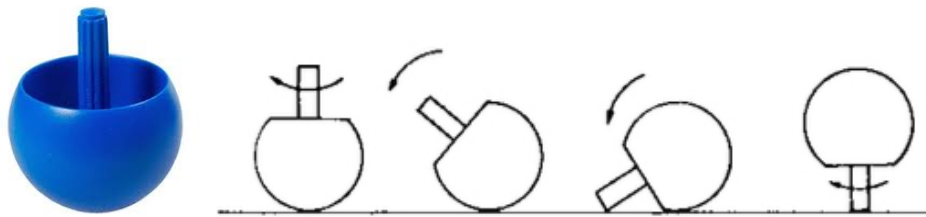
Λαμβάνοντας $\epsilon = (I_3 - I)/I_3 = 1/305$, $\omega_3 = 2\pi \text{ d}^{-1}$ και $\theta = 23.44^\circ$, η περίοδος της μεταπτωτικής κίνησης $T_M = 2\pi/\Omega$ που προκαλείται από την ροπή από τον Ήλιο⁵⁸ υπολογίζεται

⁵⁵ Η βαθμίδα του όρου του δυναμικού R^2 , $\nabla_{\mathbf{R}} R^2 = 2\mathbf{R}$ δεν οδηγεί σε ροπή.

⁵⁶ Προσέξτε ότι άξονας 1 στο σύστημα αναφοράς του Σχ. 41 είναι ο άξονας 2 στο σύστημα που συνήθως λαμβάνουμε όταν αναλύουμε αξονικά συμμετρικά σώματα, όπως για παράδειγμα στο Σχ. 33.

⁵⁷ Ο όρος $\sin \theta$ στον παρονομαστή έχει εισαχθεί κατ' αναλογία με την έκφραση (105) στο Εδάφιο 13, όπου αντί της ροπής $(a\hat{\mathbf{3}}) \times \mathbf{F}$ εμφανίζεται το μέτρο αυτής της ροπής διαιρεμένο με το $\sin \theta$ μεταξύ της $a\hat{\mathbf{3}}$ και \mathbf{F} .

⁵⁸ Έχουμε λάβει $GM_S = 1.327 \times 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ και $R = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο τρίτος νόμος του Κέπλερ στους υπολογισμούς, αντικαθιστώντας απευθείας την ποσότητα $GM_S/R^3 = 4\pi^2/T^2$, όπου $T = 1 \text{ yr}$ η περίοδος περιστροφής της Γης περί τον Ήλιο.



Σχήμα 42: Το tippe top (αριστερά), όταν τοποθετηθεί σε ένα μη λείο τραπέζι με μεγάλη κατακόρυφη γωνιακή ταχύτητα και με την σφαιρική επιφάνεια προς τα κάτω, με την πάροδο του χρόνου θα αναστραφεί όπως φαίνεται στο σχήμα δεξιά.

ότι είναι 81000 yrs. Η Σελήνη, όπως και στις παλίρροιες, έχει μεγαλύτερη συμβολή. Θεωρώντας ότι η τροχιά και τη Σελήνης είναι επί της εκλειπτικής⁵⁹ η περίοδος της μεταπτωτικής κίνησης του άξονα που προκαλείται από τη Σελήνη υπολογίζεται στα 36900 yrs, και αν συμπεριλάβουμε τις ροπές και από τον Ήλιο και από τη Σελήνη τότε προκύπτει περίοδος μετάπτωσης 25360 y, που είναι συμβατή με τις παρατηρήσεις.

Όσον αφορά την φορά αυτής της μετάπτωσης, είναι εύκολο να συμπεράνουμε από την κατεύθυνση της ροπής, -1 , που συμπίπτει με την κατεύθυνση από τη Γη προς την ανερχόμενη σύνοδο,⁶⁰ ότι η φορά είναι αυτή που φαίνεται στο Σχ. 38 η οποία συμβαδίζει με τη φορά του Ήλιου στην εκλειπτική.

16 Το tippe-top και το απρόσμενο αναποδογύρισμά του

Το tippe top, η σβούρα στο Σχ. 42, αποτελείται από ένα σφαιρικό κομμάτι με αξονική μεν συμμετρία, αλλά ανομοιογενή κατανομή μάζας έτσι ώστε, το ΚΜ του να μην συμπίπτει με το κέντρο της σφαίρας. Για την ακρίβεια είναι κατασκευασμένο ώστε το ΚΜ του να βρίσκεται χαμηλότερα από το κέντρο της σφαίρας. Όταν το tippe top δεν περιστρέφεται ισορροπεί ακίνητο με το ΚΜ στη χαμηλότερη απόσταση από το δάπεδο. Αυτή είναι η κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας: (κινητικής=0)+δυναμικής. Όταν όμως του προσδώσουμε κατακόρυφη γωνιακή ταχύτητα περί τον άξονα συμμετρίας της που συνδέει το ΚΜ με το κέντρο της σφαίρας και με το σημείο επαφής με το δάπεδο και το αφήσουμε ελεύθερο το tippe top αντί να συνεχίσει να περιστρέφεται περί τον άξονα αυτόν με τον αρχικό προσανατολισμό που αντιστοιχεί στη χαμηλότερη δυναμική ενέργεια, εν τέλει αναποδογυρίζει, όπως φαίνεται στο Σχ. 42, και περιστρέφεται, αν είχε αρκετή αρχική στροφορμή, με την ίδια φορά περί τον άξονα συμμετρίας του στη διάταξη

⁵⁹Στην πραγματικότητα, το επίπεδο της τροχιάς της Σελήνης ταλαντώνεται με κύρια περίοδο περί τα 18 yrs περί το επίπεδο της εκλειπτικής με πλάτος $\pm 5.1^\circ$. Για τη συμβολή στη ροπή από τη Σελήνη έχουμε λάβει $GM_m = 4.9028 \times 10^{12} \text{ m}^3\text{s}^{-2}$, $R_m = 3.834 \times 10^8 \text{ m}$.

⁶⁰Στο Σχ. 41 ο άξονας 1 είναι ο άξονας από τη Γη προς την κατερχόμενη σύνοδο του Σχ. 38, που «εισέρχεται» στη σελίδα και κοιτώντας τη Γη από αυτόν, η Γη παρουσιάζει την κλίση προς τα αριστερά που αποτυπώνεται στο Σχ. 41.



Σχήμα 43: Ο Wolfgang Pauli και ο Niels Bohr παίζουν με το tippe top στα εγκαίνια του Ινστιτούτου Φυσικής το 1954 στο Lund της Σουηδίας. Από το Niels Bohr Archive, photograph by Erik Gustafson, courtesy of AIP Emilio Segrè Visual Archives, Margrethe Bohr Collection.

μέγιστης δυναμικής ενέργειας!⁶¹

Το tippe top εφευρέθηκε το 1891 από τη Γερμανίδα νοσηλεύτρια Helene Sperl, η οποία μάλιστα κατοχύρωσε και δικαιώματα ευρεσιτεχνίας, ενώ η «ανώμαλη» συμπεριφορά της έχει προβληματίσει πολλούς φυσικούς όπως φαίνεται στο Σχ. 43. Η Φυσική της εν λόγω σβούρας έχει πλούσια βιβλιογραφία.⁶²

Επειδή η δυναμική ενέργεια αυξάνεται κατά την αναστροφή, η γωνιακή ταχύτητα του tippe top αναγκαστικά πρέπει να μειώνεται. Αυτό απαιτεί ότι ροπές από τριβές στο σημείο επαφής του tippe top με το δάπεδο μειώνουν τη γωνιακή ταχύτητα και αντίστοιχα την περιστροφική ενέργεια του tippe top. Επομένως το φαινόμενο του αναποδογυρίσματος του tippe top έχει τη ρίζα του στην ύπαρξη τριβών. Αν το δάπεδο ήταν απόλυτα λείο το tippe top δεν θα αναποδογύριζε. Η κύρια δύναμη τριβής που ασκείται σε ένα περιστρεφόμενο σώμα που βρίσκεται σε επαφή με μια σκληρή (μη ελαστική) επιφάνεια είναι συνήθως η τριβή ολίσθησης (η τριβή κύλισης είναι συνήθως σχετικά αμελητέα). Επομένως η ανάλυση του tippe top πρέπει να περιλαμβάνει τις δυναμικές επιπτώσεις στην κίνησή του από τις δυνάμεις τριβής, πέραν του βάρους. Η βασική επίπτωση είναι ότι λόγω των τριβών η συνολική ενέργεια του tippe top μειώνεται. Αλλά εφόσον η κύρια πηγή τριβής είναι η τριβή ολίσθησης, το περισσότερο που θα μπορούσε να μειωθεί η

⁶¹ Η φορά περιστροφής του στο σύστημα του tippe top είναι ίδια, αλλά στο αδρανειακό σύστημα η φορά περιστροφής αντιστρέφεται.

⁶² βλ. Cohen, R. J., 1977: The tippe top revisited, *American Journal of Physics*, **45**, 12–17; Leutwyler, H., 1994: Why some tops tip?, *European J. Phys.*, **15**, 59-61; Ebenfeld, S., Scheck, F., 1995: A New Analysis of the Tippe Top: Asymptotic States and Liapunov Stability, *Annals of Physics*, **243**, 195-217; Moffatt, H. K., Shimomura, Y. & Branicki, M., 2004: Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface. I. Stability and the gyroscopic approximation, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **460**, 3643-32672; Bou-Rabee, N., Marsden, J. E. & Romero L. A., 2008: Dissipation-Induced Heteroclinic Orbits in Tippe Tops, *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, **3**, 352-377.

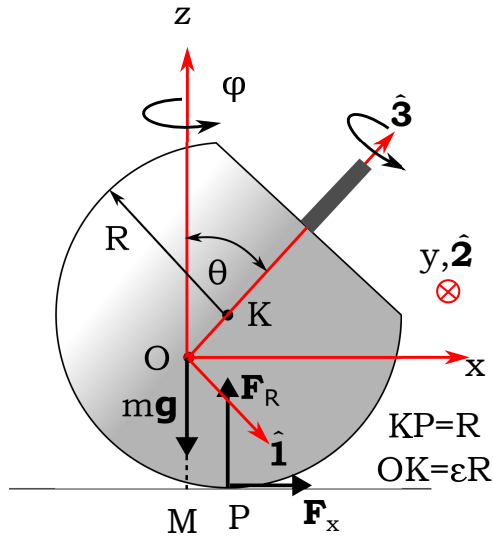
ενέργεια είναι μέχρις ότου σταματήσει να ολισθαίνει το *tippe top*. Αν σταματήσει να ολισθαίνει, η ενέργειά του, αμελώντας την πολύ μικρή ανάλωση που προκαλείται από την τριβή κύλισης, διατηρείται. Συνεπώς αν το *tippe top* σταματήσει να ολισθαίνει και θεωρήσουμε αμελητέα την τριβή κύλισης, θα παραμείνει σε αυτή τη δυναμική κατάσταση για πάντα, έχοντας μεταβεί σε ένα χαμηλότερο ενεργειακό επίπεδο από το αρχικό, το οποίο όμως πρέπει να είναι τουλάχιστον τοπικό ελάχιστο της ενέργειας, υπό την προϋπόθεση ότι η τελική κατάσταση είναι ευσταθής (αν δεν ήταν δεν θα την παρατηρούσαμε).

Το *tippe top* αποδεικνύει ότι υπάρχουν καταστάσεις όπου η ενέργεια ελαχιστοποιείται όταν η δυναμική ενέργεια μεγιστοποιείται. Σε ένα μηχανικό σύστημα αυτό είναι δυνατόν μόνον αν υπάρχουν άλλες ποσότητες που διατηρούνται καθώς η ενέργεια μειώνεται. Σε αυτά τα συστήματα η ελαχιστοποίηση της ενέργειας γίνεται υπό περιορισμό και έτσι το σύστημα δεν καταλήγει αναγκαστικά σε κατάσταση ελάχιστης δυναμικής ενέργειας. Αυτό σημαίνει ότι η κίνηση του *tippe top* ελέγχεται από τη διατήρηση κάποιας νέας κρυφής ποσότητας. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται αναλλοίωτο Jellett,⁶³ και παραμένει σταθερή παρότι η ενέργειά του μειώνεται. Η ύπαρξη αυτής της ποσότητας βασίζεται στη γεωμετρική ιδιότητα ότι η επιφάνεια επαφής του στερεού με το δάπεδο είναι ακριβώς σφαιρική. Αν η επιφάνεια επαφής δεν είναι ακριβώς σφαιρική τότε το αναλλοίωτο του Jellett διατηρείται προσεγγιστικά και ελέγχει την εξέλιξη του στερεού όταν το σώμα περιστρέφεται τόσο γρήγορα ώστε να μεταπίπτει κατά προσέγγιση ως ελεύθερο σώμα.

Για την περιγραφή της κίνησης του *tippe top* λαμβάνουμε, ως συνήθως, τρία συστήματα αναφοράς. Ένα αδρανειακό το $X'Y'Z'$, με τον άξονα Z' κατακόρυφο και την αρχή των αξόνων του σε κάποιο σημείο του δαπέδου, και δύο μη αδρανειακά τα $O123$ και $OXYZ$ με κέντρο το ΚΜ του σώματος O (βλ. Σχ. 44). Το $O123$ έχει ως άξονες τους κύριους άξονες αδράνειας του σώματος, Θεωρούμε ότι το *tippe top* είναι αξονικά συμμετρικό με ροπές αδράνειας I_3 και I (ο άξονας συμμετρίας έχει ροπή αδράνειας I_3 ενώ οι ροπές αδράνειας στους άξονες που είναι κάθετοι στον άξονα συμμετρίας είναι I). Ο άξονας $O3$, με μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{3}}$, λαμβάνεται ως ο άξονας συμμετρίας του σώματος και ο άξονας $O1 \perp O3$, με μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{1}}$, επί του κατακόρυφου επιπέδου που διέρχεται από το O . Τέλος ο άξονας $O2$ (προς τα μέσα στη σελίδα), με μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{2}} = \hat{\mathbf{3}} \times \hat{\mathbf{1}}$, συμπληρώνει την ορθοκανονική τριάδα. Το σύστημα αναφοράς $OXYZ$ λαμβάνεται ώστε ο OZ να είναι κατακόρυφος και το επίπεδο OXZ να ταυτίζεται με το κατακόρυφο επίπεδο $OZ3$, και έτσι ο άξονας OY ταυτίζεται ανά πάσα στιγμή με τον άξονα $O2$. Τα μοναδιαία διανύσματα του καρτεσιανού συστήματος $OXYZ$ θεωρούμε ότι είναι τα \hat{x} , \hat{y} και \hat{z} , τα οποία, αν η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του $O3$ και της OZ είναι $\theta = \angle ZO3$, σχετίζονται με τα μοναδιαία διανύσματα του $O123$ ως εξής:

$$\hat{x} = \cos \theta \hat{\mathbf{1}} + \sin \theta \hat{\mathbf{3}}, \quad \hat{y} = \hat{\mathbf{2}}, \quad \hat{z} = -\sin \theta \hat{\mathbf{1}} + \cos \theta \hat{\mathbf{3}}.$$

⁶³Ο μαθηματικός John Hewitt Jellett [1817-1888] ανακάλυψε την ποσότητα αυτή (Jellett, J. H. 1872: A treatise on the theory of friction, London: Macmillan). Η αναλλοιότητα της ποσότητας του Jellett αποδεικνύεται όμως από τον Routh (βλ. σελ. 192-193 στο Routh, E. J.: The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, Dover, New York, 1955).



Σχήμα 44: Σχηματική περιγραφή της σβούρας τίρρε top με K το κέντρο της σφαιρικής της επιφάνειας και O το KM του. Η απόσταση OK είναι ϵR , όπου R η ακτίνα της σφαιρικής επιφάνειας. Οι άξονες που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση της κίνησης διακρίνονται στο Σχήμα. Αν το σημείο επαφής μετακινηθεί, το διάνυσμα $\mathbf{X}_P = \vec{OP} = \vec{OK} + \vec{KP} = \epsilon R \hat{\mathbf{z}} - R \hat{\mathbf{z}}$ θα αλλάξει και ως προς την κατεύθυνση και ως προς το μέτρο.

Το σημείο επαφής του τίρρε top με το επίπεδο είναι το P (στην ίδια κατακόρυφο με το K) και \mathbf{X}_P το διάνυσμα \vec{OP} , το οποίο είναι (βλ. Σχ. 44):

$$\mathbf{X}_P = \epsilon R \hat{\mathbf{z}} - R \hat{\mathbf{z}},$$

όπου R η ακτίνα της σφαιρικής επιφάνειας του τίρρε top στο σημείο επαφής P και ϵR η απόσταση του KM , O , από το κέντρο καμπυλότητας K . Το $0 \leq \epsilon \leq 1$ είναι ο λόγος της απόστασης του KM από το κέντρο της σφαίρας σε σχέση με την ακτίνα της σφαίρας.

Η θέση των κυρίων αξόνων του σώματος προσδιορίζεται με τις γωνίες Euler, (θ, ϕ, ψ) , με βάση το αδρανειακό σύστημα $X'Y'Z'$. Έτσι το σύστημα $OXYZ$ περιστρέφεται ως προς το αδρανειακό με γωνιακή ταχύτητα

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} \equiv \Omega \hat{\mathbf{z}},$$

ενώ η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος $O123$ (ως προς το αδρανειακό $X'Y'Z'$) είναι

$$\boldsymbol{\omega}' = \dot{\theta} \hat{\mathbf{2}} + \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} = -\Omega \sin \theta \hat{\mathbf{1}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{2}} + \Omega \cos \theta \hat{\mathbf{3}},$$

δεδομένου ότι ο άξονας $O1$ παραμένει πάντα στο κατακόρυφο επίπεδο $ZO3$ και δεν περιστρέφεται περί τον $O3$ μαζί με το τίρρε top. Τέλος η γωνιακή ταχύτητα του ίδιου του σώματος που περιστρέφεται ως προς το 123 με γωνιακή ταχύτητα $\psi \hat{\mathbf{3}}$ είναι

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \hat{\mathbf{2}} + \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} + \psi \hat{\mathbf{3}} = -\Omega \sin \theta \hat{\mathbf{1}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{2}} + \underbrace{(\psi + \Omega \cos \theta)}_{\equiv \omega_3} \hat{\mathbf{3}}.$$

Η γωνιακή ταχύτητα Ω είναι η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης του άξονα συμμετρίας, και η γωνιακή ταχύτητα ω_3 είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σώματος περί τον άξονα συμμετρίας του.

Εάν \mathbf{X} είναι η θέση και αντιστοίχως $\mathbf{U} = \dot{\mathbf{X}}$ η ταχύτητα του ΚΜ ως προς το αδρανειακό σύστημα τότε η εξίσωση κίνησης του ΚΜ τους σώματος είναι

$$m \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F}_R - m\mathbf{g} + \mathbf{T} = F_R \hat{\mathbf{z}} - mg\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{T}, \quad (132)$$

όπου $F_R > 0$ η κατακόρυφη αντίδραση από το δάπεδο, $\mathbf{T} = F_X \hat{\mathbf{x}} + F_Y \hat{\mathbf{y}}$, η δύναμη της τριβής και $-mg\hat{\mathbf{z}}$ η δύναμη της βαρύτητας (m είναι η ολική μάζα του σώματος). Η δύναμη της τριβής \mathbf{T} αντιτίθεται στην κίνηση του σώματος όταν αυτό ολισθαίνει και επομένως είναι

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{U}_P \leq 0,$$

όπου $\mathbf{U}_P = \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{X}_P$ η ταχύτητα του σημείου επαφής, P . Επιπλέον απαιτούμε το σώμα να βρίσκεται πάντα σε επαφή με το δάπεδο, δηλαδή να ικανοποιείται πάντοτε η ισότητα:

$$\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{z}} = -\mathbf{X}_P \cdot \hat{\mathbf{z}}, \quad (133)$$

και συνεπώς παραγωγίζοντας χρονικά τη σχέση αυτή η κατακόρυφη ταχύτητα πρέπει πάντοτε να μηδενίζεται: $W_P = \mathbf{U}_P \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$.

Η χρονική εξέλιξη της στροφορμής \mathbf{L} , ως προς το ΚΜ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{X}_P \times (F_R \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{T}), \quad (134)$$

αφού η ροπή του βάρους ως προς το ΚΜ μηδενίζεται. Η στροφορμή είναι $\mathbf{L} = \mathbb{I}\boldsymbol{\omega}$, όπου \mathbb{I} είναι ο τανυστής αδράνειας του σώματος.⁶⁵

Η ποσότητα Jellet η οποία διατηρείται κατά την κίνηση του tippe top (βλ. Άσκηση 12) είναι η

$$J = -\mathbf{X}_P \cdot \mathbf{L} = R(L_z - \epsilon L_3), \quad (135)$$

όπου $L_z = \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{L}$ και $L_3 = \hat{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{L}$. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή και αντίθετα από τον στρόβο του Lagrange, δεν διατηρούνται –εφόσον υπάρχει τριβή– ούτε η $L_z = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ ούτε και η $L_3 = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{3}}$. Διατηρείται όμως ο συνδυασμός των στροφορμών:

$$L_z - \epsilon L_3 !$$

⁶⁴Θυμηθείτε ότι η μέτρηση του \mathbf{X} γίνεται από κάποιο σταθερό σημείο του δαπέδου.

⁶⁵ Στο εξής θα χρησιμοποιήσουμε την τανυστική αυτή γραφή με διπλόγραμμα σύμβολα για να αποφύγουμε τη χρήση δεικτών.

Αποδείχτηκε πρόσφατα⁶⁶ ότι ενώ το αναλλοίωτο Jellet δεν διατηρείται αν η επιφάνεια επαφής του στερεού δεν είναι σφαιρική (δεν έχει δηλαδή την ίδια ακτίνα καμπυλότητας), το αναλλοίωτο Jellet επιζεί ως αδιαβατικό αναλλοίωτο (δηλαδή μεταβάλλεται πολύ πιο αργά από τη χρονική κλίμακα εξέλιξης του συστήματος), εφόσον το σώμα περιστρέφεται με μεγάλη γωνιακή ταχύτητα έτσι ώστε να ισχύει $I_3\omega_3 \approx I\Omega \cos \theta$ και το σώμα ακολουθεί μια μεταπτωτική, κατά προσέγγιση, κίνηση ωσάν να ήταν ελεύθερο σώμα.

Άσκηση 12

Δείξτε ότι η ποσότητα

$$J = -\mathbf{L} \cdot \mathbf{X}_P = -\mathbf{L} \cdot (\epsilon R \hat{\mathbf{z}} - R \hat{\mathbf{z}}) = R(L_z - \epsilon L_3)$$

διατηρείται. Η ποσότητα αυτή είναι το καλούμενο αναλλοίωτο του Jellett.

Απάντηση: Παρατηρούμε πρώτα η ροπή των δυνάμεων ως προς το ΚΜ είναι κάθετη στο \mathbf{X}_P , αφού

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{X}_P = (\mathbf{X}_P \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{X}_P = 0, \quad (136)$$

όπου $\mathbf{F} = F_R \hat{\mathbf{z}} + F_X \hat{\mathbf{x}} + F_Y \hat{\mathbf{y}}$ η συνολική δύναμη που ασκείται στο σημείο επαφής. Αντικαθιστώντας την $\boldsymbol{\tau}$ με $d\mathbf{L}/dt$ ή απλώς πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά την (134) με το \mathbf{X}_P , έχουμε αμέσως ότι

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \cdot \mathbf{X}_P = 0. \quad (137)$$

Αν η επιφάνεια επαφής ενός αξονικά συμμετρικού στερεού είναι σφαιρική τότε έχουμε επιπλέον τη σχέση:

$$\mathbf{L} \cdot \frac{d\mathbf{X}_P}{dt} = 0. \quad (138)$$

Για την απόδειξη^α της (138) παραγωγίζουμε την $\mathbf{X}_P = \epsilon R \hat{\mathbf{z}} - R \hat{\mathbf{z}}$ και έχουμε

$$\frac{d\mathbf{X}_P}{dt} = \frac{d(\epsilon R \hat{\mathbf{z}} - R \hat{\mathbf{z}})}{dt} = \epsilon R \dot{\hat{\mathbf{z}}} = \epsilon R \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{z}}, \quad (139)$$

διότι είναι $\dot{\hat{\mathbf{z}}} = 0$, $\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{z}}$, και λόγω σφαιρικότητας της επιφάνειας επαφής το R και το ϵ είναι σταθερά, Όμως η στροφορμή μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} + (I_3 - I)\omega_3 \hat{\mathbf{z}},$$

⁶⁶Moffatt, H. K., Shimomura, Y. & Branicki, M: Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface. I. Stability and the gyroscopic approximation, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 2004, **460**, 3643-3672, doi: 10.1098/rspa.2004.1329.

και τότε η (139) παίρνει τη μορφή

$$\frac{d\mathbf{X}_P}{dt} = \frac{\epsilon R}{I} \mathbf{L} \times \hat{\mathbf{z}},$$

που συνεπάγεται ότι η $d\mathbf{X}_P/dt$ είναι κάθετος στην \mathbf{L} και επομένως ισχύει η (138). Η καθετότητα της \mathbf{L} με την $d\mathbf{X}_P/dt$ δεν θα ίσχυε αν η επιφάνεια επαφής με το επίπεδο δεν ήταν σφαιρική.

Έτσι ο συνδυασμός των (137) και (138) συνεπάγεται τη διατήρηση της ποσότητας $-\mathbf{L} \cdot \mathbf{X}_P = R(L_z - \epsilon L_3)$, συνεπώς της $L_z - \epsilon L_3$, παρότι η καθεμία εξ αυτών, L_z, L_3 , δεν διατηρείται.

^a Προσέξτε ότι $d\mathbf{X}_P/dt \neq \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{X}_P$, διότι το σημείο επαφής δεν είναι κάθε στιγμή το ίδιο σημείο του στερεού, αλλά το διαδέχεται κάποιο άλλο σημείο. Αν ίσχυε αυτή η σχέση, τότε το μήκος του \mathbf{X}_P θα ήταν σταθερό κάτι που δεν συμβαίνει γενικά (βλ. Σχ. 44). Στον υπολογισμό του \mathbf{X}_P πρέπει να ληφθεί και η αλλαγή του μήκους του που επιτυγχάνεται με το να γραφεί αναλυτικά το διάνυσμα \mathbf{X}_P και έπειτα να παραγωγισθεί.

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια τι συμβαίνει με την ενέργεια του *tippe top*, καθώς αυτό ολισθαίνει στο έδαφος στροιοφυρίζοντας. Ορίζουμε την ποσότητα

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{U}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} + mg \mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{z}}, \quad (140)$$

όπου \mathbf{X} η θέση του ΚΜ ως προς τον αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Επειδή είναι (βλ. Άσκηση 13)

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{U}_P \leq 0,$$

η ολική ενέργεια του στερεού μειώνεται, όταν η δύναμη που ασκείται (η τριβή) είναι αντίθετη στην ταχύτητα του σώματος στο σημείο επαφής.

Καθώς δρουν οι τριβές και η ενέργεια μειώνεται, το *tippe top* καταλήγει στο χαμηλότερο επίπεδο ενέργειας που επιτρέπεται δεδομένου ότι συγχρόνως διατηρείται το αναλλοίωτο *Jellet*. Το ερώτημα, λοιπόν, είναι ποιό είναι το τελικό αυτό επίπεδο.

Άσκηση 13

Δείξτε ότι

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{U}_P \leq 0.$$

Απάντηση: Εξετάζουμε πρώτα τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του ΚΜ και της δυναμικής ενέργειας

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{U}^2 + mg \mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{z}} \right) = \mathbf{U} \cdot (F_R \hat{\mathbf{z}} - mg \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{T}) + mg \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{U} \cdot (F_R \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{T}), \quad (141)$$

σύμφωνα με την (132). Εξετάζουμε τώρα τον ρυθμό μεταβολής της περιστροφικής ενέργειας

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} \right) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{L} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}},$$

διότι λόγω της συμμετρικότητας του \mathbb{I} και της χρονοανεξαρτησίας του \mathbb{I} στο σύστημα $O123$ έχουμε

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{L} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbb{I} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}}.$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} \right) &= \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{X}_P \times (F_R \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{T})) \\ &= (F_R \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{T}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{X}_P) \\ &= (F_R \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{T}) \cdot (\mathbf{U}_P - \mathbf{U}). \end{aligned} \quad (142)$$

Προσθέτοντας τις (141) και (142) έχουμε, και με δεδομένο ότι $\mathbf{U}_P \cdot \hat{\mathbf{z}} = W_P = 0$ ότι

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{U}_P.$$

Επομένως για να έχουμε ανάλωση ενέργειας απαιτείται η δύναμη της τριβής να αντιτίθεται στην ταχύτητα και να είναι $\mathbf{T} \cdot \mathbf{U}_P \leq 0$. Στην ανάλωση δεν έχει συμπεριληφθεί η τριβή κύλισης, η οποία θα εμφανιζόταν ως ανασχετική ροπή στην περιστροφική εξίσωση του στερεού.

Πλαίσιο 2: Εύρεση ακροτάτου με πολλαπλασιαστές Lagrange

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τα ακρότατα σημεία της συνάρτησης $f(x, y)$ στο επίπεδο, με δεδομένο ότι τα x, y ικανοποιούν το δεσμό $h(x, y) = 0$.

Απάντηση: Τα ακρότατα της $f(x, y)$ προσδιορίζονται από τη συνθήκη ότι οι πρώτης τάξης μεταβολές στο ακρότατο σημείο μηδενίζονται. Επομένως αν (x^*, y^*) είναι ακρότατο σημείο πρέπει να ισχύει

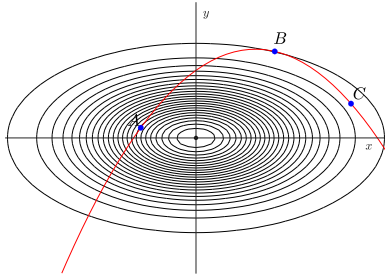
$$0 = df = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} dx + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} dy, \quad (143)$$

όπου dx, dy διαφορικές μετατοπίσεις από το ακρότατο. Αν οι μετατοπίσεις δεν υπόκεινται σε καμία δέσμευση και τα dx, dy μπορούν να λάβουν οποιοσδήποτε τιμές, η (143) ικανοποιείται μόνο αν στο ακρότατο ισχύει η γνώριμη συνθήκη:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} = 0. \quad (144)$$

Αν όμως τα (x, y) δεσμεύονται να ικανοποιούν την $h(x, y) = 0$, αφενός τα σημεία (x^*, y^*) που ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις ενδέχεται να μην ικανοποιούν τη συνθήκη $h(x^*, y^*) = 0$ και αφετέρου τα dx και dy παύουν να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, οπότε το dy σε κάποιο σημείο, θα είναι

κάποιο πολλαπλάσιο του dx , σχετικό με την κλίση της καμπύλης $y(x)$ που απορρέει από τη συνθήκη $h(x, y(x)) = 0$. Έτσι ο μηδενισμός της df απαιτεί να μηδενίζεται ο γραμμικός συνδυασμός $\partial f/\partial x + \partial f/\partial y (dy/dx)$ με όλες τις παραγώγους υπολογισμένες σε κάποιο σημείο (x_0, y_0) που ικανοποιούν τη σχέση $h(x_0, y_0) = 0$.



Σχήμα 45: Στο διάγραμμα φαίνονται οι ισοϋψείς της συνάρτησης $f(x, y) = \exp(-x^2 - 2y^2)$ και με κόκκινο τα σημεία του επιπέδου που ικανοποιούν την $h(x, y) = y - (x + 1 - 0.8x^2) = 0$. Ενώ η $f(x, y)$ έχει μόνο ένα ακρότατο το $(0, 0)$ που είναι μέγιστο, η $f(x, y)$, όταν τα (x, y) δεσμεύονται να ικανοποιούν την $h(x, y) = 0$, έχει τρία ακρότατα: στο σημείο $A : (-0.58, 0.15)$, που σημειώνεται με μπλε τελεία και είναι μέγιστο, το $B : (0.83, 1.28)$, που είναι ελάχιστο και το $C : (1.63, 0.51)$ που είναι σημείο καμπής.

$h(x, y) = 0$ και να προσδιορίσουμε το ακρότατο της $f(x, y(x))$ συναρτήσει του x . Δεδομένου ότι το x δεν υπόκειται σε κανένα περιορισμό, κάθε ακρότατο σημείο x ικανοποιεί τη σχέση $df(x, y(x))/dx = 0$.

Υπάρχει όμως ένας πιο γόνιμος και ενδιαφέρον τρόπος να προσδιορισθούν τα υπό συνθήκες ακρότατα που εισήγαγε ο Lagrange στο έργο *Mécanique Analytique*^{α'} για να προσδιορίσει τις γενικές συνθήκες ισορροπίας ενός σώματος του οποίου η κίνηση είναι δεσμευμένη. Η ευφυής ιδέα του Lagrange είναι η ακόλουθη: ορίζουμε, στη θέση της $f(x, y)$, μία νέα συνάρτηση $F(x, y, \lambda)$ η οποία εξαρτάται από τις αρχικές μεταβλητές x, y αλλά και από μία νέα μεταβλητή λ η οποία αποκαλείται *πολλαπλασιαστής Lagrange*. Η συνάρτηση αυτή των τριών πλέον μεταβλητών επιλέγεται να είναι η:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda h(x, y) . \quad (145)$$

Στη συνάρτηση $F(x, y, \lambda)$ δεν επιβάλλεται κανένας περιορισμός και τα x, y , και λ μπορούν να μεταβληθούν ανεξάρτητα, επομένως τα ακρότατα x, y και λ της $F(x, y, \lambda)$, ικανοποιούν το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x} , \\ 0 &= \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial h}{\partial y} , \\ 0 &= \frac{\partial F}{\partial \lambda} = h(x, y) . \end{aligned}$$

Έτσι, για παράδειγμα, το μέγιστο της συνάρτησης $f(x, y) = \exp(-x^2 - 2y^2)$ (βλ. Σχ. 45) είναι στο σημείο $(0, 0)$, όπου εκεί μηδενίζονται και οι δύο μερικές παράγωγοι της f . Αν όμως αναζητήσουμε το μέγιστο της $f(x, y)$ επί της $h(x, y) = y - (x + 1 - 0.8x^2) = 0$, τότε φαίνεται από τις ισοϋψείς στο Σχ. 45 ότι το μέγιστο πραγματοποιείται περί το σημείο $A : (-0.58, 0.15)$, που είναι σημειωμένο με μπλε τελεία στο Σχ. 45, ενώ υπάρχουν και άλλα δύο ακρότατα: το B που είναι ελάχιστο και το C που είναι σημείο καμπής. Είναι εμφανές ότι στα σημεία A, B, C δεν μηδενίζεται καμία από τις μερικές παραγώγους της f , αλλά είναι σημεία στα οποία η ∇f (κάθετη στις ισοϋψείς) και η ∇h (κάθετη στην καμπύλη του δεσμού) είναι τοπικά παράλληλες, οπότε επί της $h(x, y) = 0$ δεν μεταβάλλεται σε πρώτη τάξη η $f(x, y)$. Επομένως τα σημεία αυτά είναι ακρότατα της $f(x, y)$ όταν ισχύει η δέσμευση $h(x, y) = 0$.

Πώς μπορούμε να βρούμε όμως αναλυτικά το ακρότατο της $f(x, y)$ στην περίπτωση μιας δέσμευσης $h(x, y) = 0$; Ένας τρόπος είναι να εκφράσουμε το y συναρτήσει του x από την

Οι τρεις αυτές εξισώσεις μπορούν να λυθούν και να προσδιορίσουν το ακρότατο (x_0, y_0, λ_0) της $F(x, y, \lambda)$. Η τρίτη εξίσωση επιβάλλει ότι είναι $F(x_0, y_0, \lambda_0) = f(x_0, y_0)$, στο υπό αναζήτηση σημείο και οι πρώτες δύο ότι το (x_0, y_0) είναι το ακρότατο της $f(x, y)$ υπό την προϋπόθεση ότι ικανοποιείται η $h(x_0, y_0) = 0$, αφού στο ακρότατο η ∇f είναι παράλληλη στην ∇h .

Η μέθοδος γενικεύεται: Τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x_1, \dots, x_n)$ υπό τις $k < n$ δεσμεύσεις $h_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, με $i = \{1, \dots, k\}$, προσδιορίζονται από τα ακρότατα της νέας συνάρτησης

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^k \lambda_i h_i(x_1, \dots, x_n).$$

^αΗ *Mécanique Analytique* (1788) του Lagrange δεν έχει, ούτε ένα σχήμα. Υπό αυτή την έννοια είναι ο αντίποδας της *Principia* του Νεύτωνα. Στην εισαγωγή του βιβλίου ο Lagrange γράφει «είναι σημαντικό να μπορέσουμε να αντιμετωπίσουμε τα θέματα της Μηχανικής με καθαρά αναλυτικά μέσα και να απελευθερώσουμε τη Μηχανική από διαισθητικές γεωμετρικές μεθόδους». Αναφέρονται ήδη οι τάσεις των Γάλλων μαθηματικών της ομάδας Bourbaki, οι οποίοι προσπάθησαν να παρουσιάσουν τα μαθηματικά αφαιρώντας κάθε διαισθητικό στοιχείο (με μόνη εξαίρεση την παρουσίαση της θεωρίας των ομάδων Lie που γράφτηκε από τον Armand Borel [1923-2003], στην οποία γίνεται εκτενής χρήση σχημάτων και διαγραμμάτων).

Για να το απαντήσουμε, πρέπει να προσδιορίσουμε τα στάσιμα σημεία της E , υπό τον περιορισμό ότι το J είναι σταθερό. Αυτό επιτυγχάνεται, ως συνήθως, προσδιορίζοντας τα ακρότατα της συνάρτησης με πολλαπλασιαστή Lagrange, λ (βλ. Πλαίσιο 2):

$$\begin{aligned} F(\mathbf{U}, \dot{\theta}, \Omega, \dot{\psi}, \theta, \lambda) &= E(\mathbf{U}, \dot{\theta}, \Omega, \dot{\psi}, \theta) + \lambda[(L_z - \epsilon L_3) - J] \\ &= \frac{m}{2} \mathbf{U}^2 + \frac{I}{2}(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \Omega \cos \theta)^2 + mgR(1 - \epsilon \cos \theta) \\ &\quad + \lambda[I\Omega \sin^2 \theta + I_3(\dot{\psi} + \Omega \cos \theta)(\cos \theta - \epsilon) - J]. \end{aligned} \quad (146)$$

ως προς τις μεταβλητές $\mathbf{U}, \dot{\theta}, \Omega, \dot{\psi}, \theta$ και λ . Καταλήξαμε στη μορφή αυτή διότι η στροφορμή ως προς το ΚΜ είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= -I\Omega \sin \theta \hat{\mathbf{1}} + I\dot{\theta} \hat{\mathbf{2}} + I_3 \omega_3 \hat{\mathbf{3}} \\ &= -I\Omega \sin \theta (\cos \theta \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}}) + I\dot{\theta} \hat{\mathbf{y}} + I_3 \omega_3 (\sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}) \\ &= (I_3 \omega_3 \sin \theta - I\Omega \sin \theta \cos \theta) \hat{\mathbf{x}} + I\dot{\theta} \hat{\mathbf{y}} + (I\Omega \sin^2 \theta + I_3 \omega_3 \cos \theta) \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned}$$

και επομένως οι στροφορμές που υπεισέρχονται στο αναλλοίωτο του Jellet είναι

$$L_z = (I\Omega \sin^2 \theta + I_3 \omega_3 \cos \theta), \quad L_3 = I_3 \omega_3.$$

Επειδή δεν υπεισέρχονται οι μεταβλητές $\mathbf{U}, \dot{\theta}$ στο αναλλοίωτο Jellet, η στασιμοποίηση της ενέργειας ως προς αυτές τις μεταβλητές δεν υπόκειται σε περιορισμούς. Επομένως όταν η ενέργεια είναι ακρότατη το ΚΜ είναι ακίνητο, $\mathbf{U} = 0$ και η κλίση του, θ , σταθερή ($\dot{\theta} = 0$). Στασιμοποίηση ως προς Ω και $\dot{\psi}$ (βλ. Άσκηση 14) με ταυτόχρονο «κλείδωμα» των μεταβλητών από

τη στασιμοποίηση ως προς λ :

$$I\Omega \sin^2 \theta + I_3(\dot{\psi} + \Omega \cos \theta)(\cos \theta - \epsilon) = J ,$$

οδηγεί μετά από πράξεις στη συνθήκη $\theta = 0, \pi$ ή

$$\dot{\psi} + \epsilon\Omega = 0 ,$$

που σημαίνει ότι η ταχύτητα στο σημείο επαφής στην κατάσταση στασιμοποίησης είναι μηδενική, διότι η ταχύτητα στο σημείο επαφής με $\mathbf{U} = 0$ και $\dot{\theta} = 0$ είναι:

$$\mathbf{U}_P = \mathcal{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{X}_P = (\Omega \hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{2}} + \dot{\psi} \hat{\mathbf{3}}) \times (\epsilon R \hat{\mathbf{3}} - R \hat{\mathbf{z}}) = R \sin \theta (\dot{\psi} + \epsilon\Omega) \hat{\mathbf{2}} = \mathbf{0} . \quad (147)$$

Αυτό σημαίνει ότι πλέον έχει σταματήσει η ολίσθηση του σημείου επαφής και εφεξής η ενέργεια του στερεού διατηρείται. Στην κατάσταση αυτή η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του *tippe top* $\boldsymbol{\omega}$ είναι είτε

$$-\Omega \sin \theta \hat{\mathbf{1}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{2}} + \omega_3 \hat{\mathbf{3}} = \omega_3 \hat{\mathbf{3}} = (\Omega \cos \theta \pm 1 + \dot{\psi}) \hat{\mathbf{3}} = (\pm\Omega + \dot{\psi}) \hat{\mathbf{3}} , \quad (148)$$

αν $\theta = 0$ ή π , είτε

$$-\Omega \sin \theta \hat{\mathbf{1}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{2}} + \omega_3 \hat{\mathbf{3}} = (-\Omega \sin \theta \hat{\mathbf{1}} + \Omega \cos \theta \hat{\mathbf{3}}) + \dot{\psi} \hat{\mathbf{3}} = \Omega(\hat{\mathbf{z}} - \epsilon \hat{\mathbf{3}}) = -\Omega \frac{\mathbf{X}_P}{R} , \quad (149)$$

αν $\dot{\psi} + \epsilon\Omega = 0$. Στην πρώτη περίπτωση αφού $\theta = 0$ ή π οι άξονες $\hat{\mathbf{z}}$ και $\hat{\mathbf{3}}$ είτε συμπίπτουν είτε είναι αντίθετοι, οπότε δεν είναι δυνατόν να διακρίνει κανείς ποιο μέρος της ιδιοπεριστροφής του σώματος ταυτίζεται με την $\dot{\phi} = \Omega$ ή με την $\dot{\psi}$. Η κάθε μία από τις ποσότητες αυτές χάνει τη φυσική της ερμηνεία. Στη δεύτερη περίπτωση ο άξονας περιστροφής του σώματος (η διεύθυνση της $\boldsymbol{\omega}$) συμπίπτει με την \mathbf{X}_P , δηλαδή το σώμα καταλήγει να περιστρέφεται περί τον άξονα που συνδέει το ΚΜ με το σημείο επαφής. Το συμπέρασμα αυτό καλύπτει βέβαια και την πρώτη περίπτωση, αφού σε αυτήν τα P, K και ΚΜ, O , βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο.

Εισάγοντας τις στάσιμες τιμές που βρήκαμε στη δεύτερη περίπτωση⁶⁷ ($\dot{\psi} + \epsilon\Omega = 0$), η στασιμοποιημένη τιμή της ενέργειας (172) ως προς όλες τις μεταβλητές, πλην της γωνίας θ , (βλ. Άσκηση 14) είναι:

$$E_{\min}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{J^2}{I \sin^2 \theta + I_3(\epsilon - \cos \theta)^2} + mgR(1 - \epsilon \cos \theta) . \quad (150)$$

⁶⁷Η πρώτη περίπτωση που αντιστοιχεί σε καθορισμένη τιμή της θ καλύπτεται και αυτή από την έκφραση (150), αλλά, προφανώς, δεν έχει νόημα να ελαχιστοποιηθεί ως προς την θ αφού η γωνία αυτή είναι καθορισμένη.

Άσκηση 14

Δείξτε ότι η εξάρτηση της στάσιμης ενέργειας του *tippetop* από τη γωνία θ , όταν διατηρείται το αναλλοίωτο Jellet, δίνεται από την (150).

Απάντηση: Θέλουμε να προσδιορίσουμε το ακρότατο της συνάρτησης της ενέργειας F υπό τη συνθήκη διατήρησης του αναλλοιώτου Jellett.

$$F(\mathbf{U}, \dot{\theta}, \Omega, \dot{\psi}, \theta, \lambda) = \frac{m}{2} \mathbf{U}^2 + \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \Omega \cos \theta)^2 + mgR(1 - \epsilon \cos \theta) + \lambda [I\Omega \sin^2 \theta + I_3(\dot{\psi} + \Omega \cos \theta)(\cos \theta - \epsilon) - J] .$$

Δεδομένου ότι το αναλλοίωτο Jellet δεν περιλαμβάνει τις μεταβλητές \mathbf{U} και $\dot{\theta}$ η συνθήκη στασιμοποίησης $\partial F / \partial \mathbf{U} = \mathbf{0}$ και $\partial F / \partial \dot{\theta} = 0$ οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ενέργεια στασιμοποιείται όταν το ΚΜ του στερεού είναι ακίνητο, $\mathbf{U} = \mathbf{0}$, και η γωνία θ σταθερή, $\dot{\theta} = 0$. Η στασιμοποίηση αυτή προκύπτει σταδιακά καθώς το *tippetop* χάνει ενέργεια ολισθαίνοντας στο δάπεδο και δεχόμενο ροπή από την τριβή ολίσθησης εκτός από αυτήν του βάρους του και της αντίδρασης του δαπέδου. Καθόλη αυτή τη διαδικασία ούτε η ενέργεια, ούτε η στροφορμή, ούτε οι συνιστώσες της στροφορμής L_z, L_3 διατηρούνται. Διατηρείται όμως το αναλλοίωτο Jellett, J που δίνεται από έναν συγκεκριμένο συνδυασμό των L_z, L_3 . Αυτός είναι και ο λόγος που στην F εισήχθηκε μέσω πολλαπλασιαστή Lagrange αυτή η ποσότητα.

Η συνθήκη στασιμότητας της F ως προς Ω και $\dot{\psi}$ καταλήγει σε ένα επιπλέον «κλειδίωμα» μεταξύ των εξελισσόμενων γωνιακών ταχυτήτων:

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega} = L_z + \lambda [I \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta (\cos \theta - \epsilon)] = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{\psi}} = L_3 + \lambda I_3 (\cos \theta - \epsilon) = 0$$

συνεπάγεται την

$$\frac{L_z \sin \theta}{L_3} = \frac{I \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta (\cos \theta - \epsilon)}{I_3 (\cos \theta - \epsilon)} ,$$

δηλαδή

$$\frac{I\Omega \sin^2 \theta + I_3(\dot{\psi} + \Omega \cos \theta) \cos \theta}{I_3(\dot{\psi} + \Omega \cos \theta)} = \frac{I \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta (\cos \theta - \epsilon)}{I_3 (\cos \theta - \epsilon)} .$$

Με απλές πράξεις οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι στην κατάσταση στασιμοποίησης της ενέργειας είτε $\theta = 0$, ή π , είτε οι γωνιακές ταχύτητες $\dot{\psi}$ και Ω συνδέονται με τη σχέση:

$$\dot{\psi} + \epsilon \Omega = 0 ,$$

που σημαίνει, όπως δείξαμε στην (147), ότι το σημείο επαφής είναι ακίνητο και έχει σταματήσει η ολίσθηση. Το ίδιο όμως ισχύει και αν $\theta = 0$ ή π (βλ. τον σχολιασμό μετά την (149)). Εισάγοντας στη θέση του Ω την τιμή $-\dot{\psi}/\epsilon$, το αναλλοίωτο Jellet παίρνει τη μορφή:

$$J = -\frac{\dot{\psi}}{\epsilon} [I \sin^2 \theta + I_3 (\epsilon - \cos \theta)^2] ,$$

και τότε η στασιμοποιημένη ενέργεια ως προς τις μεταβλητές \mathbf{U} , $\dot{\theta}$, Ω , $\dot{\psi}$ και λ δίνεται από την ακόλουθη συνάρτηση της θ :

$$\begin{aligned} E_{\min}(\theta) &= \frac{I}{2}\Omega^2 \sin^2 \theta + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \Omega \cos \theta)^2 + mgR(1 - \epsilon \cos \theta) \\ &= \frac{\dot{\psi}^2}{2\epsilon^2} [I \sin^2 \theta + I_3(\epsilon - \cos \theta)^2] + mgR(1 - \epsilon \cos \theta) \\ &= \frac{J^2}{2 [I \sin^2 \theta + I_3(\epsilon - \cos \theta)^2]} + mgR(1 - \epsilon \cos \theta). \end{aligned}$$

Το σύστημα θα καταλήξει στη γωνία θ που αντιστοιχεί στο ελάχιστο της $E_{\min}(\theta)$ που προσδιορίζεται αμέσως από την (150) αν δοθούν οι παράμετρος J , I , I_3 , m , g , R και ϵ . Σε κάθε περίπτωση, το σώμα θα καταλήξει σε κατάσταση σταθερής ενέργειας με το κέντρο μάζας ακίνητο, κλίση θ_0 σταθερή και ταχύτητα στο σημείο επαφής μηδενική, που σημαίνει ότι είτε αυτό θα περιστρέφεται περί το σημείο επαφής με τον άξονα συμμετρίας κατακόρυφο ($\theta_0 = 0$ ή π) ή αν $0 < \theta_0 < \pi$ το tippe top θα κυλιέται με το ΚΜ ακίνητο και το σημείο επαφής να διαγράφει μια κυκλική τροχιά (το διάνυσμα \mathbf{X}_P θα διαγράφει έναν κώνο με σταθερή κορυφή).

Αν το σώμα περιστρέφεται αρχικά με μεγάλη γωνιακή ταχύτητα ώστε η δυναμική του ενέργεια να είναι συγκριτικά αμελητέα, ώστε να αγνοήσουμε τον όρο της δυναμικής ενέργειας, μπορούμε εύκολα να χαρακτηρίσουμε τα ελάχιστα της (150):⁶⁸

- (α) Παρατηρούμε ότι στην ανάστροφη κατάσταση ($\theta = \pi$) το tippe top έχει χαμηλότερη ενέργεια από την αρχική του κατάσταση $\theta = 0$:

$$E_{\min}(0) = \frac{J^2}{2I_3(\epsilon - 1)^2} \geq \frac{J^2}{2I_3(\epsilon + 1)^2} = E_{\min}(\pi).$$

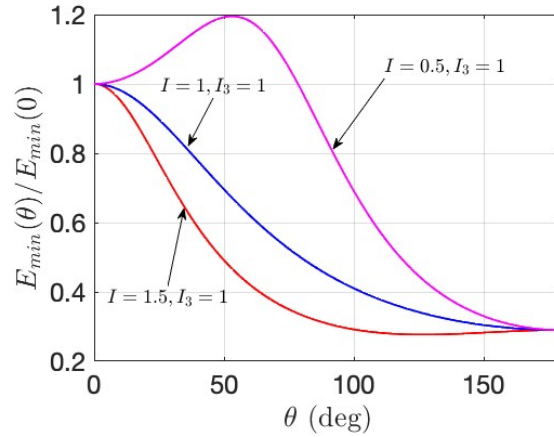
- (β) Η $E_{\min}(\theta)$ είναι ακρότατη όταν

$$\frac{dE_{\min}(\theta)}{d\theta} = -J^2 \sin \theta \frac{I \cos \theta + I_3(\epsilon - \cos \theta)}{(I \sin^2 \theta + I_3(\epsilon - \cos \theta)^2)^2} = 0,$$

δηλαδή όταν είναι $\theta = 0, \pi$ καθώς και στη ενδιάμεση γωνία

$$\cos \theta_m = \frac{\epsilon I_3}{I_3 - I}, \quad (151)$$

⁶⁸Προσέξτε ότι η σχέση αυτή που δίνει την στασιμοποιημένη ενέργεια δεν είναι κάποια σταθερή ενέργεια του συστήματος και δεν ισούται αρχικά με την ενέργεια του tippe top όταν το θέτουμε σε περιστροφή και το αφήνουμε στο δάπεδο. Είναι η ενέργεια που θα αποκτήσει το σώμα αφότου περάσει μια μεταβατική περίοδος ώστε να σταματήσει η σβούρα να «τρέχει» στο δάπεδο και να σταθεροποιηθεί η κλίση της θ πετυχαίνοντας εκμηδενισμό της ολίσθησης. Στη συνέχεια η σβούρα θα ακολουθήσει μια αργή ανύψωση μέχρις ότου να καταλήξει είτε να στριφογυρίζει ανεστραμμένη, είτε να κυλιέται στο δάπεδο κρατώντας ακίνητο το ΚΜ της, είτε να επανέλθει στην θέση με το ΚΜ της στη χαμηλότερη θέση.

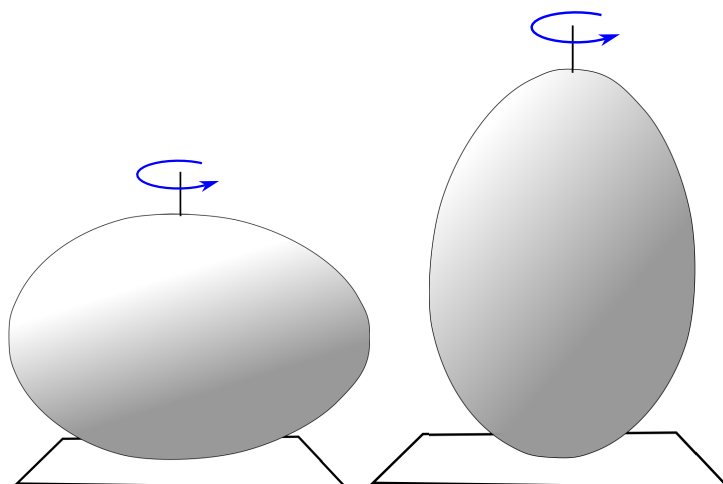


Σχήμα 46: Η ελάχιστη ενέργεια ενός τίρρε top συναρτήσει της κλίσης θ για $\epsilon = 0.3$ και $I_3 = 1$ και υπό την προϋπόθεση ότι η αρχική δυναμική ενέργεια σε σχέση με την αρχική ενέργεια που σχετίζεται με το αναλλοίωτο Jellett είναι αμελητέα ($mgR(1 - \epsilon) \ll J^2/(2I_3) = (1/2)I_3\omega_3^2(0)$ θεωρώντας ότι αρχικά θέτουμε το τίρρε top σε γρήγορη περιστροφική κίνηση γύρω από τον άξονα z). Το τίρρε top θα καταλήξει, καθώς αναλώνεται η ενέργειά του από την τριβή ολίσθησης, στο χαμηλότερο ενεργειακό επίπεδο. Αν $I_3(1 - \epsilon) < I < I_3(1 + \epsilon)$, όπως στη μπλε καμπύλη, η ελάχιστη ενεργεια επιτυγχάνεται όταν $\theta = \pi$ και τότε το τίρρε top καταλήγει ανεστραμμένο. Αν $I > I_3(1 - \epsilon)$, όπως στην κόκκινη καμπύλη, το ελάχιστο της ενέργειας επιτυγχάνεται σε μία ενδιάμεση γωνία $\pi/2 < \theta_m < \pi$ και το τίρρε top καταλήγει να κυλιέται με αυτή την κλίση με το ΚΜ ακίνητο και το σημείο επαφής να διαγράφει κύκλο. Τέλος αν $I < I_3(1 + \epsilon)$, μωβ καμπύλη, το ακρότατο $0 < \theta_m < \pi/2$ είναι μέγιστο και εμφανίζονται δύο ελάχιστα, στο $\theta = 0$ και $\theta = \pi$, και το τίρρε top θα καταλήξει σε ορθή ή ανεστραμμένη κατακόρυφη θέση ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες.

εφόσον υπάρχει τέτοια, δηλαδή αν

$$\left| \frac{\epsilon I_3}{I_3 - I} \right| < 1,$$

που είναι ισοδύναμη με την $I < I_3(1 - \epsilon)$ ή $I > I_3(1 + \epsilon)$ (υποθέτουμε $\epsilon < 1$). Αν $I_3(1 - \epsilon) < I < I_3(1 + \epsilon)$, όπως στη μπλε καμπύλη του Σχ. 46, η ελάχιστη ενεργεια επιτυγχάνεται μόνο όταν $\theta = \pi$ και το τίρρε top απλώς αναστρέφεται. Αν $I > I_3(1 - \epsilon)$, όπως στην κόκκινη καμπύλη, το ελάχιστο της ενέργειας επιτυγχάνεται σε μια ενδιάμεση γωνία $\pi/2 < \theta_m < \pi$ και το τίρρε top αφού αναστραφεί μερικώς κυλιέται με αυτή την κλίση με το ΚΜ ακίνητο και το σημείο επαφής να διαγράφει κύκλο. Τέλος αν $I < I_3(1 + \epsilon)$, μωβ καμπύλη, το ακρότατο $0 < \theta_m < \pi/2$ είναι μέγιστο και εμφανίζονται δύο ελάχιστα, στο $\theta = 0$ και $\theta = \pi$. Το τίρρε top θα καταλήξει σε ορθή ή ανεστραμμένη κατακόρυφη θέση ανάλογα με την κατάσταση που βρέθηκε όταν σταμάτησε να ολισθαίνει.



Σχήμα 47: Το αβγό ενώ αρχικά τίθεται σε περιστροφή πάνω σε τραπέζι περίπου γύρω από τον άξονα μέγιστης ροπής αδράνειας (αριστερά), ανασηκώνεται και καταλήγει να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα συμμετρίας του αβγού, που είναι ο άξονας με τη μικρότερη ροπή αδράνειας.

17 Αβγό σφικτό ή μελάτο;

Είναι γνωστό ότι αν περιστρέψουμε με αρκετά μεγάλη γωνιακή ταχύτητα ένα αβγό πάνω σε ένα τραπέζι με τον άξονα συμμετρίας του οριζόντιο αυτό θα σηκωθεί όρθιο, αν το αβγό είναι καλά βρασμένο και το εσωτερικό του δεν είναι ρευστό. Το αβγό θα σηκωθεί, όπως και το *tirpe top*, και θα περιστρέφεται τελικά γύρω από τον άξονα συμμετρίας του που έχει και τη χαμηλότερη ροπή αδράνειας. Όμως, το χαμηλότερο ενεργειακό επίπεδο ενός ελεύθερου στερεού σώματος αντιστοιχεί σε περιστροφή γύρω από τον άξονα (ή τους άξονες) μέγιστης ροπής αδράνειας.

Παρότι η δυναμική συμπεριφορά του αβγού είχε αναλυθεί ήδη από το 19ο αιώνα, ενδιαφέρουσες νέες πτυχές της δυναμικής αποκαλύφθηκαν πρόσφατα.⁶⁹ Όπως και στο *tirpe top*, το γεγονός ότι το αβγό δεν καταλήγει στη χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη του αντίστοιχου ελεύθερου περιστρεφόμενου σώματος (αλλά ούτε και στην κατάσταση χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας), σημαίνει ότι κατά την αλληλεπίδραση του αβγού με το δάπεδο διατηρείται κάποια ποσότητα που το εμποδίζει να καταλήξει σε αυτή. Στην περίπτωση του *tirpe top* η ποσότητα η οποία διατηρείται, και λόγω αυτής, η χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη είναι αυτή που προκαλείται από κατακόρυφη περιστροφή με το ΚΜ ανασηκωμένο (υψηλότερη δυναμική ενέργεια), είναι το αναλλοίωτο του Jellett, $J = -\mathbf{X}_P \cdot \mathbf{L}$. Η διατήρηση της J διαφάνηκε από την ανάλυση του προηγούμενου εδαφίου να έχει γεωμετρική προέλευση. Προέκυψε από τη σφαιρικότητα της επιφάνειας επαφής ενός αξονικά συμμετρικού σώματος με το δάπεδο και, προφανώς, δεν

⁶⁹βλ. Moffatt, H.K. & Shimomura, Y., 2002: Spinning eggs-a paradox resolved, *Nature*, **416**, 385-386, Moffatt, H.K., Shimomura, Y., & Branicki, M., 2004: Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface. I. Stability and the gyroscopic approximation, *Proc. Roy. Soc. A*, **460**, 3643-3672, Bou-Rabee, N. M., Marsden, J. E., Romero, L. A., 2005: A geometric treatment of Jellett's egg, *Z. Agnew. Math. Mech.*, **85**, 618-649.

ισχύει όταν το σώμα δεν έχει ακριβώς σφαιρική επιφάνεια επαφής όπως είναι για παράδειγμα ένα αβγό. Όμως η πρόσφατη έρευνα έδειξε ότι ενώ στην περίπτωση του αβγού ή άλλων μη σφαιρικών αξονικά συμμετρικών στερεών με ΚΜ επί του άξονα συμμετρίας του σώματος, η ποσότητα Jellet δεν διατηρείται ακριβώς, η Jellet μεταβάλλεται πολύ αργά σε σχέση με τους χρόνους δυναμικής εξέλιξης του σώματος, υπό την προϋπόθεση ότι το σώμα περιστρέφεται με πολύ μεγάλη γωνιακή ταχύτητα. Η ποσότητα Jellet είναι, όπως αποκαλείται, ένα *αδιαβατικό αναλλοίωτο*. Έτσι η αδιαβατική αναλλοιότητα της ποσότητας Jellet είναι αυτή που δεσμεύει την εξέλιξη της ενέργειας του αβγού με αποτέλεσμα καθώς αυτό χάνει ενέργεια από την τριβή τελικά να ανασηκώνεται όρθιο ανυψώνοντας τη δυναμική του ενέργεια αλλά και διαθέτοντας την υψηλότερη κινητική ενέργεια για δοσμένη στροφορμή.

Το ενδιαφέρον είναι ότι η αδιαβατική αναλλοιότητα της Jellet περιστρεφόμενου σώματος στο δάπεδο υπό την επίδραση τριβών δεν προκύπτει από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σώματος (δηλαδή από το βαθμό σφαιρικότητας του σώματος) αλλά είναι αμιγές επακόλουθο της δυναμικής όλων των αξονικά συμμετρικών σωμάτων όταν αυτά περιστρέφονται με μεγάλη γωνιακή ταχύτητα. Έχουμε ήδη δείξει ότι ένα ελεύθερο αξονικά συμμετρικό σώμα όταν περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα, που δεν είναι κύριος άξονας του σώματος, αυτό εκτελεί μετάπτωση περί το σταθερό διάνυσμα της ολικής στροφορμής του σώματος με γωνιακή ταχύτητα Ω η οποία σχετίζεται με τη γωνιακή ταχύτητα ω_3 περιστροφής του σώματος γύρω από τον άξονα συμμετρίας του μέσω της σχέσης

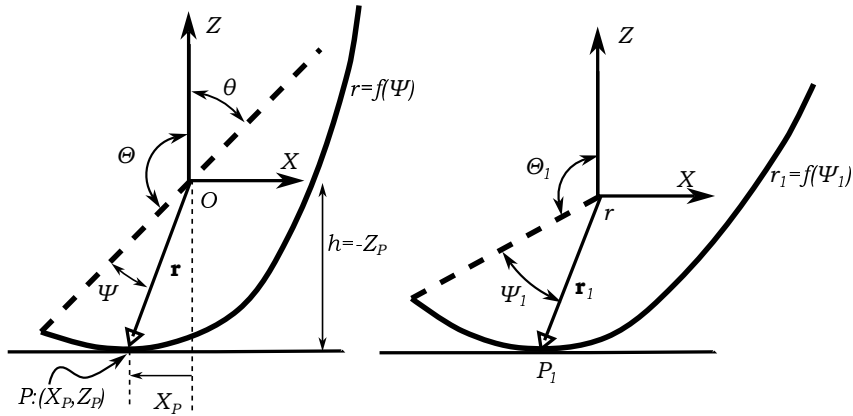
$$I\Omega \cos \theta = I_3\omega_3, \quad (152)$$

όπου θ η σταθερά γωνία μεταξύ της \mathbf{L} και του άξονα συμμετρίας του σώματος. Αν το σώμα τοποθετηθεί στο δάπεδο στο πεδίο βαρύτητας με σχεδόν κατακόρυφη στροφορμή και μεγάλη γωνιακή ταχύτητα, ώστε οι ροπές από την αντίδραση του δαπέδου και τις τριβές να είναι σχετικά αμελητέες, τότε το σώμα θα ικανοποιεί κατά προσέγγιση τη σχέση (152), η οποία αναφέρεται ως γυροσκοπική ισορροπία.⁷¹ Διότι αν αρχικά είναι $\theta \approx \pi/2$ και $\dot{\psi} \approx 0$ (βλ. Σχ. 47 και Σχ. 48), θα είναι $\omega_3 \approx 0$ και η (152) θα ικανοποιείται και θα συνεχίσει να ικανοποιείται εφόσον είναι πολύ μεγάλη η Ω . Θα δείξουμε τότε ότι, στον ίδιο βαθμό προσέγγισης, διατηρείται και η ποσότητα Jellet.

Για να εξετάσουμε τις συνθήκες διατήρησης της Jellet σε ένα μη σφαιρικό αξονικά συμμετρικό σώμα (βλ. Σχ. 48) πρέπει να εξετάσουμε τη χρονική εξέλιξη της ποσότητας $J = -\mathbf{X}_P \cdot \mathbf{L}$. Λαμβάνουμε, ως συνήθως, το καρτεσιανό σύστημα XYZ με αρχή το ΚΜ του σώματος, O , τον άξονα Z κατακόρυφο και τον άξονα X στο επίπεδο $ZO3$, όπου 3 ο άξονας συμμετρίας του σώματος. Το σημείο επαφής έχει συντεταγμένες $(X_P, 0, Z_P)$ και το διάνυσμα $\mathbf{X}_P \equiv \vec{OP}$ είναι $\mathbf{X}_P = X_P\hat{x} + Z_P\hat{z}$. Αν ο άξονας συμμετρίας σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα Z , το ύψος h του ΚΜ από το δάπεδο προσδιορίζεται από τη γωνία θ και είναι $Z_P = -h(\theta)$. Επιπλέον αποδεικνύεται (βλ. Θεώρημα 1) ότι η οριζόντια συντεταγμένη του σημείου επαφής ικανοποιεί την

⁷⁰Βλ. (121).

⁷¹Moffatt, H.K. & Shimomura, Y., 2002: Spinning eggs-a paradox resolved. *Nature*, **416**, 385-386.



Σχήμα 48: Δύο θέσεις ενός επιμήκους αξονικά συμμετρικού σώματος. Η διακεκομμένη γραμμή αντιπροσωπεύει τον άξονα συμμετρίας του σώματος, ο οποίος σχηματίζει γωνία Θ με την κατακόρυφο. Όσο ο άξονας συμμετρίας του σώματος γίνεται πιο οριζόντιος και η γωνία Θ μειώνεται (δεξιά σχήμα) το ύψος h του σημείου O του άξονα συμμετρίας από το δάπεδο μειώνεται και αυτό. Αποδεικνύουμε (βλ. Άσκηση 15) ότι η οριζόντια συντεταγμένη του σημείου επαφής P του σώματος με το δάπεδο, ως προς το καρτεσιανό σύστημα XYZ με κέντρο το O , ικανοποιεί τη σχέση $X_P = dh/d\theta$ όπου $\theta = \pi - \Theta$, η παραπληρωματική γωνία της Θ .

ενδιαφέρουσα σχέση:

$$X_P = \frac{dh}{d\theta} . \quad (153)$$

Το σώμα περιστρέφεται σε ένα οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση της βαρύτητας και των δυνάμεων τριβής. Χρησιμοποιώντας τα ίδια συστήματα αναφοράς που χρησιμοποιήσαμε στην ανάλυση της δυναμικής του *tippe top* η στροφορμή του σώματος διέπεται από την εξίσωση⁷² (134):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{X}_P \times (F_R \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{T}) , \quad (154)$$

ενώ η στροφορμή αναλύεται ως:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= -I\Omega \sin \theta \hat{\mathbf{1}} + I\dot{\theta} \hat{\mathbf{2}} + I_3\omega_3 \hat{\mathbf{3}} \\ &= (-I\Omega \sin \theta \cos \theta + I_3\omega_3 \sin \theta) \hat{\mathbf{x}} + I\dot{\theta} \hat{\mathbf{y}} + (I\Omega \sin^2 \theta + I_3\omega_3 \cos \theta) \hat{\mathbf{z}} , \end{aligned} \quad (155)$$

και η χρονική παράγωγος του \mathbf{X}_P είναι

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}_P}{dt} &= \frac{d}{dt} [h'(\theta) \hat{\mathbf{x}} - h(\theta) \hat{\mathbf{z}}] \\ &= h''\dot{\theta} \hat{\mathbf{x}} + h' \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} - h'\dot{\theta} \hat{\mathbf{z}} \\ &= h''\dot{\theta} \hat{\mathbf{x}} + h'\Omega \hat{\mathbf{y}} - h'\dot{\theta} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

⁷²Το βάρος έχει μηδενική ροπή ως προς το ΚΜ.

(οι τόνοι ' συμβολίζουν παραγώγιση ως προς θ). Επομένως επειδή και πάλι είναι $\mathbf{X}_P \cdot d\mathbf{L}/dt = 0$ (βλ. (154)) η χρονική παράγωγος της $J = -\mathbf{X}_P \cdot \mathbf{L}$ είναι:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= -\mathbf{L} \cdot \frac{d\mathbf{X}_P}{dt} \stackrel{\text{πράξεις}}{=} \dots \\ &= (I\Omega \cos \theta - I_3\omega_3)h'^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin \theta}{h'} \right). \end{aligned} \quad (156)$$

Από την (156) συμπεραίνουμε αμέσως ότι η J διατηρείται ακριβώς, είτε όταν βρισκόμαστε σε γυροσκοπική ισορροπία, δηλαδή όταν $I\Omega \cos \theta - I_3\omega_3 = 0$, είτε αν η γεωμετρία του σώματος είναι τέτοια ώστε να είναι $d/dt(\sin \theta/h') = 0$, δηλαδή αν είναι $h' = A \sin \theta$, με A κάποια σταθερά. Η δεύτερη αυτή γεωμετρική συνθήκη απαιτεί το ύψος του ΚΜ να ικανοποιεί τη σχέση $h(\theta) = B - A \cos \theta$ δηλαδή επιβάλλει η επιφάνεια επαφής να είναι σφαιρική με ακτίνα B και το ΚΜ του σώματος να απέχει τη σταθερή απόσταση A από το κέντρο καμπυλότητας, όπως ακριβώς ισχύει στο tippe-top.

Θεώρημα 1

Δείξτε ότι ισχύει η γεωμετρική σχέση $X_P = dh/d\theta$ σε ένα αξονικά συμμετρικό σώμα (βλ. Σχ. 48).

Απόδειξη: Έστω ένα αξονικά συμμετρικό σώμα, η επιφάνεια του οποίου αναπαριστάνεται στο σχήμα 48 με την καμπύλη γραμμή σε δύο διαφορετικές θέσεις κλίσεις) του σώματος πάνω στο οριζόντιο επαπτόμενο επίπεδο. Έστω ότι η καμπύλη γραμμή της επιφάνειας περιγράφεται από την πολική εξίσωση $r = f(\Psi)$, όπου Ψ η γωνία όπως αυτή μετράται από τον άξονα συμμετρίας του σώματος (διακεκομμένη γραμμή). Καθώς το σώμα αλλάζει θέση, παραμένοντας επαπτόμενο στο δάπεδο αλλάζει η κλίση του άξονα συμμετρίας Θ ως προς την κατακόρυφο ($\Theta \rightarrow \Theta_1$), αλλάζει το σημείο επαφής P ($P \rightarrow P_1$) και επομένως αλλάζει και η γωνία Ψ ($\Psi \rightarrow \Psi_1$) και η απόσταση r_P ($\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_1$) του P από το σημείο αναφοράς O (το οποίο μπορεί να ληφθεί ως το ΚΜ του σώματος). Προφανώς όλες αυτές οι μεταβλητές αλληλοεξαρτώνται, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα πάντα είναι συνάρτηση της γωνίας κλίσης Θ , δηλαδή είναι $\Psi(\Theta)$, $r_P = f(\Psi(\Theta))$ και επίσης οι συντεταγμένες ($X_P, 0, Z_P$) του σημείου επαφής P ως προς το καρτεσιανό σύστημα XYZ με κέντρο το O είναι και αυτές συνάρτησεις της γωνίας Θ . Αν $h(\Theta)$ είναι το ύψος του O από το δάπεδο θα είναι $Z_P = -h(\Theta)$ και θα αποδείξουμε ότι είναι $X_P = -dh/d\Theta = dh/d\theta$, όπου $\theta = \pi - \Theta$ η παραπληρωματική γωνία της Θ .

Το δάπεδο όντας επαπτόμενο στο σώμα, θα πρέπει να είναι κάθετο στο $\nabla(r - f(\Psi))|_P$ και επομένως η βαθμίδα αυτή θα πρέπει να είναι αμιγώς κατακόρυφη. Είναι:

$$\nabla(r - f(\Psi))|_P = \hat{\mathbf{r}}_P - \frac{\hat{\Psi}_P}{r_P} \frac{df}{d\Psi} \Big|_P = \hat{\mathbf{r}}_P - \hat{\Psi}_P \frac{f'}{f} \Big|_P, \quad (157)$$

έχοντας χρησιμοποιήσει τη συντόμευση « $\cdot \equiv d/d\Psi$ » και ότι στην επιφάνεια του σώματος είναι $r = f(\Psi)$.

Ας αναλύσουμε στη συνέχεια τα παραπάνω διανύσματα $\hat{\mathbf{r}}_P$, $\hat{\Psi}_P$ που σχετίζονται με το σημείο επαφής και στρέφονται καθώς αλλάζει κλίση το σώμα και μετακινείται το σημείο επαφής, στη βάση

των σταθερών \hat{x}, \hat{z} :

$$\hat{r} = -\hat{x} \sin(\Theta + \Psi) + \hat{z} \cos(\Theta + \Psi), \quad \hat{\Psi} = -\hat{x} \cos(\Theta + \Psi) - \hat{z} \sin(\Theta + \Psi), \quad (158)$$

όπου όλες οι γωνίες θεωρούμε ότι μεγαλώνουν στρεφόμενες αντιωρολογιακά. Αντικαθιστώντας στην (157) τα στρεφόμενα μοναδιαία διανύσματα βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \nabla(r - f(\Psi)) &= [-\hat{x} \sin(\Theta + \Psi) + \hat{z} \cos(\Theta + \Psi)] - [-\hat{x} \cos(\Theta + \Psi) - \hat{z} \sin(\Theta + \Psi)] (\dot{f}/f) \\ &= \hat{x} \left[-\sin(\Theta + \Psi) + \frac{\dot{f}}{f} \cos(\Theta + \Psi) \right] + \hat{z} \left[\cos(\Theta + \Psi) + \frac{\dot{f}}{f} \sin(\Theta + \Psi) \right]. \end{aligned} \quad (159)$$

Η απαίτηση να είναι αμιγώς κατακόρυφη η παραπάνω βαθμίδα (το εφαπτόμενο επίπεδο να είναι οριζόντιο) στο σημείο επαφής P συνεπάγεται την όμορφη σχέση

$$-\sin(\Theta + \Psi_P) + \cos(\Theta + \Psi_P) \left. \frac{\dot{f}}{f} \right|_P = 0. \quad (160)$$

Η σχέση αυτή κατ' ουσίαν συνδέει μεταξύ τους τις γωνίες Θ και Ψ_P και ταυτόχρονα συσχετίζει την οριζόντια απόσταση του ΚΜ, μ , με την κατακόρυφη απόσταση του ίδιου από το δάπεδο. Από την (160) βρίσκουμε

$$\tan(\Theta + \Psi_P(\Theta)) = \left. \frac{\dot{f}}{f} \right|_P,$$

ενώ οι οριζόντιες και κατακόρυφες αποστάσεις του σημείου επαφής από το O υπολογίζονται από τις προβολές $\mathbf{r}_P \cdot \hat{x}, \mathbf{r}_P \cdot \hat{z}$:

$$X_P = (r_P \hat{\mathbf{r}}_P) \cdot \hat{x} = -f(\Psi_P(\Theta)) \sin(\Theta + \Psi_P(\Theta)), \quad Z_P = (r_P \hat{\mathbf{r}}_P) \cdot \hat{z} = f(\Psi_P(\Theta)) \cos(\Theta + \Psi_P(\Theta)).$$

Παραγωγίζοντας την συνάρτηση του ύψους του από το δάπεδο, $h = -Z_P$, ως προς Θ βρίσκουμε χρησιμοποιώντας την (160)

$$\begin{aligned} \frac{dh}{d\Theta} &= f_P \sin(\Theta + \Psi_P) + \frac{d\Psi_P}{d\Theta} \left[-\dot{f}_P \cos(\Theta + \Psi_P) + f_P \sin(\Theta + \Psi_P) \right] \\ &= f_P \sin(\Theta + \Psi_P) \\ &= -X_P. \end{aligned} \quad (161)$$

0 από (160)

Τέλος, χρησιμοποιώντας την οξεία γωνία $\theta = \pi - \Theta$ ως μετρητή της κλίσης του αντικειμένου βρίσκουμε

$$X_P = \frac{dh}{d\theta}. \quad (162)$$

Δύο παρατηρήσεις ως προς το αποτέλεσμα:

1. Το σημείο δεν οφείλει να είναι το ΚΜ. Οποιοδήποτε σημείο και αν χρησιμοποιούσαμε επί του άξονα συμμετρίας ως σημείο αναφοράς θα οδηγούμασταν στο ίδιο αποτέλεσμα και επομένως η σχέση $X_P = dh/d\theta \equiv h'$ είναι γενική.

2. Ας υποθέσουμε ότι ο άξονας συμμετρίας οδηγεί σε αιχμή στην επιφάνεια του σώματος, όπως συμβαίνει σε μια ιδανική σβούρα που το άκρο της είναι κωνικό. Στην περίπτωση αυτή είναι $h(\theta) = a \cos \theta$, όπου a η απόσταση του σημείου αναφοράς O του άξονα συμμετρίας από τη μύτη P . Όσο λοιπόν το σώμα ακουμπά στην εν λόγω μύτη στο δάπεδο και η παράπλευρη «κοιλιά» του σώματος βρίσκεται ακόμη στον αέρα, η οριζόντια συντεταγμένη X_P του P ως προς το O είναι $X_P = -a \sin \theta = dh/d\theta$.

Έτσι όταν τοποθετούμε στο δάπεδο ένα αξονικά συμμετρικό σώμα (αβγό) που περιστρέφεται με μεγάλη σχεδόν κατακόρυφη γωνιακή ταχύτητα Ω και με τον άξονα συμμετρίας του σώματος σχεδόν οριζόντιο, το σώμα βρίσκεται κατά προσέγγιση σε γυροσκοπική ισορροπία (152) και θα συνεχίσει σε γυροσκοπική ισορροπία εφόσον είναι πολύ μεγάλη η Ω . Ευρισκόμενο σε γυροσκοπική ισορροπία η στροφορμή του σώματος είναι ίση με

$$\mathbf{L} = \sin \theta (-I\Omega \cos \theta + I_3 \omega_3) \hat{\mathbf{x}} + I\dot{\theta} \hat{\mathbf{y}} + \left[I\Omega + (-I\Omega \cos \theta + I_3 \omega_3) \right] \hat{\mathbf{z}} \quad (163)$$

$$\simeq I\dot{\theta} \hat{\mathbf{y}} + I\Omega \hat{\mathbf{z}},$$

(βλ. και (155)). Αρχικά η \mathbf{L} είναι κατακόρυφη, και επομένως η αδιαβατικά διατηρούμενη (λόγω γυροσκοπικής ισορροπίας) ποσότητα Jellet είναι:

$$J = -\mathbf{L} \cdot \mathbf{X}_P = I\Omega h(\theta),$$

ενώ η περιστροφική ενέργεια είναι:

$$E_{\text{περ}} = \frac{1}{2} I\Omega^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \quad (164)$$

$$= \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{J^2}{h^2(\theta)} \left(\frac{\sin^2 \theta}{I} + \frac{\cos^2 \theta}{I_3} \right). \quad (165)$$

Η κατάσταση ισορροπίας με την χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη στην οποία θα καταλήξει το στερεό χάνοντας ενέργεια από την ολίσθηση χαρακτηρίζεται, όπως και στο *tippe top*, από μηδενική ταχύτητα του ΚΜ και $\dot{\theta} = 0$. Επομένως η τελική γωνία θ προσδιορίζεται από το ελάχιστο της

$$E_{\min}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{J^2}{h^2(\theta)} \left(\frac{\sin^2 \theta}{I} + \frac{\cos^2 \theta}{I_3} \right) + mgh(\theta).$$

Για να μπορέσουμε να λάβουμε αναλυτικά αποτελέσματα θα θεωρήσουμε, όπως και με το *tippe top*, ότι το σώμα περιστρέφεται αρχικά τόσο γρήγορα ώστε η δυναμική του ενέργεια (τελευταίος όρος) να είναι αμελητέα και θεωρούμε ότι το σώμα έχει σφαιροειδές σχήμα με εξίσωση στο σύστημα αναφοράς του σώματος $O123$:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Αν το $c > a$ το σφαιροειδές είναι επίμηκες (prolate⁷³), όπως το αβγό, ενώ αν $c < a$ είναι πεπλατυσμένο (oblate), όπως η Γη, οι καραμέλες mentos ή τα πούλια του επιτραπέζιου κινέζικου παιχνιδιού GO. Οι ροπές αδράνειας του σφαιροειδούς είναι

$$I = \frac{m}{5}(a^2 + c^2), \quad I_3 = \frac{2m}{5}a^2,$$

και η $h(\theta)$ είναι (βλ. Πλαίσιο 3)

$$h(\theta) = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta},$$

όπου θ η γωνία του άξονα 3 του σώματος με την κατακόρυφο. Αμελώντας τη δυναμική ενέργεια η ποσότητα προς ελαχιστοποίηση είναι:

$$E_{\min}(\theta) = \frac{J^2}{4a^2 I} \frac{a^2 + a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}.$$

Η συνάρτηση $E_{\min}(\theta)$ είναι μονότονη, αύξουσα αν $c > a$ και φθίνουσα αν $c < a$, και ο λόγος των ενεργειών στις γωνίες $\theta = 0$ και $\theta = \pi/2$ είναι:

$$\frac{E(0)}{E(\pi/2)} = \frac{a^2 + c^2}{2c^2}.$$

Έτσι ένα ομογενές αξονικά συμμετρικό στερεό που είναι επίμηκες (prolate), όπως υποθέτουμε πως είναι το αβγό, η καταληκτική κατάσταση ελάχιστης ενέργειας είναι περιστροφή του στερεού με γωνία $\theta = 0$, ενώ αν είναι πεπλατυσμένο θα περιστρέφεται με γωνία $\theta = \pi/2$. Επομένως ένα γρήγορα περιστρεφόμενο αυγό με τον άξονα του να γυρίζει παράλληλα με το δάπεδο, θα ανασηκωθεί και θα περιστρέφεται κατακόρυφα, ενώ μία περιστρεφόμενη καραμέλα mentos ή ένα πούλι του επιτραπέζιου παιχνιδιού GO με τον άξονά του αρχικά κατακόρυφο θα ανασηκωθεί και αυτό στο χείλος του και θα περιστρέφεται με $\theta = \pi/2$. Σημειώνουμε ότι όλη η ανάλυση ισχύει και για τη σβούρα του Lagrange, που εφόσον είναι επιμήκης, αν την ελευθερώσουμε και της επιτρέψουμε την κίνηση στο δάπεδο θα καταλήξει λόγω της δράσης των τριβών στο κάτω άκρο της στην κατακόρυφη υπνωτισμένη κατάσταση, που παρατηρούμε.

Πλαίσιο 3

Γεωμετρία Σφαιροειδών: Προσδιορισμός των συντεταγμένων του σημείου επαφής $\mathbf{X}_P = (X_P = h'(\theta), 0, Z_P = -h(\theta))$ σε σφαιροειδή στερεά.

Ανάλυση: Το σφαιροειδές είναι η επιφάνεια που ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^2 + y^2 + \epsilon^2 z^2 = a^2, \quad \epsilon = \frac{a}{c}.$$

⁷³Ετυμολογία: prolate (λατινικά) μετοχή του aoristου του proferre ≡ εκτείνω, δηλαδή επιμηκύνω, τραβάω. Το oblate, μετοχή του aoristου του offerre, το αντίθετο του επιμηκύνω, συμπιέζω.

Η εξίσωση αυτή είναι γραμμένη με συντεταγμένες στο καρτεσιανό σύστημα $Oxyz$ το προσαρμοσμένο στο σώμα. Το ύψος του κέντρου O του σώματος, $h(\theta)$, είναι ίσο με το μέγιστο της ποσότητας

$$-\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{z}}$$

δηλαδή τη μέγιστη απόσταση της καμπύλης που καθορίζει την επιφάνεια από το κέντρο του σφαιροειδούς, υπό την προϋπόθεση ότι το $\mathbf{r} = (x, y, z)$ είναι επί της επιφάνειας του σφαιροειδούς. Επομένως, το $h(\theta)$ προσδιορίζεται ως το ακρότατο της

$$F(x, y, z, \lambda) = -\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{z}} + \lambda(x^2 + y^2 + \epsilon^2 z^2 - a^2),$$

ως προς x, y, z, λ , όπου λ είναι ένας πολλαπλασιαστής Lagrange. Από το Σχ. 48 φαίνεται ότι

$$\hat{\mathbf{z}} = -\sin \theta \hat{\mathbf{1}} + \cos \theta \hat{\mathbf{3}},$$

με τους άξονες $\hat{\mathbf{1}}$ και $\hat{\mathbf{3}}$ όπως στο Σχ. 44. Επομένως η συνάρτηση προς μεγιστοποίηση είναι η:

$$F(x, y, z, \lambda) = x \sin \theta - z \cos \theta + \lambda(x^2 + y^2 + \epsilon^2 z^2 - a^2).$$

Από το σύστημα που προκύπτει από την ακροτατοποίηση της F :

$$\begin{aligned} \sin \theta + 2\lambda x &= 0 \\ 2\lambda y &= 0 \\ -\cos \theta + 2\lambda \epsilon^2 z &= 0 \end{aligned}$$

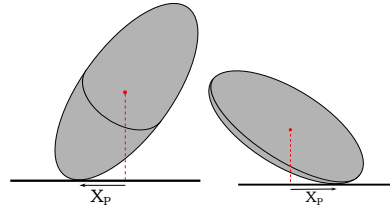
βρίσκουμε $x = -\sin \theta / (2\lambda)$, $y = 0$, $z = \cos \theta \epsilon^2 / (2\lambda a^2)$. Αφού προσδιορίσουμε στη συνέχεια την τιμή του λ που εξασφαλίζει ότι οι παραπάνω συντεταγμένες αποτελούν σημείο του σφαιροειδούς, υπολογίζουμε την ακρότατη τιμή της F και βρίσκουμε

$$h(\theta) = F_{\max} = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}.$$

και επομένως

$$X_P = \frac{dh(\theta)}{d\theta} = (a^2 - c^2) \frac{\sin(2\theta)}{2h(\theta)}.$$

Δηλαδή, αν το σφαιροειδές είναι επίμηκες (prolate) και είναι $c > a$ τότε $X_P < 0$ όπως φαίνεται στο Σχ. 49, αν είναι πεπλατυσμένο (oblate) και είναι $a > c$ τότε $X_P > 0$.



Σχήμα 49: Το σημείο επαφής ενός επίμηκους σφαιροειδούς βρίσκεται πίσω από το ίχνος του κέντρου του καθώς αυτό κλίνεται ($X_P < 0$), ενώ ενός πεπλατυσμένου μπροστά ($X_P > 0$). Είναι εύκολο να δείτε ότι το ύψος του κέντρου $h(\theta)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του θ για επίμηκες και αύξουσα για πεπλατυσμένο καθώς η κλίση του άξονα συμμετρίας των σφαιροειδών βρίσκεται στο διάστημα $[0, \pi/2]$. Πέραν αυτού του διαστήματος, για $\theta \in [\pi/2, \pi]$, η μονοτονία του $h(\theta)$ αντιστρέφεται, αφού, όσον αφορά στο ελλειψοειδές περίγραμμα των σφαιροειδών που κλίνονται στο δάπεδο, στη γωνία κλίσης $\theta = \pi/2$ τα επίμηκες είναι ακριβώς σαν το πεπλατυσμένο και αντίστροφα.

ο προσανατολισμός του συστήματος $G123$ που είναι προσκολλημένο στο σώμα, ως προς ένα αδρανειακό σύστημα $Ox'y'z'$, όπου η Oz' είναι στη κατακόρυφη διεύθυνση, προσδιορίζεται μέσω των γωνιών του Euler (ϕ, θ, ψ) . Η γωνιακή ταχύτητα του σώματος είναι

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{y}} + \dot{\psi} \hat{\mathbf{3}},$$

όπου τα $\hat{\mathbf{1}}$, $\hat{\mathbf{2}}$ και $\hat{\mathbf{3}}$ είναι μοναδιαία διανύσματα στους άξονες του $G123$, ενώ τα $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ και $\hat{\mathbf{z}}$ είναι μοναδιαία διανύσματα του μη αδρανειακού καρτεσιανού συστήματος $Gxyz$ που περιστρέφεται με το σώμα ως προς το αδρανειακό $Ox'y'z'$ με γωνιακή ταχύτητα $\Omega \hat{\mathbf{z}} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}}$, έτσι ώστε ανά πάσα στιγμή να είναι $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{2}}$. Η διέδρη γωνία που σχηματίζει ο δίσκος με το δάπεδο είναι θ , και $\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{3}} = \cos \theta$ (βλ. Σχ. 50). Η δυναμική κατάσταση του δίσκου προσδιορίζεται από την ταχύτητα του ΚΜ, \mathbf{U} , ως προς το αδρανειακό σύστημα $Ox'y'z'$, τη γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ και τον προσανατολισμό του σώματος. Οι γωνιακές ταχύτητες στους κύριους άξονες είναι $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, όπου επειδή $\hat{\mathbf{z}} = -\sin \theta \hat{\mathbf{1}} + \cos \theta \hat{\mathbf{3}}$ και $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{2}}$, είναι:

$$\omega_1 = -\dot{\phi} \sin \theta, \quad \omega_2 = \dot{\theta}, \quad \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.$$

Η στροφορμή του σώματος ως προς το ΚΜ είναι $\mathbf{L} = I\omega_1 \hat{\mathbf{1}} + I\omega_2 \hat{\mathbf{2}} + I_3 \omega_3 \hat{\mathbf{3}}$ και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{G123} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}$$

όπου $d\mathbf{L}/dt|_{G123}$ η μεταβολή της στροφορμής στο σύστημα $G123$ και

$$\boldsymbol{\omega}' = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{y}} = \dot{\phi}(-\sin \theta \hat{\mathbf{1}} + \cos \theta \hat{\mathbf{3}}) + \dot{\theta} \hat{\mathbf{2}},$$

η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος $G123$ (που διαφέρει από την γωνιακή ταχύτητα του σώματος στο ότι το σύστημα $G123$ δεν περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $\hat{\mathbf{3}}$, αλλά ακολουθεί την κίνηση του περιγράμματος του σώματος). Επομένως οι εξισώσεις της στροφορμής του δίσκου είναι

$$\frac{dL_1}{dt} + \omega'_2 L_3 - \omega'_3 L_2 = \tau_1, \quad (166\alpha')$$

$$\frac{dL_2}{dt} + \omega'_3 L_1 - \omega'_1 L_3 = \tau_2, \quad (166\beta')$$

$$\frac{dL_3}{dt} + \omega'_1 L_2 - \omega'_2 L_1 = \tau_3. \quad (166\gamma')$$

Η $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ είναι η ροπή ως προς το ΚΜ των δυνάμεων που ασκούνται από το δάπεδο στο σώμα:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= (a\hat{\mathbf{1}}) \times [R\hat{\mathbf{z}} - F\hat{\mathbf{x}} + F'\hat{\mathbf{y}}]^{76} \\ &= (a\hat{\mathbf{1}}) \times [R(\hat{\mathbf{3}} \cos \theta - \hat{\mathbf{1}} \sin \theta) - F(\hat{\mathbf{1}} \cos \theta + \hat{\mathbf{3}} \sin \theta) + F' \hat{\mathbf{2}}], \end{aligned}$$

με συνιστώσες στους άξονες 123:

$$\tau_1 = 0, \tau_2 = -Ra \cos \theta + Fa \sin \theta, \tau_3 = aF'.$$

Επομένως η (166α') γίνεται:

$$\frac{d(-I\dot{\phi} \sin \theta)}{dt} + I_3\dot{\theta}\omega_3 - I\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta = 0,$$

και πολλαπλασιάζοντάς την με το $\sin \theta$ οι δύο όροι με το I συνδυάζονται σε έναν και έχουμε:

$$\frac{d(I\dot{\phi} \sin^2 \theta)}{dt} = I_3\omega_3\dot{\theta} \sin \theta, \quad (167)$$

ενώ η στροφορμή στον άξονα συμμετρίας (βλ. (166γ')) εξελίσσεται σύμφωνα με:

$$\frac{d(I_3\omega_3)}{dt} = aF', \quad (168)$$

αφού με πράξεις λαμβάνουμε $\omega'_1 L_2 = \omega'_2 L_1$. Παρατηρήστε ότι δεν διατηρείται στην περίπτωση του κινούμενου δίσκου ούτε η $L_3 = I_3\omega_3$, λόγω της ροπής της F' , αλλά ούτε και η $L_z = I\dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3\omega_3 \cos \theta$, όπως θα προέκυπτε από την (167) αν η ω_3 ήταν σταθερή. Τέλος η (166β') παίρνει τη μορφή:

$$\frac{d(I\dot{\theta})}{dt} - I\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_3\omega_3\dot{\phi} \sin \theta = -Ra \cos \theta + Fa \sin \theta. \quad (169)$$

Επίσης η ταχύτητα του ΚΜ ως προς το αδρανειακό σύστημα $Ox'y'z'$, \mathbf{U} , αναλύεται στο σύστημα $Gxyz$ ως, $\mathbf{U} = U\hat{\mathbf{x}} + V\hat{\mathbf{y}} + W\hat{\mathbf{z}}$ και ικανοποιεί τη

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \left. \frac{d\mathbf{U}}{dt} \right|_{Gxyz} + (\dot{\phi}\hat{\mathbf{z}}) \times \mathbf{U} = \left(\frac{R}{m} - g \right) \hat{\mathbf{z}} - \frac{F}{m}\hat{\mathbf{x}} + \frac{F'}{m}\hat{\mathbf{y}},$$

δεδομένου ότι το σύστημα $Gxyz$ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\dot{\phi}\hat{\mathbf{z}}$ ως προς το αδρανειακό $Ox'y'z'$. Το αντίστοιχο σύστημα των συνιστωσών της επιτάχυνσης είναι:

$$\frac{dU}{dt} - \dot{\phi}V = -\frac{F}{m} \quad (170\alpha')$$

$$\frac{dV}{dt} + \dot{\phi}U = \frac{F'}{m} \quad (170\beta')$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{R}{m} - g. \quad (170\gamma')$$

⁷⁶Τα πρόσημα στις δυνάμεις F, F' έχουν μπει έτσι ώστε να είναι συμβατές με τριβές που δεν επιτρέπουν στο σώμα να ολισθήσει.

Το ενδιαφέρον στο φυσικό αυτό σύστημα είναι ότι οι έξι εξισώσεις (167), (168), (169) και (170) με τις έξι μεταβλητές $\theta, \phi, \psi, U, V, W$ δεν αρκούν να προσδιορίσουν την κίνηση, αφού απαιτείται ο προσδιορισμός και των αγνώστων δυνάμεων R, F και F' που ασκούνται στο σημείο επαφής με το δάπεδο. Θα θεωρήσουμε ότι το σημείο επαφής έχει μηδενική ταχύτητα και ο δίσκος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει και θα διερευνήσουμε την κίνηση του δίσκου όσο είναι $R > 0$, όσο δηλαδή ο δίσκος βρίσκεται σε επαφή με το δάπεδο. Αυτές οι υποθέσεις αρκούν για να προσδιορισθούν οι αγνώστες δυνάμεις και τελικά να απαλειφθούν.

Η συνθήκη που απαιτεί η ταχύτητα στο σημείο επαφής του δίσκου να είναι μηδενική:⁷⁷

$$\mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times (a\hat{\mathbf{1}}) = \mathbf{0}$$

οδηγεί στις συνθήκες

$$U = a\dot{\theta} \sin \theta, \quad V = -a\omega_3, \quad W = a\dot{\theta} \cos \theta, \quad (171)$$

διότι είναι:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times (a\hat{\mathbf{1}}) &= [\dot{\phi}\hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{y}} + \dot{\psi}\hat{\mathbf{3}}] \times a\hat{\mathbf{1}} \\ &= [\dot{\phi}\hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{y}} + \dot{\psi}(\cos\theta\hat{\mathbf{z}} + \sin\theta\hat{\mathbf{x}})] \times (a\cos\theta\hat{\mathbf{x}} - a\sin\theta\hat{\mathbf{z}}) \\ &= [\dot{\psi}\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{y}} + (\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)\hat{\mathbf{z}}] \times (a\cos\theta\hat{\mathbf{x}} - a\sin\theta\hat{\mathbf{z}}) \\ &= -a\dot{\theta}\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + a\omega_3\hat{\mathbf{y}} - a\dot{\theta}\cos\theta\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Η (171) συνδέει την ταχύτητα του ΚΜ με τις γωνιακές ταχύτητες του δίσκου και έτσι μέσω των (170) προσδιορίζονται και οι αγνώστες δυνάμεις:

$$\frac{F}{m} = - \left(\frac{d(a\dot{\theta}\sin\theta)}{dt} + a\omega_3\dot{\phi} \right) = -(a\ddot{\theta}\sin\theta + a\dot{\theta}^2\cos\theta + a\omega_3\dot{\phi}), \quad (172\alpha')$$

$$\frac{F'}{m} = \frac{d(-a\omega_3)}{dt} + a\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta = -a\dot{\omega}_3 + a\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta, \quad (172\beta')$$

$$\frac{R}{m} = g + \frac{d(a\dot{\theta}\cos\theta)}{dt} = g + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta. \quad (172\gamma')$$

Τελικά αντικαθιστώντας στις (167), (168) και (169) τις εκφράσεις για τις αγνώστες δυνάμεις που βρήκαμε παραπάνω (172) και θέτοντας $I_3 = 2mka^2$ και $I = mka^2$ καταλήγουμε στο κλειστό σύστημα εξισώσεων που προσδιορίζει την κίνηση του κυλιόμενου δίσκου όσο αυτός βρίσκεται σε επαφή με το δάπεδο:

$$(k+1)\ddot{\theta} + (2k+1)\omega_3\dot{\phi}\sin\theta - k\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta = -\frac{g}{a}\cos\theta \quad (173\alpha')$$

$$(2k+1)\dot{\omega}_3 - \dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta = 0 \quad (173\beta')$$

$$\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta - 2\omega_3\dot{\theta} = 0. \quad (173\gamma')$$

⁷⁷Καθώς ο δίσκος κυλιέται τα διαδοχικά σημεία επαφής εναλλάσσονται και το ίχνος τους στο δάπεδο κινείται με μη μηδενική ταχύτητα, αλλά το στιγμιαίο σημείο επαφής είναι ακίνητο.

Ενώ στην κίνηση του δίσκου δεν διατηρείται καμμία από τις στροφορμές L^2 , L_z , L_3 διατηρείται η ενέργεια

$$E = \frac{m}{2}|\mathbf{U}|^2 + \frac{I}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{I_3}{2}\omega_3^2 + mga \sin \theta, \quad (174)$$

αφού οι δυνάμεις της τριβής στο ακίνητο σημείο επαφής δεν παράγουν έργο. Αν ο δίσκος ολίσθαινε σε μία μη λεία επιφάνεια τότε

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}_P,$$

όπου \mathbf{U}_P η ταχύτητα του σημείου επαφής και \mathbf{F} η δύναμη της τριβής. Αν, επιπλέον, η δύναμη της τριβής \mathbf{F} αντιτίθεται στην κίνηση και $\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}_P \leq 0$ η ενέργεια θα μειωνόταν (βλ. σχετικό κείμενο στο εδάφιο για το tippe top).

Αντικαθιστώντας στην (174) την (171) και τις γωνιακές ταχύτητες η ενέργεια είναι:

$$\begin{aligned} E &= \frac{I}{2}\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{I + ma^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{I_3 + ma^2}{2}\omega_3^2 + mga \sin \theta \Rightarrow \\ \frac{E}{ma^2} &= \frac{1}{2} \left[k\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + (k+1)\dot{\theta}^2 + (2k+1)\omega_3^2 \right] + \frac{g}{a} \sin \theta. \end{aligned} \quad (175)$$

Οι μη γραμμικές εξισώσεις (173) δεν επιδέχονται στην γενική περίπτωση λύση σε κλειστή μορφή (η λύση δεν ανάγεται δηλαδή σε ολοκληρώματα) και πρέπει να επιλυθούν αριθμητικά. Εμείς θα επικεντρωθούμε σε ειδικές λύσεις των (173) που προσομοιάζουν στην τελική κίνηση ενός περιστρεφόμενου κέρματος επί του επιπέδου. Εξετάζουμε αν υπάρχουν λύσεις των (173) κατά τις οποίες το ΚΜ εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας r με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω και το νόμισμα διατηρεί σταθερή κλίση θ . Τότε επειδή $V = -a\omega_3$ και συγχρόνως $V = r\Omega$ θα είναι $\omega_3 = -(r/a)\Omega$. Επίσης θα είναι $\dot{\phi} = \Omega$ και η (173α') προσδιορίζει ότι η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης του δίσκου βάσει της γεωμετρίας του προβλήματος θα είναι:

$$\Omega^2 = \frac{g \cot \theta}{(2k+1)r + ka \cos \theta}. \quad (176)$$

Αν δε η ακτίνα του κύκλου τύχει να είναι μηδενική, $r = 0$, και το ΚΜ είναι ακίνητο τότε:

$$\Omega^2 = \frac{g}{ka \sin \theta}. \quad (177)$$

Από τις (176) και (177) προκύπτει ότι όσο μικρότερη γωνία σχηματίζει ο δίσκος με το δάπεδο τόσο μεγαλύτερη είναι η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης του δίσκου, Ω , και μάλιστα αν

⁷⁸Αξίζει να σημειωθεί ότι τα πρόσημα που αποδώσαμε στις δυνάμεις R , F , F' , απαιτώντας αυτές να αντιστοιχούν στον φυσικό τους ρόλο, τελικά υπήρξαν αδιάφορα. Ό,τι πρόσημο και να τους αποδίδαμε δεν θα έπαιζαν κανένα ρόλο στις εξισώσεις κίνησης. Βέβαια, εκ των υστέρων, θα μπορούσε να λάβει κανείς τον φυσικό τους προσανατολισμό αντικαθιστώντας τις λύσεις του συστήματος (173) στις (172).

$\theta \rightarrow 0$ τότε $\Omega \approx 1/\theta \rightarrow \infty$. Αυτή η σχέση εξηγεί και τον υψίσυχο ήχο που ακούγεται όταν ο δίσκος σχηματίζει μικρή γωνία με το δάπεδο: ο αέρας που βρίσκεται σε επαφή με τον δίσκο διεγείρεται με την συχνότητα περιστροφής του δίσκου και συν τω χρόνω απειρίζεται καθώς η γωνία που σχηματίζει ο δίσκος με το δάπεδο τείνει στο μηδέν. Βεβαίως, η γωνία που σχηματίζει ο δίσκος με το δάπεδο τείνει να μηδενιστεί επειδή ασκούνται στο δίσκο και άλλες αναλωτικές δυνάμεις οι οποίες τελικά μειώνουν την ενέργεια του δίσκου και οι οποίες δεν έχουν συμπεριληφθεί στην προηγηθείσα μελέτη.

Το ποια είναι η πηγή της ανάλωσης που οδηγεί στην απόσβεση της κίνησης του δίσκου έχει αποτελέσει θέμα διχογνωμίας τα τελευταία χρόνια.⁷⁹ Η αρχική συζήτηση ξεκίνησε με τον Keith Moffatt που πρότεινε το 2000 ότι η τριβή που οδηγεί τον δίσκο στην ηρεμία προέρχεται κυρίως από το ιξώδες του αέρα που τίθεται σε κίνηση κάτω από το νόμισμα, όπως είναι αρκετά λογικό να υποθέσει κανείς. Ο Keith Moffatt υπολόγισε ότι η τριβή αυτή οδηγεί σε ρυθμό ανάλωσης της ενέργειας του δίσκου⁸⁰

$$\frac{dE}{dt} \approx -\frac{\mu\pi g a^2}{k\theta^2}. \quad (179)$$

έτσι ώστε η ενέργεια του δίσκου από την (175) με χρήση της (177), όταν $\theta \ll 1$

$$E = \frac{3}{2}mga \sin \theta \approx \frac{3}{2}mga\theta, \quad (180)$$

να μειώνεται με τον ρυθμό dE/dt και επομένως

$$\frac{dE}{dt} = \frac{3}{2}mga\dot{\theta} \approx -\frac{\mu\pi g a^2}{k\theta^2}, \quad (181)$$

⁷⁹Βλ. Moffatt, H. K., 2000: Euler's disk and its finite-time singularity, *Nature*, **404**, 833-834, <https://doi.org/10.1038/35009017>, van den Engh, G., Nelson, P. & Roach, J., 2000: Numismatic gyrations, *Nature* **408**, 540, <https://doi.org/10.1038/35046209>, και η απάντηση του Moffatt, H, 2000: Numismatic gyrations. *Nature*, **408**, 540 (2000) <https://doi.org/10.1038/35046211>, Bildsten, L. 2002: Viscous dissipation for Euler's disk, *Phys. Rev. E*, **66**, 056309, <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.056309>. Προσεκτικά πειράματα έδειξαν τελικά ότι η κύρια πηγή της τριβής είναι η τριβή κύλισης βλ. Easwar, K., Rouyer, F., & Menon, N., 2002: Speeding to a stop: The finite-time singularity of a spinning disk, *Phys. Rev. E*, **66**, 045102(R) <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.045102>, Ma Daolin, Liu Caishan, Zhao Zhen and Zhang Hongjian. 2014: Rolling friction and energy dissipation in a spinning disc, *Proc. R. Soc. A*. **470**, 0191, <http://doi.org/10.1098/rspa.2014.0191>.

⁸⁰Η εξάρτηση αυτή προκύπτει ως εξής: στην περίπτωση της τριβής από το ιξώδες του συμπιεζόμενου αέρα ο ρυθμός ανάλωσης της ενέργειας είναι $dE/dt = -\int_V dV \mu |\nabla \mathbf{u}|^2$ όπου μ είναι το ιξώδες του αέρα, V ο όγκος του συμπιεζόμενου από τον δίσκο αέρα και \mathbf{u} η ταχύτητα του αέρα. Αν η γωνία θ που σχηματίζει ο δίσκος με το δάπεδο είναι μικρή $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ τότε $|\nabla \mathbf{u}| \approx \rho\Omega/(\rho\theta) = \Omega/\theta$, όπου $\rho\Omega$ η ταχύτητα του αέρα που βρίσκεται σε απόσταση ρ από τον στιγμιαίο κατακόρυφο άξονα στο σημείο επαφής του δίσκου με το επίπεδο και $\rho\theta$ το κατακόρυφο ύψος του δίσκου στο σημείο αυτό. Ο όγκος του αέρα που συμπιέζεται είναι περίπου $\pi a^2 \times a\theta$, αγνοώντας επί μέρους αριθμητικούς παράγοντες, και ο ρυθμός ανάλωσης της ενέργειας είναι:

$$\frac{dE}{dt} \approx \pi\mu a^3\theta \frac{\Omega^2}{\theta^2} = -\frac{\mu\pi g a^2}{k\theta^2}. \quad (178)$$

Δηλαδή η τριβή αυξάνεται όσο μικραίνει η γωνία και $dE/dt \sim -\theta^{-2}$.

ή

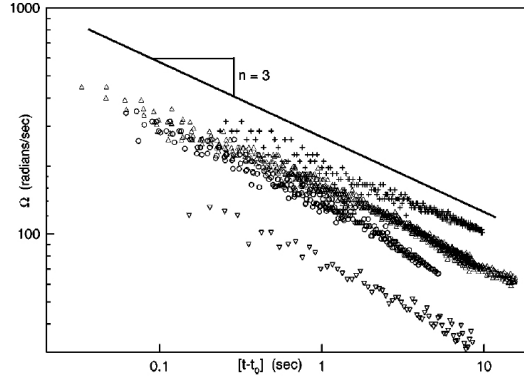
$$\dot{\theta} = -\frac{\lambda_v}{\theta^2}, \quad \lambda_v = \frac{2}{3} \frac{\mu \pi a}{km}. \quad (182)$$

Αν, αντιθέτως, η κύρια πηγή ανάλωσης είναι η τριβή κύλισης, τότε ο ρυθμός απώλειας ενέργειας είναι

$$\frac{dE}{dt} = -F_{\kappa\omega\lambda} U_P = -\mu mg(a \cos \theta \Omega) = -\mu m g a \cos \theta \Omega \approx -\mu m g a \sqrt{\frac{g}{ka\theta}}, \quad (183)$$

και

$$\dot{\theta} = -\frac{\lambda_r}{\theta^{1/2}}, \quad \lambda_r = \frac{2}{3} \mu \sqrt{\frac{g}{ak}}. \quad (184)$$



Σχήμα 51: Τα τελικά στάδια της εξέλιξης της γωνιακής ταχύτητας της μετάπτωσης του δίσκου Ω (σε rad/s) συναρτήσει του χρόνου σε $t - t_0$ (s) σε λογαριθμική κλίμακα και για το Ω και για το $t - t_0$, για έναν ατσάλινο δίσκο (με $a = 3.7$ cm, $m = 440$ g) επί γυάλινης (+), ατσάλινης (Δ), λίθινης (∇) επιφάνειας καθώς και για ένα ατσάλινο δακτυλίδι (\circ) αντίστοιχης ακτίνας και μάζας επί ατσάλινης επιφάνειας. Η Ω αποκλίνει σύμφωνα με τον νόμο $\Omega(t) \sim (t - t_0)^{-1/n}$ με $n \approx 3$, αρκετά συμβατή⁸¹ με ρυθμό ανάλωσης της ενέργειας $dE/dt \sim -\theta^{-1/2}$ προερχόμενο από τριβής κύλισης (από Easwar, K., Rouyer, F., & Menon, N., 2002: Speeding to a stop: The finite-time singularity of a spinning disk, *Phys. Rev. E*, **66**, 045102(R)).

Επομένως, αν t_0 είναι ο χρόνος που προβλέπεται να σταματήσει ο δίσκος, τότε στην περίπτωση τριβής από το ιζώδες του αέρα θα έχουμε

$$\theta(t) = (3\lambda_v)^{1/3} (t_0 - t)^{1/3}, \quad \Omega(t) = \sqrt{\frac{g}{ka}} \frac{1}{(3\lambda_v)^{1/6} (t_0 - t)^{1/6}} \quad (\text{για } t < t_0),$$

⁸¹Μην ξεχνάτε ότι αφενός και οι δύο μηχανισμοί ανάλωσης λειτουργούν ταυτόχρονα και οι υπολογισμοί που παρατίθενται είναι προσεγγιστικοί για $\theta \approx 0$. Επιπλέον, στην περίπτωση του δακτυλιδιού (\circ), η συμπίεση του αέρα δεν περιλαμβάνει όλον τον όγκο που υπολογίσαμε κάτω από το δίσκο, οπότε η τριβή κύλισης, από μόνη της, είναι πιο κοντά στη ρεαλιστική περιγραφή του φαινομένου.

ενώ στην περίπτωση της τριβής κύλισης προβλέπεται η εξής εξάρτηση:

$$\theta(t) = \left(\frac{3\lambda_r}{2}\right)^{2/3} (t_0 - t)^{2/3}, \quad \Omega(t) = \sqrt{\frac{g}{ka}} \frac{1}{(3\lambda_r/2)^{1/3}(t_0 - t)^{1/3}} \quad (\text{για } t < t_0).$$

Το ενδιαφέρον συμπέρασμα, είτε για τον ένα μηχανισμό ανάλωσης, είτε για τον άλλο, είναι ότι η παύση της κίνησης του δίσκου επιτυγχάνεται σε πεπερασμένο χρόνο λίγο πριν τον οποίο η γωνιακή ταχύτητα συμπεριφέρεται ανωμάλως, απειριζόμενη. Και στις δύο περιπτώσεις η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης αποκλίνει σε κάποιο χρόνο t_0 , συγχρόνως με το σταμάτημα της περιστροφής του δίσκου. Τα πειράματα έδειξαν ότι στα τελικά στάδια και ανεξάρτητα αν ο δίσκος είναι συμπαγής ή δακτύλιος (βλ. Σχ. 51) η Ω αποκλίνει με το νόμο δύναμης $\Omega \sim (t_0 - t)^{-1/3}$ που δείχνει ότι ο κύριος μηχανισμός ανάλωσης λίγο πριν το τέλος είναι ουσιαστικά η τριβή κύλισης.

Ο σχηματισμός ανωμαλιών σε πεπερασμένο χρόνο, όπως ο απειρισμός της Ω , είναι κάτι που σπανίως συμβαίνει στη φύση. Στην περίπτωση του δίσκου αποφεύγεται η ανωμαλία διότι όπως μειώνεται η γωνία θ και αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα Ω η αντίδραση του δαπέδου, που για μικρές γωνίες είναι κατά προσέγγιση (βλ. (172γ'))

$$\begin{aligned} \frac{R}{m} &= g + \frac{d(a\dot{\theta} \cos \theta)}{dt} \\ &\approx g + a\ddot{\theta} = g - \frac{a\lambda_r^2}{2\theta^2}, \quad 82 \end{aligned}$$

αλλάζει πρόσημο και ο δίσκος χάνει επαφή με το δάπεδο, αιωρούμενος πάνω σε ένα λεπτό στρώμα αέρα, αποφεύγοντας το σχηματισμό έτσι της ανωμαλίας και ο δίσκος προσγειώνεται τελικά στο δάπεδο εκτελώντας ελεύθερη πτώση με αντίσταση αέρα. Υποθέτοντας ανάλωση της ενέργειας από τριβή κύλισης της μορφής (183) για ένα δίσκο Euler του εμπορίου υπολογίζουμε συντελεστή $\lambda_r = 0.022 \text{ s}^{-1}$ ($m = 440 \text{ g}$, $a = 3.7 \text{ cm}$ και συντελεστή τριβής κύλισης $\mu = 0.001$) ότι ο δίσκος χάνει επαφή με το δάπεδο όταν η γωνία γίνει

$$\theta_c \approx \lambda_r \sqrt{\frac{a}{2g}} \approx 0.055^\circ,$$

που συμβαίνει μόνο

$$t_0 - t_c = \frac{2\theta_c^{3/2}}{3\lambda_r} \approx 9 \times 10^{-4} \text{ s},$$

πριν το σχηματισμό της ανωμαλίας εκπέμποντας ήχο συχνότητας $\Omega_c \approx 34000/(2\pi) \text{ Hz} = 5.4 \text{ KHz}$. Τόσο κοντά φτάνει ο δίσκος του Euler στο «χείλος του γκρεμού».

Η συνεχής αύξηση του εκπεμπόμενου ήχου και η κατάρρευση του δίσκου του Euler σε πεπερασμένο χρόνο είναι παρόμοια με το τελευταίο στάδιο εξέλιξης ενός περιστρεφόμενου ζεύγους

⁸²Παραγωγίζοντας την (184) άλλη μια φορά.

αστέρων νετρονίων ή μαύρων τρυπών πριν αυτές συγχωνευτούν⁸³. Στην περίπτωση αυτή η περιστροφική ενέργεια του ζεύγους είναι $\sim \Omega^{2/3}$, όπου Ω η συχνότητα περιστροφής του ζεύγους, και ο ρυθμός ανάλωσης της ενέργειας του συστήματος που επιτελείται με την εκπομπή βαρυτικών κυμάτων είναι $dE/dt \sim \Omega^{10/3}$. Η μείωση της ενέργειας του συστήματος οδηγεί τα υπερσυμπαγή αυτά αστρικά αντικείμενα να πλησιάζουν το ένα το άλλο εκπέμποντας βαρυτικά κύματα ολοένα μεγαλύτερης συχνότητας που είναι γνωστό ως «βαρυτικό κελήδισμα» (*gravitational-wave chirp*). Η συχνότητα περιστροφής του ζεύγους και η συχνότητα εκπομπής των βαρυτικών κυμάτων συμπεριφέρεται ως $\Omega \sim (t_0 - t)^{-3/8}$ και τελικά θα απειριζόταν, όπως στον δίσκο του Euler, στον πεπερασμένο χρόνο t_0 , αν οι παλιρροϊκές δυνάμεις που αναπτύσσονται καθώς τα δύο σώματα πλησιάζουν δεν παραμόρφωναν και τελικά διαμέλιζαν τα σώματα σε χρόνο $t < t_0$ καθώς αυτά συγκρούονται. Μια τέτοια παρατήρηση⁸⁴ έγινε για πρώτη φορά το 2015 από τους ανιχνευτές βαρυτικών κυμάτων της κοινοπραξίας LIGO-Virgo επιβεβαιώνοντας την πρόβλεψη της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας για την ύπαρξη βαρυτικών κυμάτων. Στην περίπτωση αυτή συγκρούστηκαν και συγχωνεύτηκαν δύο μαύρες τρύπες και οι επίγειοι ανιχνευτές κατέγραψαν το wave chirp που σάρωσε τους ανιχνευτές σε συχνότητες 35 – 250 Hz μέσα σε μόλις 0.15 s.

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει το πρόβλημα του σχηματισμού ανωμαλιών σε πεπερασμένο χρόνο στην υδροδυναμική. Σε γενικές γραμμές το ερώτημα είναι το ακόλουθο: μπορεί να απειριστεί σε πεπερασμένο χρόνο ο στροβιλισμός του πεδίου ταχυτήτων του ρευστού αν αρχικά το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού είναι ομαλό; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δεν έχει δοθεί ακόμα και στην περίπτωση που το ρευστό είναι χωρίς ιξώδες και εξελίσσεται σύμφωνα με τις εξισώσεις του Euler. Ο δίσκος του Euler μας δείχνει ότι ανωμαλίες μπορούν να σχηματιστούν σε πεπερασμένο χρόνο, ακόμα και αν υπάρχουν αναλωτικές διαδικασίες, μάλιστα στην περίπτωση του δίσκου ή της συγχώνευσης μαύρων τρυπών οι ανωμαλίες εμφανίζονται ακριβώς λόγω της ύπαρξης αναλωτικών διαδικασιών.

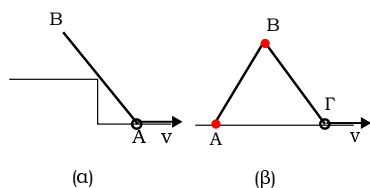
⁸³Cutler, C. et al., 1993: The last three minutes: Issues in gravitational wave measurements of coalescing compact binaries, *Phys. Rev. Letters*, **70**, 2984-2987 <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.2984>.

⁸⁴Abbot, B.P. et al, 2016: Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, **116**, 061102 <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102>.

- Πρακτικά, κάθε σώμα που αποτελείται από δύσκολα παραμορφώσιμο υλικό θεωρείται στερεό. Οι αποστάσεις μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων ενός στερεού είναι σταθερές και η συνθήκη αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως ορισμός του στερεού.
- Η κίνηση ενός στερεού σώματος μπορεί να περιγραφεί από την κίνηση ενός σημείου του σώματος (συνήθως το ΚΜ αυτού) συν μια περιστροφή γύρω από κάποιον άξονα που διέρχεται από το εν λόγω σημείο και ο οποίος μπορεί να αλλάζει κάθε φορά.
- Ο στιγμιαίος άξονας περιστροφής καθορίζει τα σημεία του στερεού που δεν περιστρέφονται και κινούνται όλα με την ίδια (διανυσματικά) ταχύτητα.
- Κάθε στερεό χαρακτηρίζεται από 3 ροπές αδράνειας που προσδιορίζουν την αδράνεια σε περιστροφή που παρουσιάζει το σώμα, αν αυτό περιστραφεί σε έναν από τους τρεις αντίστοιχους, ορθογώνιους μεταξύ τους άξονες. Οι άξονες αυτοί ονομάζονται κύριοι άξονες αδράνειας.
- Δύο σώματα εντελώς διαφορετικά σε μέγεθος, σύσταση, σχήμα μπορεί να χαρακτηρίζονται από ίδιες ροπές αδράνειας και επομένως θα συμπεριφέρονται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο αν υπόκεινται σε ίδιο πεδίο δυνάμεων και ροπών. Το κοινό ελλειψοειδές του Poinsot με τους 3 δοσμένους ημιάξονες περιγράφει πλήρως τη συμπεριφορά των δύο αυτών στερεών.
- Η ενέργεια περιστροφής και η στροφορμή ενός στερεού μπορεί να καθοριστεί πλήρως αν γνωρίζουμε την στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του στερεού αναλυμένη στο σύστημα των κυρίων αξόνων.
- Ένα ελεύθερο στερεό κινείται έτσι ώστε η συνολική του ενέργεια και στροφορμή να διατηρούνται. Γενικά, όμως, ο άξονας περιστροφής του στερεού κινείται και στο αδρανειακό σύστημα αλλά και στο σύστημα του στερεού (των κυρίων αξόνων).
- Οι γωνίες του Euler είναι ένας βολικός τρόπος ανάλυσης της κίνησης ενός στερεού.
- Η πολυπλοκότητα της ανάλυσης κίνησης των στερεών (γυροσκόπιο, σβούρα, tippe-top, δίσκος του Euler) οφείλεται στο ότι οι πεπερασμένες στροφές γύρω από δύο διαφορετικούς άξονες δεν συμπεριφέρονται όπως η διανυσματική πρόσθεση δύο μετατοπίσεων.
- Όταν υπάρχουν ποσότητες που διατηρούνται, όπως το αναλλοίωτο Jellett στο tippe-top, ένα στερεό μπορεί να μεταβεί σε μια νέα κατάσταση κίνησης που θα ήταν όχι προτιμητέα ενεργειακά, ώστε στη συνέχεια η ενέργεια να σταθεροποιηθεί ή τουλάχιστον να αρχίσει να μειώνεται με πιο αργό ρυθμό.

- Ένα στερεό, όπως το νόμισμα που στριφογυρίζει στο δάπεδο, μπορεί λόγω ανάλωσης να επιδεικνύει μια αρκετά ενδιαφέρουσα συμπεριφορά. Να οδεύει με ανώμαλο τρόπο σε πεπερασμένη παύση της κίνησής του. Στην πραγματικότητα, ο μηχανισμός της ανάλωσης παύει να λειτουργεί πριν συμβεί απειρισμός φυσικών μεγεθών και αντικαθίσταται από άλλο μηχανισμό, που αποτρέπει το σύστημα από την εμφάνιση ανωμαλιών.

Προβλήματα



1. Κάνουμε μικρές στροφές κατά γωνία $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ περί τις τρεις διαγώνιες των τριών τετραγωνικών εδρών που καταλήγουν σε μια κορυφή του κύβου. Προσδιορίστε τη μετατόπιση της απέναντι κορυφής του κύβου όταν είναι $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$.
2. Σκεφθείτε με ποια συνολική πεπερασμένη στροφή (άξονας και γωνία στροφής) της αρχικής κατάστασης θα λαμβάνετε την κάθε μια από τις δύο διαδοχικές καταστάσεις που απεικονίζονται στο Σχ. 7 που προέκυψαν από δύο διαδοχικές στροφές γύρω από δύο διαφορετικούς άξονες.
3. (α) Στο Σχ. (α) το άκρο A της ράβδου B κινείται με σταθερή ταχύτητα v επι του δαπέδου. Προσδιορίστε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν σχηματίζει γωνία θ με το δάπεδο και την κινητική της ενέργεια. (β) Στο Σχ. (β) έχουμε ένα αρθρωτό σύμπλεγμα αποτελούμενο από δύο ράβδους, AB , μήκους α , και $B\Gamma$, μήκους β . Η AB μπορεί να περιστρέφεται περί το A και η $B\Gamma$ περί το B ενώ το άκρο της Γ κινείται επί του δαπέδου χωρίς τριβές. Αν η AB περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$ ποία η γωνιακή ταχύτητα της $B\Gamma$; Ποία η κινητική ενέργεια του συμπλέγματος όταν είναι $\alpha = \beta$.
4. Δείξτε ότι αν I_{ij} είναι η ροπή αδρανείας ως προς σημείο περί το οποίο περιστρέφεται στερεό τότε είναι $I_{ij}\dot{I}_{ij} = 0$.
5. Κατασκευάστε το ελλειψοειδές του τανυστή ροπής αδράνειας I_{ij} ως προς το ΚΜ α) μίας βελόνας μηδενικού πάχους, μήκους a και μάζας m και β) μίας τετραγωνικής πλάκας με μήκος πλευράς a και μάζα m .
6. (Landau) (α) Δείξτε ότι σε ένα γραμμικό μόριο που αποτελείται από N άτομα μάζας m_i που βρίσκονται σε σταθερές αποστάσεις μεταξύ των οι κύριες ροπές αδράνειας ως προς το ΚΜ είναι

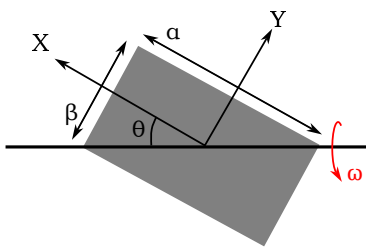
$$I_1 = I_2 = \frac{1}{M} \sum_{i \neq j} m_i m_j r_{ij}^2, \quad I_3 = 0,$$

όπου $M = \sum m_i$ και r_{ij} είναι η απόσταση μεταξύ των ατόμων i, j . Ισχύει ο ίδιος τύπος όταν τα μόρια είναι στα επίπεδο ή στον χώρο;

(β) Υπολογίστε τις κύριες ροπές αδράνειας ως προς το ΚΜ ενός τριατομικού μορίου που

έχει σχήμα στερεού ισοσκελούς τριγώνου βάσης a και ύψους h όταν τα δύο άτομα που είναι στις κορυφές της βάσης του τριγώνου έχουν μάζα m_1 και το τρίτο άτομο στην κορυφή του τριγώνου έχει μάζα m_2 .

7. Προσδιορίστε τις διαστάσεις ορθού κυκλικού κυλίνδρου που να είναι σφαιρικός στρόβος.
8. Δείξτε ότι μπορείτε πάντοτε να καταστήσετε έναν οποιονδήποτε ασύμμετρο στρόβο σε σφαιρικό στρόβο με πρόσθεση μάζας.
9. Έστω μια ράβδος μήκους L από την οποία έχει αφαιρεθεί το μεσαίο τρίτο, και από τα εναπομείναντα κομμάτια έχει αφαιρεθεί το μεσαίο τρίτο τους κ.ο.κ. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας αυτής ως προς τον μεσοκάθετο άξονα της αρχικής ράβδου. (Προσέξτε ότι με τις διαρκείς αφαιρέσεις η μάζα εκμηδενίζεται με γεωμετρική πρόοδο, οπότε θεωρήστε ότι με ανάλογη αύξηση της γραμμικής πυκνότητας το αντικείμενο που απομένει έχει πεπερασμένη μάζα M .) Θα χρειαστεί να επικαλεστείτε το θεώρημα Steiner.
10. Ένα αντικείμενο μάζας M , αποτελούμενο από ομογενές υλικό, έχει τανυστή ροπής αδράνειας I_{ij} (ως προς το ΚΜ του). Θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστοιχο τανυστή για ένα φλοιό που έχει το ίδιο ακριβώς σχήμα και μάζα M . Για παράδειγμα γνωρίζοντας τη ροπή αδράνειας μιας γεμάτης σφαίρας, ή ενός γεμάτου κύβου ή μιας πατάτας, θέλουμε να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας ενός σφαιρικού φλοιού ή ενός κυβικού φλοιού ή του στερεοποιημένου φλοιού της πατάτας. (α) Αυτό μπορεί να υπολογιστεί αφαιρώντας από τη ροπή αδράνειας ενός γεμάτου σχήματος, αυτήν ενός γεμάτου σχήματος αλλά ελαφρώς μικρότερων διαστάσεων (προσέξτε ότι η μάζα του φλοιού θα τείνει στο μηδέν μετά την αφαίρεση των δύο ροπών). (β) Εναλλακτικά, η ροπή αδράνειας του γεμάτου σχήματος μπορεί να γραφεί ως $I_{ij} = ML^2 J_{ij}$, όπου J_{ij} ένας διαγώνιος τανυστής με αριθμητικά στοιχεία τάξης 1, και L μια τυπική διάσταση του σχήματος (π.χ. η μεγαλύτερη απόσταση της επιφάνειας από το ΚΜ). Θεωρώντας ότι $M = M(L)$ υπολογίστε την dI_{ij}/dM και εξ' αυτού συνάγεται τη ροπή αδράνειας του αντίστοιχου φλοιού. (γ) Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματά σας για έναν σφαιρικό φλοιό και για έναν κυβικό φλοιό. (Θα χρειαστεί να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας γεμάτου κύβου που δεν είναι άλλη από την κοινή ροπή αδράνειας στους 3 άξονες συμμετρίας του κύβου που ισοδυναμεί με την ροπή αδράνειας τετραγωνικής πλάκας ως προς άξονα κάθετο στην πλάκα, αφού ο κύβος είναι ένα «σουβλάκι» από τετραγωνικές πλάκες.)
11. Δείξτε ότι η γωνία μεταξύ της γωνιακής ταχύτητας και της στροφορμής στερεού είναι αναγκαστικά οξεία και αν όλες οι κύριες ροπές αδρανείας του σώματος είναι διαφορετικές τότε η γωνία αυτή μηδενίζεται μόνον όταν το σώμα περιστρέφεται περί κύριο άξονα του τανυστή ροπής αδρανείας.
12. Ορθογώνια ομογενής πλάκα (αμελητέου πάχους) μάζας m περιστρέφεται περί τον διαγώνιο άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω (με σταθερό μέτρο και διεύθυνση). Οι πλευρές της πλάκας είναι α, β , όπως στο σχήμα. α) Προσδιορίστε τη στροφορμή της πλάκας ως



Σχήμα 52: Άσκηση 28.

προς το κέντρο μάζας της. β) Προσδιορίστε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής και εξ' αυτού υπολογίστε τις δυνάμεις που πρέπει να ασκηθούν στον άξονα περιστροφής στις δύο κορυφές της πλάκας για να κρατηθεί η διάταξη σταθερή. γ) Τι συμβαίνει αν η πλάκα είναι τετραγωνική;

13. Δείξτε ότι η ερπολογράφος ενός ελεύθερου ασύμμετρου στερεού κείται μεταξύ δύο ομοκέντρων κύκλων και προσδιορίστε τις ακτίνες των κύκλων αυτών.
14. Ένα εκκρεμές αποτελείται από μια αβαρή σφαίρα η οποία είναι γεμάτη με υπέρρευστο υγρό. Να συγκριθεί η περίοδος μικρών ταλαντώσεων σε σχέση με την περίοδο, αν το υγρό παγώσει και κινείται μαζί με τη σφαίρα σαν ένα στερεό σώμα. Δίνονται το μήκος του αβαρούς νήματος που κρατά τη σφαίρα και η ακτίνα της σφαίρας.
15. Στερεό στη μορφή ορθού παραλληλεπίπεδου διαστάσεων $2a \times 2a \times 4a$ περιστρέφεται γύρω από το ΚΜ ελεύθερα. Τίθεται αρχικά σε περιστροφική κίνηση περί τη μία διαγώνιο του παραλληλεπίδου (οχι τη διαγώνιο κάποιας έδρας) με γωνιακή ταχύτητα ω . Προσδιορίστε την ημικατακόρυφη γωνία του κώνου που διαγράφουν τα σημεία του σώματος που βρίσκονται στην ευθεία που διέρχεται από το ΚΜ και είναι παράλληλη στις ακμές του στερεού με το μεγαλύτερο μήκος και δείξτε ότι η περίοδος περιστροφής αυτής της γραμμής είναι $10\pi/(\omega\sqrt{11})$. Σχεδιάστε τον κώνο του σώματος (τον κώνο που διαγράφει η γωνιακή ταχύτητα περί τον άξονα συμμετρίας του σώματος όπως φαίνεται στον παρατηρητή που κινείται με το στερεό) και τον space cone (τον κώνο που διαγράφει περί το διάνυσμα της στροφορμής η γωνιακή ταχύτητα, όπως φαίνεται σε ένα μη κινούμενο παρατηρητή). Οι κύριες ροπές αδράνειας του στερεού είναι $5ma^2/3$ και $2ma^2/3$.
16. Στερεό με άξονα συμμετρίας εκ περιστροφής (τον άξονα 3) και κύριες ροπές αδράνειας I_3 και I κινείται περί το ΚΜ υπό την επίδραση τριβής που προκαλεί ανασχετική ροπή ίση με $-\lambda\omega$ όπου $\lambda > 0$ και ω είναι το διάνυσμα της στιγμιαίας γωνιακής ταχύτητας. Δείξτε ότι η συνιστώσα της γωνιακής ταχύτητας στον άξονα συμμετρίας μειώνεται κατά 2 σε χρόνο $I_3 \log(2)/\lambda$ και αν $I_3 > I$ δείξτε ότι η γωνία του κώνου του σώματος (του κώνου που διαγράφει η γωνιακή ταχύτητα περί τον άξονα συμμετρίας του σώματος όπως φαίνεται στον παρατηρητή που κινείται με το στερεό) μειώνεται μονότονα.

17. Δείξτε ότι η τομή τριαξονικού ελλειψοειδούς με μια ομόκεντρη σφαίρα ακτίνας ίσης με τον ενδιάμεσο άξονα του ελλειψοειδούς (σφαίρα στροφορμής και ελλειψοειδούς ενέργειας, στο χώρο των στροφορμών) είναι επίπεδες καμπύλες που διέρχονται από αντιδιαμετρικά σημεία της σφαίρας, δηλαδή είναι ημιπεριφέρειες μέγιστου κύκλου της σφαίρας.
18. (πως να κερδίζουμε πάντα στα στοιχήματα κορώνα-γράμματα) Κρατάμε ένα νόμισμα οριζόντια έτσι ώστε ο άξονας 3 αξονικής συμμετρίας του να είναι κατακόρυφος και του προσδίδουμε γωνιακή ταχύτητα ω_3 ως προς τον άξονα 3 και ω_1 ως προς μία διάμετρο του νομίσματος. Αν η γωνιακή ταχύτητα ω_1 είναι μη μηδενική το νόμισμα όταν το αφήσουμε θα αρχίσει να κλυδωνίζεται και αν η γωνιακή ταχύτητα ω_1 είναι αρκούντως μεγάλη ένας παρατηρητής που κοιτάζει το νόμισμα από πάνω θα βλέπει εναλλάξ και τις δύο όψεις του νομίσματος. Ποία η ελάχιστη τιμή του ω_3/ω_1 ώστε ο παρατηρητής να βλέπει πάντα την ίδια όψη του νομίσματος;
19. Ομογενώς φορτισμένη σφαίρα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω σε ομογενές και σταθερό μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} . Δείξτε ότι η ολική ροπή που ασκείται στη σφαίρα από τις μαγνητικές δυνάμεις είναι $(q/2M)\mathbf{L} \times \mathbf{B}$ όπου \mathbf{L} η συνολική στροφορμή της σφαίρας, q το ολικό φορτίο και M η ολική μάζα της σφαίρας (η σφαίρα έχει και ομογενή πυκνότητα). Προσδιορίστε την κίνηση της σφαίρας.
20. (Euler) Στερεό μάζας m που ήταν αρχικά ακίνητο δέχεται στο σημείο A της εξωτερικής επιφάνειας του στερεού, που βρίσκεται στη θέση \mathbf{r} από το ΚΜ του σώματος, στον χρόνο $t = 0$ στιγμιαία ώση με $\int_{0^-}^{0^+} \mathbf{F} dt = m\nu\mathbf{n}$, όπου \mathbf{n} μοναδιαίο διάνυσμα. Στο σώμα δεν ασκούνται άλλες δυνάμεις.
- (α) Με τι ταχύτητα θα κινηθεί το ΚΜ; Ποία η στροφορμή του σώματος μετά την ώση; Τι παραδοχές κάνατε για να μπορέσετε να απαντήσετε;
- (β) Προσδιορίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σώματος μετά την κρούση.
- (γ) Προσδιορίστε την ταχύτητα του σημείου A και προσδιορίστε το σημείο του σώματος που ακριβώς μετά την κρούση παραμένει ακίνητο.
- (δ) Προσδιορίστε με τι κρούσεις μπορεί να επιτευχθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τελική ολική κινητική ενέργεια του σώματος.
21. Στερεό στη μορφή σφαιροειδούς που περιστρέφεται με μεγάλη γωνιακή ταχύτητα περί τον άξονα συμμετρίας του τοποθετείται σε ένα λείο επίπεδο τραπέζι που είναι κάθετο στην κατακόρυφο διεύθυνση της βαρυτικής δύναμης. Δείξτε αναλύοντας τις ροπές ως προς το σημείο επαφής του στερεού με το τραπέζι ότι η φορά της μετάπτωσης του άξονα συμμετρίας προσδιορίζεται από το αν το σφαιροειδές είναι πεπλατυσμένο (oblate spheroid, όπως ένας δίσκος ή Γή) ή επίμηκες (prolate spheroid – όπως ένα αργίτικο πεπόνι). Δείξτε επίσης ότι αν ασκηθεί και μια μικρή δύναμη τριβής ο άξονας συμμετρίας θα τείνει προς την κατακόρυφο και επομένως αν το σώμα είναι πεπλατυσμένο το ΚΜ του θα κατέβει

ενώ αν είναι επίμηκες θα ανέβει. Σημείωση: Τα σφαιροειδή έχουν εξίσωση

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

και αν $c > a$ το σφαιροειδές είναι επίμηκες (prolate), ενώ αν $c < a$ είναι πεπλατυσμένο (oblate). (Ετυμολογία: pro-late (λατινικά) μετοχή του αορίστου του proferre -> προ φέρω δηλαδή επιμηκώνω, τραβάω).

22. (Εδάφιο 15.1) Προσδιορίστε την αναλυτική έκφραση της $f(x)$ που αντιστοιχεί στις καταστάσεις ισορροπίας $\theta = 0$ και $\theta = \pi$ και σχεδιάστε το γράφημα της. Προσδιορίστε την ευστάθεια των καταστάσεων αυτών από τα γραφήματα της $f(x)$ που προκύπτουν όταν η κατάσταση ισορροπίας διαταραχτεί. Επιβεβαιώστε τα γραφήματα του Σχ. 37.
23. (Εδάφιο 15.1) Αποδείξαμε ότι κάθε κατάσταση ισορροπίας με $x_e < 1$ οσονδήποτε πλησίον του $x = 1$ είναι ευσταθής. Όμως η κατάσταση ισορροπίας $x_e = 1$ δεν είναι πάντα ευσταθής. Πως συμβιβάζονται τα δύο αυτά αποτελέσματα;
24. Θεωρήστε ένα δίσκο του Euler επί ενός επιπέδου (βλ. Σχ. 50). Μελετήστε την ευστάθεια των εξής κινήσεων του δίσκου α) ο δίσκος κυλίεται με σταθερές γωνιακές ταχύτητες $\omega_3 \neq 0$, $\Omega = 0$ και υπό γωνία $\theta = \pi/2$, β) ο δίσκος περιστρέφεται περί μία κατακόρυφο διάμετρο με $\Omega \neq 0$ ενώ είναι $\omega_3 = 0$ και $\theta = \pi/2$, γ) ο δίσκος περιστρέφεται με σταθερές γωνιακές ταχύτητες $\Omega = \sqrt{g/(ka \sin \theta_0)}$, $\omega_3 = 0$ περί το ΚΜ, που είναι ακίνητο, υπό γωνία $\theta = \theta_0$.
25. Θεωρήστε ότι ένα ποδήλατο είναι μία ρόδα μάζας m που μεταφέρει ένα άτομο και ένα σκελετό μάζας M . Ποιά είναι η ελάχιστη ταχύτητα του ποδηλάτου με την οποία επιτυγχάνεται ευστάθεια της ευθύγραμμης κίνησης λόγω της περιστροφής της ρόδας του ποδηλάτου όταν είναι $M/m = 100$ και η ακτίνα της ρόδας $a = 0.3$ m;