



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Μηχανικής II
16 Σεπτεμβρίου 2026

Απαντήστε στα ακόλουθα 4 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Σύνολο μονάδων 120.

Πρόβλημα Α [30 μονάδες]

Ένα σωματίδιο μάζας $m = 1$ και φορτίου Q κινείται στο χώρο υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου που περιγράφεται από ένα ανυσματικό δυναμικό της μορφής $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}}A_z(\rho)$. Η συγκεκριμένη συνάρτηση έχει τη μορφή $A_z(\rho) = -B_0 R \log(\rho/R)$, με B_0, R θετικές σταθερές. Ο στροβιλισμός σε κυλινδρικές συντεταγμένες ενός διανυσματικού μεγέθους $\mathbf{F}$ που έχει μόνο z συνιστώσα υπολογίζεται μέσω της ακόλουθης έκφρασης:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (\hat{\mathbf{z}}F_z) = \frac{\hat{\rho}}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \hat{\phi} \frac{\partial F_z}{\partial \rho}$$

- (1) Μπορείτε να εκτιμήσετε τι είδους ρεύμα δημιουργεί ένα τέτοιο μαγνητικό πεδίο; [5 μονάδες]
- (2) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του εν λόγω φορτισμένου σωματιδίου σε κυλινδρικές συντεταγμένες, ως συνάρτηση των $\rho, \phi, z, \dot{\rho}, \dot{\phi}, \dot{z}$. Ελέγξτε αν υπάρχουν κάποιες κυκλικές μεταβλητές και υπολογίστε τις αντίστοιχες διατηρούμενες ορμές. [7 μονάδες]
- (3) Γράψτε (χωρίς να λύσετε) τη διαφορική εξίσωση που διέπει την $\rho(t)$, χρησιμοποιώντας τις διατηρούμενες ποσότητες που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. [10 μονάδες]
- (4) Υποθέστε ότι αρχικά το σωματίδιο βρισκόταν στη θέση $\rho(0) = R, \phi(0) = 0, z(0) = 0$ και είχε ταχύτητα $\dot{\rho}(0) = 0, \dot{\phi}(0) = \Omega, \dot{z}(0) = 0$. Ξαναγράψτε την προηγούμενη εξίσωση στη μορφή $\ddot{\psi} = -dV(\psi)/d\psi$ χρησιμοποιώντας τη βοηθητική μεταβλητή $\psi = \rho/R$ και κατασκευάζοντας την κατάλληλη συνάρτηση $V(\psi)$ [υπόδειξη: $d(\log(x)^2)/dx = 2 \log(x)/x$]. Στη συνέχεια αναδιαμορφώστε την παραπάνω εξίσωση κίνησης στη μορφή:

$$\dot{\psi}^2/2 + V(\psi) = E = \text{σταθ}$$

και υπολογίστε την τιμή της E , από τις αρχικές συνθήκες. Περιγράψτε ποιοτικά την εξέλιξη της $\rho(t) = R\psi$, καθώς και της $z(t)$. [8 μονάδες]

Πρόβλημα Β [30 μονάδες]

Ένα σωματίδιο με μάζα $m = 1$ κινείται σε μία διάσταση στο δυναμικό

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ V_0, & \text{αν } x \in [0, 1) \\ \infty, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Αρχικά το σωματίδιο βρισκόταν στη θέση $x(0) = -1$ και τελικά, αφού κνηθεί, επιστρέφει και πάλι (τη χρονική στιγμή $T = 2$) στην ίδια θέση $x(2) = -1$:

- (1) Εξηγήστε γιατί υπάρχουν δύο το πολύ πιθανές ενέργειες που θα μπορούσε να έχει το σωματίδιο ώστε να επιτρέπεται αυτή η κίνηση. [5 μονάδες]

- (2) Μπορείτε να εκτιμήσετε ποια είναι η ελάχιστη τιμή της V_0 , ώστε να υπάρχουν ακριβώς 2 ενέργειες που είναι συμβατές με αυτή την κίνηση; Τι σχέση έχουν οι δύο αυτές τιμές της ενέργειας με την τιμή της V_0 ; **[7 μονάδες]**
- (3) Δείξτε ότι αν η τιμή του V_0 είναι $27/8$, τότε οι 2 προαναφερθείσες ενέργειες είναι $E_1 = 1/2$ και $E_2 = 9/2$ επιβεβαιώνοντας ότι αυτές είναι συμβατές με την υποτιθέμενη κίνηση που ικανοποιεί τη διατήρηση της ενέργειας. Ποια είναι η αντίστοιχη δράση των δύο δυνατών διαδρομών; **[10 μονάδες]**
- (4) Αν αλλάξει λίγο η κίνηση της 1ης διαδρομής (αυτής που αντιστοιχούσε σε νευτώνεια ενέργεια E_1) έτσι ώστε η κίνηση να μην είναι νευτώνεια και η άφιξη στο $x = 0$ να συμβαίνει όχι τη χρονική στιγμή $t = 1$ αλλά την ελαφρώς διαφορετική χρονική στιγμή $t = 1 - \delta$ με $0 < \delta \ll 1$ πόσο θα άλλαζε η δράση; Είναι συμβατό το αποτέλεσμα με την αρχή στάσιμης δράσης; Θα είχε νόημα να ορίσουμε την ενέργεια αυτής της κίνησης; **[8 μονάδες]**

Πρόβλημα Γ [30 μονάδες]

Η Λαγκρανζιανή ενός σωματιδίου έχει τη μορφή $L = \dot{x}^2 + x^2$.

- (1) Υπολογίστε τη Χαμιλτονιανή του και βρείτε τη διάσταση του χώρου των φάσεων που εξελίσσεται το σύστημα. **[10 μονάδες]**
- (2) Αν το σωματίδιο βρισκόταν αρχικά στη θέση $x(0) = 0$ και είχε ταχύτητα $\dot{x}(0) = 1$ ποια η αρχική τιμή της Χαμιλτονιανής; Διατηρείται η τιμή αυτή κατά την κίνηση του σωματιδίου; Διατηρείται η τιμή της L ; **[10 μονάδες]**
- (3) Αφού υπολογίστε μέσω των εξισώσεων Hamilton τις $x(t)$, $p(t)$, σχεδιάστε την τροχιά του σωματιδίου στο χώρο των φάσεων **[10 μονάδες]**

Πρόβλημα Δ [30 μονάδες]

Η Λαγκρανζιανή ενός φυσικού συστήματος με 2 βαθμούς ελευθερίας έχει τη μορφή

$$L = \dot{x}_1 \dot{x}_2 - f(x_1 x_2),$$

όπου $f(z)$ μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση του z .

- (1) Ποια η κατάσταση ισορροπίας του συστήματος; Γραμμικοποιήστε τη Λαγκρανζιανή γύρω από αυτή την κατάσταση. **[10 μονάδες]**
- (2) Γράψτε τους πίνακες κινητικής και δυναμικής ενέργειας του συστήματος και υπολογίστε τις ιδιοσυχνότητες αυτού. **[10 μονάδες]**
- (3) Αφού βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις του συστήματος, δείξτε ότι αν $x_1(0) = 2x_2(0)$ και $\dot{x}_1(0) = 2\dot{x}_2(0)$, τότε θα είναι συνεχώς $x_1(t) = 2x_2(t)$ υπό κάποιες συνθήκες (σκεφθείτε αν η γραμμικοποίηση που κάνατε έχει κάποιες συνέπειες στο αποτέλεσμα σας). **[10 μονάδες]**

Λύσεις

Πρόβλημα Α

- (1) Βάσει της δοθείσας έκφρασης για το στροβιλισμό σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\hat{\mathbf{z}} A_z(\rho)) = -\hat{\phi} \frac{\partial A_z(\rho)}{\partial \rho} = \hat{\phi} B_0 \frac{R}{\rho} \quad (1)$$

Πρόκειται για το μαγνητικό πεδίο γύρω από έναν ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό με $B_0 R = \mu_0 I / (2\pi)$.

- (2)

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - Q B_0 R \log(\rho/R) \dot{z}$$

Κυκλικές μεταβλητές είναι οι ϕ, z με αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες τις ορμές $p_\phi = \rho^2 \dot{\phi}$, $p_z = \dot{z} - Q B_0 R \log(\rho/R)$.

- (3)

$$\ddot{\rho} = \rho \dot{\phi}^2 - Q B_0 \frac{R}{\rho} \dot{z}$$

και με τη βοήθεια των διατηρούμενων ορμών:

$$\ddot{\rho} = \frac{p_\phi^2}{\rho^3} - Q B_0 \frac{R}{\rho} [p_z + Q B_0 R \log(\rho/R)]$$

- (4) από τις συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες βρίσκουμε

$$p_\phi = R^2 \Omega, \quad p_z = 0 - Q B_0 R \log(R/R) = 0.$$

Έτσι η εξίσωση κίνησης για το ρ είναι

$$\ddot{\rho} = \frac{R^4 \Omega^2}{\rho^3} - Q B_0 \frac{R}{\rho} Q B_0 R \log(\rho/R) \Rightarrow \ddot{\psi} = \frac{\Omega^2}{\psi^3} - (Q B_0)^2 \frac{\log(\psi)}{\psi}$$

με $\psi = \rho/R$. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί εναλλακτικά να γραφεί στην προτεινόμενη μορφή ως

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{\psi}^2}{2} \right] = -\frac{d}{dt} \left[\frac{\Omega^2}{2\psi^2} + \frac{(Q B_0)^2}{2} (\log \psi)^2 \right] = -\frac{d}{dt} V(\psi)$$

Στη μορφή αυτή λαμβάνουμε μια εξίσωση διατήρησης “ενέργειας” της μορφής

$$\frac{\dot{\psi}^2}{2} + V(\psi) = E.$$

με

$$V(\psi) = \frac{\Omega^2}{2\psi^2} + \frac{(QB_0)^2}{2}(\log \psi)^2.$$

Η τιμή της “ενέργειας” E ισούται με την αρχική τιμή της $V(\psi(0)) = V(1) = \Omega^2/2$ αφού αρχικά $\dot{\psi}(0) = 0$. Επομένως η ψ (και ακολούθως και η ρ) ταλαντώνεται μεταξύ των δύο ακραίων τιμών: 1 και τη 2η λύση της

$$\frac{\Omega^2}{2\psi^2} + \frac{(QB_0)^2}{2}(\log \psi)^2 = \frac{\Omega^2}{2}.$$

Η 2η αυτή λύση $\psi_2 > 1$, που αντιστοιχεί σε πιο μεγάλη τιμή του ρ από την τιμή R . Αντίστοιχα η διατήρηση της $p_z = 0$, συνεπάγεται μια $\dot{z} = QB_0 R \log \psi$ και καθώς η ψ ταλαντώνεται στο διάστημα $[1, \psi_2]$ η ταχύτητα στο z ταλαντώνεται μεταξύ του 0 και του $QB_0 R \log \psi_2$ και μετά πάλι πίσω στο 0. Συνεπώς στο διάστημα που η ψ προχωρά από το 1 στο ψ_2 και επανέρχεται στο 1, η τιμή του z αυξάνεται συνεχώς μέχρι να ξαναμηδενιστεί η $\dot{z}$ όταν $\psi = 1$. Η κίνηση του σωματιδίου λοιπόν είναι μια περιελισσόμενη έλικα (γύρω από τον άξονα z) όχι σταθερής ακτίνας, όπου η έλικα σταματά να “ανέρχεται” κάθε φορά που η έλικα επανέρχεται στην αρχική ακτίνα.

Πρόβλημα Β

- (1) Υπάρχουν 2 δυνατές περιπτώσεις ενέργειας (εφόσον αυτές οδηγούν σε συνεπείς κινήσεις με τις δοθείσες αρχική και τελική θέση, ενώ η περίπτωση της ακινησίας, δλδ μηδενικής ενέργειας, αποκλείεται από την εκφώνηση). Η μια περίπτωση είναι η ενέργεια να είναι $E_1 < V_0$, οπότε τότε έχουμε κίνηση στο διάστημα $[-1, 0)$ και η δεύτερη περίπτωση είναι η ενέργεια να είναι $E_2 < V_0$, οπότε τότε έχουμε κίνηση στο διάστημα $[-1, 1)$. Αν η ενέργεια είναι λίγο παραπάνω ή λίγο παρακάτω από τις δοθείσες η ταχύτητα κίνησης στο εκάστοτε επιτρεπόμενο διάστημα θα είναι γενικά μεγαλύτερη ή αντίστοιχα μικρότερη, οπότε ο αντίστοιχος χρόνος θα είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος του 2.
- (2) Όμως, αν το V_0 είναι αρκετά μικρό και μια ενέργεια μόλις μικρότερη του V_0 δεν είναι αρκετή ώστε η κίνηση να επιτευχθεί εντός του χρονικού διαστήματος 2, δεν θα είναι συμβατή με την κίνηση η ενέργεια E_1 . Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε μόνο μια δυνατή ενέργεια. Επομένως $E_1 = (1/2)v^2 < V_0$ με $v = \pm 1$ αφού το σωματίδιο κινείται αποκλειστικά στο διάστημα $[-1, 0)$. Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε $V_0 > 1/2$. Όπως επισημάναμε στο ερώτημα (1) θα πρέπει η $E_2 > V_0$ ώστε να υπάρξει και άλλη δυνατή κίνηση στο διάστημα $[-1, 1)$. Για την ενέργεια αυτή θα πρέπει η κίνηση στο πρώτο διάστημα να έχει ταχύτητα $v_1 = \pm\sqrt{2E_2}$ και στο δεύτερο διάστημα $v_2 = \pm\sqrt{2(E_2 - V_0)}$ με αντίστοιχους χρόνους κίνησης $\tau_1 = 2/|v_1|$, $\tau_2 = 2/|v_2|$ με $\tau_1 + \tau_2 = 2$.
- (3) Σύμφωνα με τα προηγούμενα $E_1 = 1/2$ και αν θέσουμε $E_2 = 9/2$, βρίσκουμε $v_1 = \pm\sqrt{2 \cdot (9/2)} = \pm 3$ και $v_2 = \pm\sqrt{2(9/2 - 27/8)} = \pm 3/2$. Οι αντίστοιχοι χρόνοι είναι $\tau_1 = 2/3$, $\tau_2 = 4/3$ που έχουν άθροισμα 2. Όπως προαναφέρθηκε δεν μπορεί να υπάρξει άλλου είδους κίνηση από

αυτές τις 2. Οι αντίστοιχες δράσεις είναι $S_1 = (v^2/2)2 = 1$ και $S_2 = (v_1^2/2)\tau_1 + (v_2^2/2 - V_0)\tau_2 = 0$.

(4) Η μη νεύτωνα αυτή κίνηση θα έχει $v_{\rightarrow} = 1/(1 - \delta)$ και $v_{\leftarrow} = -1/(1 + \delta)$, οπότε

$$S' = (1/2)\frac{1 - \delta}{(1 - \delta)^2} + (1/2)\frac{1 + \delta}{(1 + \delta)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \delta} + \frac{1}{1 + \delta} \right) = \frac{1}{1 - \delta^2} = 1 + \delta^2 + \mathcal{O}(\delta^4)$$

που είναι συμβατή με την αρχή στάσιμης δράσης. Προφανώς μια τέτοια μη φυσική διαδρομή με μεταβαλλόμενη ταχύτητα δεν αντιστοιχεί σε κάποια ενέργεια. Η ενέργεια έχει νόημα μόνο για φυσικές διαδρομές.

Πρόβλημα Γ

(1) $p = \partial L / \partial \dot{x} = 2\dot{x}$, οπότε

$$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{2} - \left(\frac{p^2}{4} + x^2 \right) = \frac{p^2}{4} - x^2$$

Ο χώρος των φάσεων έχει διάσταση 2. Πρόκειται για το επίπεδο x, p .

(2) $p(0) = 2$ οπότε $H(0) = 1$. Προφανώς αυτή διατηρείται αφού η Χαμιλτονιανή είναι χρονοανεξάρτητη και επομένως $dH/dt = \{H, H\} = 0$. Όσο για την $L = (p/2)^2 + x^2$, οπότε

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \{L, H\} = \{(p/2)^2 + x^2, (p/2)^2 - x^2\} \\ &= -\{(p/2)^2, x^2\} + \{x^2, (p/2)^2\} \\ &= 2\{x^2, (p/2)^2\} = 4xp\{x, p\} = 4xp \neq 0 \end{aligned}$$

(3)

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/2, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2x$$

Με μια 2η παραγωγή βρίσκουμε $\ddot{x} = x$, οπότε $x = x(0) \cosh t + \dot{x}(0) \sinh t = \sinh t$ και από τη σχέση ορμής-ταχύτητας $p = 2\dot{x} = 2 \cosh t$. Συνεπώς η τροχιά στο χώρο των φάσεων είναι

$$(p/2)^2 - x^2 = 1$$

που δεν είναι άλλη από την υπερβολή (ο άνω κλάδος) που αντιστοιχεί στην $H = 1$.

Πρόβλημα Δ

(1) $\partial V / \partial x_1 = \partial V / \partial x_2 = 0$ οπότε

$$f'(x_1 x_2) x_2 = f'(x_1 x_2) x_1 = 0$$

με $f' > 0$. Επομένως το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $x_{1e} = x_{2e} = 0$. Θεωρώντας μικρές αποκλίσεις από τις τιμές ισορροπίας η L είναι

$$L \simeq \dot{x}_1 \dot{x}_2 - f(0) - f'(0)x_1 x_2$$

αγνοώντας όρους ανώτερης τάξης. Επομένως

$$L_{\text{γραμ}} = \dot{x}_1 \dot{x}_2 - f'(0)x_1 x_2 = \frac{1}{2} 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 - \frac{1}{2} 2f'(0)x_1 x_2$$

αφού ο σταθερός όρος δεν αλλάζει το φυσικό περιεχόμενο και μπορεί να αγνοηθεί.

(2) Από τη γραμμικοποιημένη L βρίσκουμε άμεσα

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = f'(0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

που οδηγούν στις ιδιοσυχνότητες $\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$ δηλαδή $(f'(0) - \omega^2)^2 = 0$, με εκφυλισμένες ιδιοσυχνότητες $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{f'(0)}$.

(3) Οι δύο αυτές κοινές ιδιοσυχνότητες οδηγούν σε οποιαδήποτε ανεξάρτητα διανύσματα ως ιδιοκαταστάσεις. Ας θεωρήσουμε ως τέτοια το $(1, 0)^\top$ και το $(0, 1)^\top$. Επομένως

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} [C_1 \cos(\sqrt{f'(0)}t) + S_1 \sin(\sqrt{f'(0)}t)] + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} [C_2 \cos(\sqrt{f'(0)}t) + S_2 \sin(\sqrt{f'(0)}t)]$$

Αν θέσουμε $C_1 = 2C_2$ και $S_1 = 2S_2$ ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες και είναι συνεχώς $x_1 = 2x_2$. Όλα αυτά ισχύουν όμως εφόσον η γραμμικοποιημένη Λαγκρανζιανή περιγράφει ικανοποιητικά το σύστημα, γεγονός το οποίο συμβαίνει μόνο αν $C_1, C_2, S_1 \sqrt{f'(0)}, S_2 \sqrt{f'(0)}$ είναι πολύ μικροί αριθμοί.