

# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ



## Τμήμα Φυσικής Εξετάσεις επί Πτυχίω Μηχανικής II 13 Μαρτίου 2026

Απαντήστε στα ακόλουθα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Σύνολο μονάδων 110.

### Πρόβλημα Α [40 μονάδες]

Ένα σωματίδιο μάζας  $m = 1$  κινείται σε μία διάσταση υπό την επίδραση μιας δύναμης που προκύπτει από κάποια δυναμική ενέργεια. Το σωματίδιο ξεκινά από το σημείο  $x_1 = 0$  τη χρονική στιγμή  $t_1 = 0$  και καταλήγει στο σημείο  $x_2 = 1$  τη χρονική στιγμή  $t_2 = \pi/2$ .

- (α) Περιγράψτε συνοπτικά τη διαδικασία που θα ακολουθούσατε προκειμένου να υπολογίσετε την τιμή της δράσης του σωματιδίου, που αντιστοιχεί στη φυσική του διαδρομή από το  $x_1$  στο  $x_2$ . **[10 μονάδες]**
- (β) Υπολογίστε τη δράση αν το σωματίδιο είναι ελεύθερο. **[10 μονάδες]**
- (γ) Υπολογίστε τη δράση αν το σωματίδιο κινείται σε πεδίο με δυναμική ενέργεια  $V(x) = x^2/2$ . [Δίδεται η ταυτότητα:  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$ .] **[15 μονάδες]**
- (δ) Η σχέση μεταξύ των δύο τιμών που βρήκατε (δηλαδή το ποια από τις δύο είναι μεγαλύτερη), συνδέεται με την αρχή της ελάχιστης δράσης; Σχολιάστε σύντομα. **[5 μονάδες]**

### Πρόβλημα Β [35 μονάδες]

Ένα φορτισμένο σωματίδιο με μάζα  $m$  και φορτίο  $Q$  είναι δεσμευμένο να κινείται πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια. Στο χώρο υπάρχει ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης  $B$  με κατεύθυνση παράλληλη στην επιφάνεια. Η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου είναι η  $x$ , ενώ η κάθετη διεύθυνση στο επίπεδο είναι η  $z$ .

- (α) Ελέγξτε κατά πόσο το συγκεκριμένο μαγνητικό πεδίο θα μπορούσε να περιγραφεί μέσω ενός ανυσματικού δυναμικού της μορφής  $\vec{A} = B(0, 0, y)$  σε καρτεσιανές συντεταγμένες  $x, y, z$ . [Στο χώρο δεν υπάρχει ηλεκτρικό, ούτε βαρυτικό πεδίο.] **[10 μονάδες]**
- (β) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του σωματιδίου χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστή Lagrange για να περιγράψετε τον δεσμό κίνησης του σωματιδίου επί του επιπέδου. **[15 μονάδες]**
- (γ) Λύνοντας τις εξισώσεις Euler-Lagrange δείξτε ότι η παρουσία του μαγνητικού πεδίου δεν αλλάζει καθόλου την κίνηση του σωματιδίου (αυτήν, δηλαδή, που θα εκτελούσε αν απουσίαζε το μαγνητικό πεδίο). Τι κίνηση εκτελεί το σωματίδιο και σε ποια περίπτωση η αντίδραση του επιπέδου μηδενίζεται; **[10 μονάδες]**

## Πρόβλημα Γ [35 μονάδες]

Η Χαμιλτονιανή ενός συστήματος δίδεται από την έκφραση:

$$H = p_1^2 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{4}$$

- (α) Τι διάσταση έχει ο χώρος των φάσεων στον οποίον εξελίσσεται το σύστημα; Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος (χωρίς να τις λύσετε). **[10 μονάδες]**
- (β) Υπολογίστε τη Λαγκρανζιανή  $L$  από την οποία προέρχεται η παραπάνω Χαμιλτονιανή. Στη συνέχεια υπολογίστε την  $\{L, H\}$ . Είναι η  $L$  σταθερή; **[10 μονάδες]**
- (γ) Κάποιος υποστηρίζει ότι η Λαγκρανζιανή αυτή και επομένως και η Χαμιλτονιανή περιγράφει δύο σωματίδια ίδιας μάζας  $m$  (το καθένα) που κινούνται σε μια ευθεία, έστω επί του άξονα  $y$  και συνδέονται με ένα ελατήριο σταθεράς  $k$ . Δείξτε ότι έχει δίκιο, κατασκευάζοντας τις εκφράσεις  $y_1(x_1, x_2)$   $y_2(x_1, x_2)$  που συνδέουν τις θέσεις των σωματιδίων με τις συντεταγμένες  $x_1, x_2$  της  $H$  και της  $L$ . **[10 μονάδες]**
- (δ) Υπολογίστε την σταθερά  $k/m$  και την συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωματιδίων. **[5 μονάδες]**

Καλή Επιτυχία