

**Ι. Γ. ΣΤΡΑΤΗΣ**

**ΜΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ  
ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ  
ΤΩΝ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ**

**(Μη Γραμμικές Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις)**

**Σημειώσεις Παραδόσεων**

**ΑΘΗΝΑ 1992**

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή	3
1. Διάγραμμα Φάσεων-Αυτόνομα Συστήματα	4
2. Τύποι Σημείων Ισορροπίας-Ευστάθεια	10
3. Ευστάθεια Γραμμικών Συστημάτων	22
4. Αυτόνομα Γραμμικά Συστήματα στο Επίπεδο	30
5. Γραμμικοποίηση σε ένα Σημείο Ισορροπίας	44
6. Κανονικά Σημεία	57
7. Η Άμεση ή Δεύτερη Μέθοδος του Lyapunov	61
8. Πρώτα Ολοκληρώματα	82
9. Ύπαρξη Περιοδικών Λύσεων	88
10. Διακλαδώσεις	101
11. Θεωρία Καταστροφών	120
12. Χάος	134
13. Εφαρμογές	153
14. Ασκήσεις	167
Βιβλιογραφία	180

Οι σημειώσεις αυτές αποτελούν μια πρώτη εισαγωγή στην ποιοτική (γεωμετρική) θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, ή, αλλιώς, στις μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις· βασίζονται στις παραδόσεις του συγγραφέα για το μάθημα "Διαφορικές Εξισώσεις ΙΙ" του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών.

Ο στόχος τους είναι να αποτελέσουν συμπλήρωμα στην παρακολούθηση των παραδόσεων και δεν έχουν αξιώσεις πληρότητας. Συνίσταται η παράλληλη μελέτη και άλλων συγγραμμάτων, όπως, π.χ. αυτά της βιβλιογραφίας.

Η επιλογή της ύλης -εκτός από κάποια βασικά πλαίσια- δεν μπορεί παρά να είναι υποκειμενική και αποσκοπεί σε μια πρώτη εξοικείωση του αναγνώστη με τις έννοιες αυτού του γνωστικού αντικείμενου· έχει γίνει και μια απόπειρα εισαγωγής σε θέματα μεγάλου σύγχρονου ερευνητικού ενδιαφέροντος, όπως η θεωρία διακλαδώσεων και η χαοτική δυναμική.

Επιθυμώ να ευχαριστήσω και από αυτή τη θέση το Σπύρο Κωτσάκη, για τη συμβολή του με συζητήσεις, παρατηρήσεις και υποδείξεις στη διαμόρφωση αυτών των σημειώσεων και ειδικότερα του κεφαλαίου 12.

Ευχαριστώ, ακόμα, το συνάδελφο Γρηγόρη Καλογερόπουλο για χρήσιμες συζητήσεις, καθώς και τους φοιτητές που παρακολούθησαν τις παραδόσεις μου κατά το ακαδημαϊκό έτος 1990-91 και συνέβαλαν με τη συμμετοχή τους στην παρούσα μορφή των σημειώσεων.

Αθήνα, Οκτώβριος 1991  
Ι.Σ.

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην ιστορική ανάπτυξη της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων, έχουν εμφανιστεί δύο κύριες τάσεις. Η πρώτη και παλαιότερη χαρακτηρίζεται από τις προσπάθειες εύρεσης λύσεων, είτε σε κλειστή μορφή-που σπανίως είναι δυνατή-ή με δυναμοσειρές. Στη δεύτερη, εγκαταλείπεται κάθε ελπίδα επίλυσης εξισώσεων με οποιονδήποτε παραδοσιακό τρόπο και το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην αναζήτηση ποιοτικών πληροφοριών για τη γενική συμπεριφορά των λύσεων. Αυτή η οπτική γωνία μας είναι "γνώριμη", από το εισαγωγικό μάθημα στις διαφορικές εξισώσεις, με τα θεωρήματα σύγκρισης και ταλάντωσης του Sturm, που αναφέρονται σε γραμμικές εξισώσεις. Η ποιοτική θεωρία για μη γραμμικές εξισώσεις είναι πολύ διαφορετική. Θεμελιώθηκε από τον Poincaré γύρω στο 1880, σε σχέση με το έργο του στην ουράνια μηχανική, και από τότε είναι αντικείμενο διαρκώς αυξανόμενου ενδιαφέροντος από την πλευρά των μαθηματικών, "καθαρών" και "εφαρμοσμένων". Ειδικά στις μέρες μας, βρισκόμαστε μπροστά σε μια νέα άνθηση, με νέα δεδομένα, ακόμα και νέα εντυπωσιακά ονόματα: Θεωρία Καταστροφών, Χάος:πολλή έρευνα, περισσότερη (και όχι πάντοτε σοβαρή) συζήτηση και έντονη (συχνά καλά τεκμηριωμένη) διχογνωμία, είναι χαρακτηριστικά αυτών των κατευθύνσεων. Μια μικρή εισαγωγή σε τέτοια θέματα, θα επιχειρήσουμε στο τέλος αυτών των σημειώσεων.

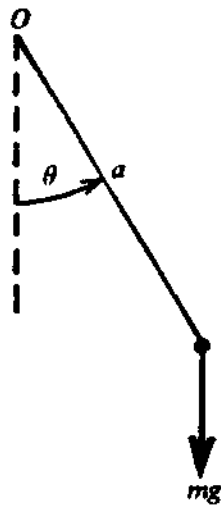
## 1. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΦΑΣΕΩΝ-ΑΥΤΟΝΟΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑ

Σε αυτή την παράγραφο εισάγουμε μια γεωμετρική έννοια, το διάγραμμα φάσεων, που χρησιμοποιείται για την απόκτηση, απ'ευθείας από τη διαφορική εξίσωση, πληροφοριών όπως η ισορροπία, η περιοδικότητα, η απεριόριστη αύξηση, η ευστάθεια κλπ. Το κλασσικό πρόβλημα του εκκρεμούς δείχνει πως το διάγραμμα φάσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποκαλύψει όλα τα κύρια χαρακτηριστικά των λύσεων μιας συγκεκριμένης διαφορικής εξίσωσης.

Η εξίσωση κίνησης του απλού εκκρεμούς, όταν δεν υπάρχει αντίσταση, είναι

$$m\alpha^2\theta'' + mg\alpha\eta\mu\theta = 0$$

όπου  $m, \alpha, \Theta$  είναι στοιχεία της κίνησης (πρβλ. Σχ.1.1).



Σχήμα 1.1.

Αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως

$$m\alpha^2\theta' \frac{d\theta'}{d\theta} + mg\alpha\eta\mu\theta = 0$$

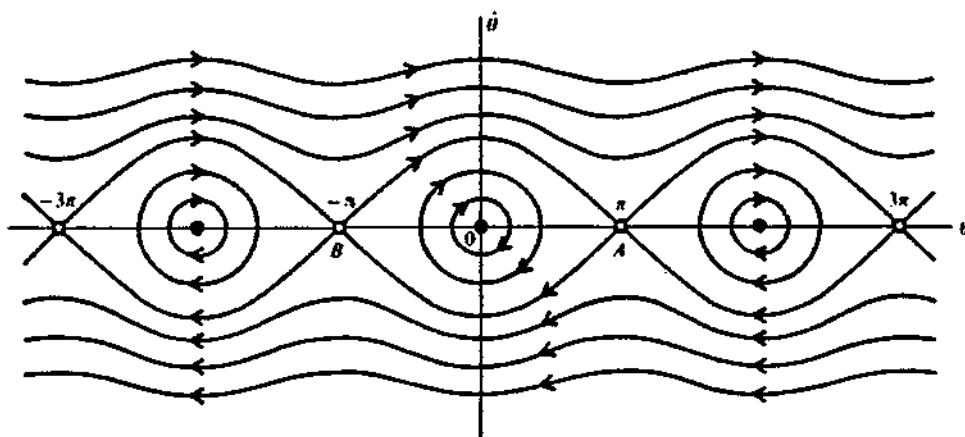
και συσχετίζει το  $\Theta'$  και το  $\Theta$ , αντί του  $\Theta$  και του  $t$ . Ολοκληρώνοντας ως προς  $\Theta$  παίρνουμε

$$\frac{1}{2} m a^2 (\theta')^2 - m g a \sin \theta = c \quad (1.2)$$

Η εξίσωση (1.2) εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας (οι όροι στο αριστερό μέρος της, είναι η κινητική και δυναμική ενέργεια του εκκρεμούς, αντιστοίχως). Η τιμή του  $c$  για μια συγκεκριμένη κίνηση, προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες: τις τιμές του  $\Theta$  και του  $\Theta'$  για  $t=0$ . Διαλέγοντας διαφορετικές τιμές για το  $c$ , μπορούμε να βρούμε τη σχέση των  $\Theta'$  και  $\Theta$  για κάθε δυνατή κίνηση.

Είναι γνωστό ότι η (1.2), ως διαφορική εξίσωση του  $\Theta$  ως προς  $t$ , δεν μπορεί να λυθεί με στοιχειώδεις συναρτήσεις και ως εκ τούτου δεν είναι εύκολο να πάρουμε μια χρήσιμη αναπαράσταση του  $\Theta$  ως συνάρτηση του χρόνου.

Η (1.2) μπορεί να αναπαρασταθεί σε ένα διάγραμμα. Καθορίζουμε ένα καρτεσιανό επίπεδο φάσεων, με άξονες  $\Theta$  και  $\Theta'$  (Σχ. 1.2) και σχεδιάζουμε τη μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων που δίνονται από την (1.2) για διαφορετικές τιμές του  $c$ .



Σχήμα 1.2.

Ένα δεδομένο ζεύγος τιμών  $(\Theta, \Theta')$  λέγεται κατάσταση του συστήματος (στην περίπτωση μας, του εκκρεμούς) και το διάγραμμα δείχνει το πως εξελίσσεται, με την πάροδο του χρόνου, οποιαδήποτε κατάσταση. Γνωρίζουμε ότι μια δεδομένη κατάσταση, προσδιορίζει όλες τις επόμενες της, αφού μπορεί να θεωρηθεί ως αρχική συνθήκη για την επόμενη κατάσταση.

Οι καμπύλες που έχουν σχεδιαστεί στο Σχ. 1.2 είναι γνωστές ως τροχιές (orbits) ή ολοκληρωτικές καμπύλες της (1.1) και η πλήρης

εικόνα λέγεται **διάγραμμα φάσεων** του συστήματος. Σε κάθε τροχιά αντιστοιχεί μια διεύθυνση, που υποδεικνύεται με ένα βέλος στο Σχ. 1.2, και δείχνει πως μεταβάλλεται το σύστημα καθώς αυξάνει ο χρόνος· η διεύθυνση των βελών προσδιορίζεται με το να παρατηρήσουμε ότι όταν το  $\Theta'$  είναι θετικό (αρνητικό), το  $\Theta$  πρέπει να αυξάνεται (μειώνεται) με την πάροδο του χρόνου.

Θεωρούμε κατ'αρχή τις δυνατές καταστάσεις φυσικής ισορροπίας του εκκρεμούς. Η προφανής είναι όταν το εκκρεμές κρέμεται χωρίς να ταλαντώνεται· τότε  $\Theta=0$ ,  $\Theta'=0$ , που αντιστοιχεί στην αρχή των αξόνων. Η αντίστοιχη συνάρτηση  $\Theta(t)=0$  είναι μια απολύτως "νόμιμη" σταθερή λύση της (1.1). Η τροχιά εκφυλίζεται σε ένα σημείο. Μια δεύτερη θέση ισορροπίας, είναι η κατάσταση  $\Theta=\pi$ ,  $\Theta'=0$ . Πρόκειται για μια άλλη σταθερή λύση που παριστάνεται με το σημείο Α στο διάγραμμα φάσεων. Η ίδια φυσική συνθήκη περιγράφεται από την κατάσταση  $\Theta=-\pi$ ,  $\Theta'=0$ , που παριστάνεται με το σημείο Β. Η κατάσταση  $\Theta=k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\Theta'=0$ , αντιστοιχεί σε μια από τις δύο αυτές συνθήκες ισορροπίας. Στην πραγματικότητα, στο Σχ. 1.2 έχει σχεδιασθεί μέρος μόνο του διαγράμματος φάσεων, το σχέδιο του οποίου επαναλαμβάνεται περιοδικά.

Αφού τα σημεία Ο,Α,Β αναπαριστούν καταστάσεις φυσικής ισορροπίας, ονομάζονται **σημεία ισορροπίας** ή **κρίσιμα σημεία** του διαγράμματος φάσεων.

Ας θεωρήσουμε τώρα την οικογένεια των κλειστών καμπύλων που βρίσκονται κοντά γύρω από το 0. Αυτές δείχνουν περιοδικές κινήσεις κατά τις οποίες το εκκρεμές ταλαντώνεται μπρος-πίσω περί την κατακόρυφο. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι η μέγιστη τιμή που παίρνει το  $\Theta$  επί της καμπύλης. Για μικρά πλάτη, οι καμπύλες αναπαριστούν τις συνηθισμένες λύσεις της εξίσωσης του εκκρεμούς, όπου η (1.1) απλοποιείται με το να θέσουμε  $\eta\mu\Theta \approx \Theta$ . Οι τροχιές είναι σχεδόν ελλείψεις, στο πεδίο αυτό των μικρών πλατών.

Οι κυματιστές γραμμές στο πάνω και στο κάτω μέρος του Σχ. 1.2, επί των οποίων η  $\Theta'$  έχει σταθερό πρόσημο και η  $\Theta$  αυξάνεται ή μειώνεται συνεχώς, αντιστοιχούν σε κινήσεις με περιστροφή για το εκκρεμές. Οι διακυμάνσεις του  $\Theta'$  οφείλονται στη βαρυτική επίδραση και για τροχιές επί των οποίων το  $\Theta'$  είναι πολύ μεγάλο, αυτές οι διακυμάνσεις δεν γίνονται αντιληπτές: οι τροχιές γίνονται σχεδόν ευθείες παράλληλες με τον άξονα των  $\Theta$ .

Μπορούμε ακόμα να μελετήσουμε την ευστάθεια των δύο τυπικών σημείων ισορροπίας Ο και Α. Αν η αρχική κατάσταση μετακινηθεί ελαφρώς από το Ο, πηγαίνει σε μια από τις κοντινές κλειστές καμπύλες

και το εκκρεμές ταλαντώνεται, με μικρό πλάτος, περί το  $O$ . Χαρακτηρίζουμε τότε το σημείο ισορροπίας  $O$  ως ευσταθές. Αν η αρχική κατάσταση μετακινηθεί ελαφρώς από το  $A$  (την κατακόρυφα προς τα πάνω θέση ισορροπίας), θα πέσει σε μια τροχιά που μεταφέρει την κατάσταση, από την κατάσταση ισορροπίας  $A$  σε μια μεγάλη ταλάντωση ή σε κατάσταση περιστροφής (Σχ. 1.3). Αυτό σημείο ισορροπίας χαρακτηρίζεται ως ασταθές.

Θα ξεκινήσουμε, θεωρώντας δι-διάστατα συστήματα της μορφής

$$\begin{aligned}x' &= F(x,y) \\y' &= G(x,y)\end{aligned}\tag{1.3}$$

όπου  $x=x(t)$  και  $y=y(t)$  είναι άγνωστες βαθμωτές συναρτήσεις και οι  $F$  και  $G$  καθώς και οι πρώτες μερικές παράγωγοί τους είναι συνεχείς σε κάποιο τόπο  $\Omega$  του  $xy$ -επιπέδου.

Αυτά τα συστήματα λέγονται αυτόνομα καθόσο ούτε η  $F$  ούτε η  $G$  εξαρτώνται από το  $t$ . Αν θέσουμε  $z=(x,y)$  τότε η (1.3) είναι της μορφής

$$z' = H(z) = (F(x,y), G(x,y))$$

και οι προηγούμενες υποθέσεις εξασφαλίζουν, κατά τα γνωστά, την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων.

Μεταξύ των λόγων που θα μελετήσουμε συστήματα της μορφής (1.3), είναι ότι υπάρχει μια πληρέστερη θεωρία για αυτά, παρά για συστήματα μεγαλύτερης τάξης και ότι η γεωμετρία του επιπέδου και των επιπέδων καμπύλων μας επιτρέπει να έχουμε μια καλή εποπτεία της θεωρίας μας· επιπλέον η πολύ σημαντική αυτόνομη εξίσωση, δεύτερης τάξης

$$x'' + f(x, x') = 0$$

μπορεί να μελετηθεί, αναγόμενη στη μορφή (1.3) ως εξής

$$x' = y, \quad y' = -f(x,y)$$

Αρχίζουμε με μερικές απλές ιδιότητες των λύσεων του (1.3).

#### Λήμμα 1.1.

Αν η  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ,  $t \in (\alpha, \beta)$  είναι λύση του (1.3), τότε οι συναρτήσεις



$$x_1(t) = x(t+c) \quad , \quad y_1(t) = y(t+c)$$

είναι επίσης λύσεις του (1.3), για οποιαδήποτε πραγματική σταθερά  $c$ .

**Απόδειξη:** Είναι προφανές ότι  $x_1' = x'(t+c)$  και  $y_1' = y'(t+c)$ .

Έτσι

$$x_1' = x'(t+c) = F(x(t+c), y(t+c)) = F(x_1, y_1)$$

και  $y_1' = y'(t+c) = G(x(t+c), y(t+c)) = G(x_1, y_1),$

που σημαίνει ότι οι  $x_1, y_1$  είναι λύσεις το πεδίο ορισμού τους είναι το  $(\alpha-c, \beta-c)$ .

**Παρατήρηση 1.1.:** Η παραπάνω ιδιότητα δεν ισχύει, γενικώς, για μη αυτόνομα συστήματα· για παράδειγμα, η  $x(t) = e^t$ ,  $y(t) = te^t - e^t$  είναι λύση του συστήματος  $x' = x$ ,  $y' = tx$ . Όμως

$$y'(t+c) = (t+c)e^{t+c} \neq tx(t+c) = te^{t+c}, \text{ εκτός αν } c=0.$$

Καθώς μεταβάλλεται το  $t$ , μια λύση  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  του (1.3), περιγράφει παραμετρικά μια καμπύλη στον  $\Omega$ . Αυτή η καμπύλη λέγεται τροχιά του (1.3).

**Λήμμα 1.2.** Από τυχόν σημείο, διέρχεται το πολύ μια τροχιά.

**Απόδειξη:** Έστω  $C_1: x = x_1(t), y = y_1(t)$  και  $C_2: x = x_2(t), y = y_2(t)$  διαφορετικές τροχιές που έχουν ένα κοινό σημείο

$$(x_0, y_0) = (x_1(t_1), y_1(t_1)) = (x_2(t_2), y_2(t_2))$$

Τότε θα ισχύει  $t_1 \neq t_2$ , αφού -στην αντίθετη περίπτωση- παραβιάζεται το μονοσήμαντο των λύσεων. Από το Λήμμα 1.1, έχουμε ότι η

$$x(t) = x_1(t+t_1-t_2) \quad , \quad y(t) = y_1(t+t_1-t_2)$$

είναι λύση και το ότι

$$(x(t_2), y(t_2)) = (x_0, y_0)$$

συνεπάγεται πως -λόγω του μονοσήμαντου- ισχύει

$$(x(t), y(t)) = (x_2(t), y_2(t))$$

Η τελευταία αυτή σχέση σημαίνει ότι οι  $C_1$  και  $C_2$  συμπίπτουν: άτοπο.

**Παρατήρηση 1.2.:** Επισημαίνουμε τη διαφορά μεταξύ λύσεων και τροχιών του (1.3): μια τροχιά είναι μια καμπύλη στον  $\Omega$  που αναπαριστά-νεται παραμετρικά από περισσότερες της μιας λύσεις. Έτσι οι  $(x(t), y(t))$  και  $(x(t+c), y(t+c))$ ,  $c \neq 0$  είναι διαφορετικές λύσεις, αλλά αναπαριστάνουν παραμετρικά την ίδια καμπύλη.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια λύση  $x(t)=x_0, y(t)=y_0$ ,  $t \in (-\infty, +\infty)$  του (1.3), όπου  $x_0$  και  $y_0$  σταθερές. Είναι προφανές ότι από το  $(x_0, y_0)$  δεν μπορεί να περνάει καμιά τροχιά (αλλιώς θα παραβιασθεί το μονοσήμαντο). Επιπλέον, έχουμε

$$\begin{aligned} x' &= 0 = F(x_0, y_0) \\ y' &= 0 = G(x_0, y_0) \end{aligned}$$

αφού οι  $x(t)$  και  $y(t)$  είναι λύσεις. Αντιστρόφως, αν υπάρχει ένα σημείο  $(x_0, y_0)$  στον  $\Omega$ , για το οποίο  $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$ , τότε οι συναρτήσεις  $x(t)=x_0, y(t)=y_0, t \in (-\infty, +\infty)$  είναι μια λύση του (1.3).

**Ορισμός 1.1.** Ένα σημείο  $(x_0, y_0)$  του  $\Omega$ , στο οποίο ισχύει

$$F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$$

λέγεται **σημείο ισορροπίας** ή **κρίσιμο σημείο** του (1.3).

Η ακόλουθη, κινηματική εικόνα, είναι πολύ χρήσιμη: ας θεωρήσου-με το πεδίο διανυσμάτων  $V(x,y) = (F(x,y), G(x,y))$  με  $(x,y) \in \Omega$ . Τότε η (1.3) περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου  $(x,y)$  που η ταχύτητα του,  $(x',y')$ , δίνεται από το  $V(x,y)$  σε κάθε σημείο του  $\Omega$ . Οι τροχιές είναι σταθερές πορείες κατά μήκος των οποίων το σωματίδιο κινείται ανεξάρτητα από το σημείο εκκίνησης του και τα κρίσιμα σημεία είναι όντως σημεία ισορροπίας.

Έτσι ιδωμένο, ονομάζουμε τον  $\Omega$  **χώρο φάσεων** του συστήματος (1.3).

## 2. ΤΥΠΟΙ ΣΗΜΕΙΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ-ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Θεωρούμε ξανά το αυτόνομο σύστημα

$$\begin{aligned}x' &= F(x,y) \\y' &= G(x,y)\end{aligned}\quad (2.1)$$

και υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις  $F$  και  $G$  είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους σε όλο το  $xy$ -επίπεδο. Τα σημεία ισορροπίας του (2.1) μπορούν να βρεθούν από την επίλυση του συστήματος

$$F(x,y) = G(x,y) = 0$$

Υπάρχουν τέσσερεις απλοί τύποι σημείων ισορροπίας που συναντώνται συχνά, και θα τους περιγράψουμε εδώ ως προς την συμπεριφορά των κοντινών τους τροχιών. Χρειαζόμαστε, προηγουμένως, δύο ορισμούς.

Έστω  $(x_0, y_0)$  ένα μεμονωμένο σημείο ισορροπίας του (2.1). Αν η  $C: x=x(t), y=y(t)$  είναι μια τροχιά του (2.1), λέμε ότι η  $C$  προσεγγίζει το  $(x_0, y_0)$  καθώς  $t \rightarrow +\infty$ , αν

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_0 \quad (2.2)$$

Αν, επιπλέον, αληθεύει ότι είτε υπάρχει το όριο

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0} \quad (2.3)$$

είτε γίνεται  $+\infty$  ή  $-\infty$ , τότε λέμε ότι η  $C$  εισχωρεί στο  $(x_0, y_0)$  καθώς  $t \rightarrow +\infty$ .

**Παρατηρήσεις 2.1.** (i) Το πηλίκο στη σχέση (2.3) είναι η κλίση της ευθείας που ενώνει το σημείο  $(x_0, y_0)$  με το σημείο  $(x(t), y(t))$  και έτσι η επιπλέον απαίτηση σημαίνει ότι αυτή η ευθεία προσεγγίζει μια συγκεκριμένη διεύθυνση καθώς το  $t \rightarrow +\infty$ .

(ii) Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν η (2.2) ισχύει για κάποια λύση  $x(t), y(t)$ , τότε το  $(x_0, y_0)$  είναι αναγκαστικά σημείο ισορροπίας.

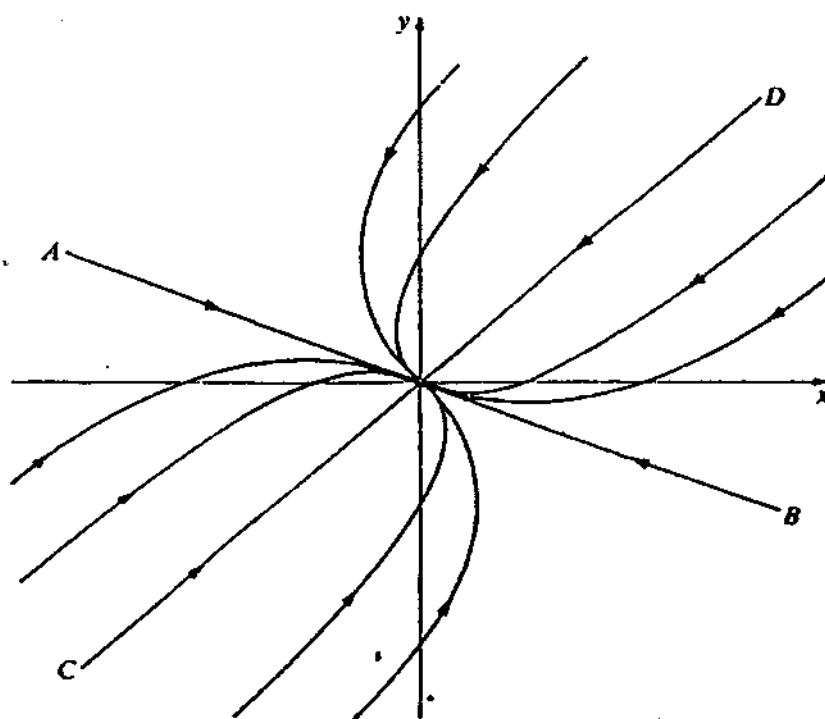
(iii) Οι παραπάνω ιδιότητες, είναι ιδιότητες της τροχιάς και είναι ανεξάρτητες της λύσης που χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση αυτής της τροχιάς.

(iv) Ανάλογα ορίζονται η προσέγγιση και η εισχώρηση όταν  $t \rightarrow -\infty$ .

Δίνουμε τώρα γεωμετρικές περιγραφές των τεσσάρων κυρίων τύπων σημείων ισορροπίας· σε όλες τις περιπτώσεις υποθέτουμε ότι το αντίστοιχο σημείο ισορροπίας είναι η αρχή των αξόνων  $O=(0,0)$ .

**ΚΟΜΒΟΙ:** Ένα σημείο ισορροπίας όπως αυτό του Σχ. 2.1 λέγεται **κόμβος**.

Κάθε τροχιά όταν  $t \rightarrow +\infty$  (ή  $t \rightarrow -\infty$ ) προσεγγίζει και εισχωρεί σε ένα τέτοιο σημείο. Για τον κόμβο του Σχ. 2.1 υπάρχουν τέσσερεις ημιευθειακές τροχιές, οι AO, BO, CO και DO που μαζί με το O συναποτελούν τις ευθείες AB και CD. Όλες οι υπόλοιπες τροχιές, μοιάζουν με τμήματα παραβολών και καθώς κάθε μια από αυτές τις τροχιές προσεγγίζει το O, η κλίση της προσεγγίζει εκείνη της ευθείας AB.



Σχήμα 2.1.

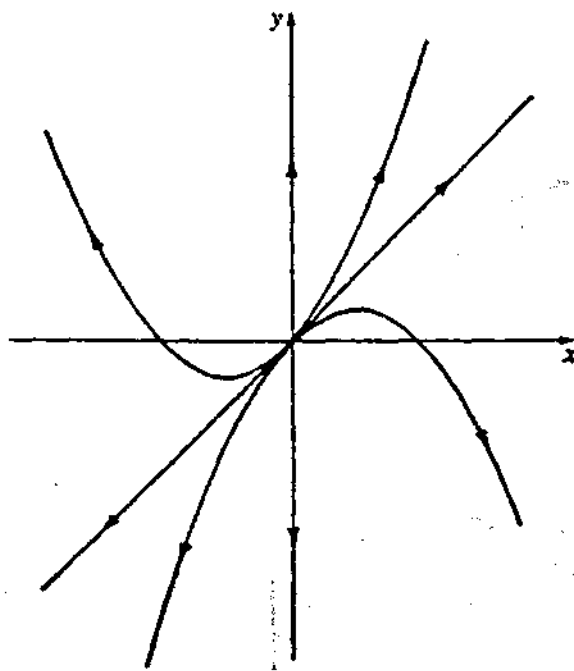
Παράδειγμα 2.1. Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -x + 2y \end{aligned} \quad (2.4)$$

Προφανώς, το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το  $(0,0)$  και η γενική λύση είναι

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^t \\ y &= c_1 e^t + c_2 e^{2t} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Όταν  $c_1=0$ , έχουμε  $x=0$  και  $y=c_2 e^{2t}$ . Τότε η τροχιά είναι ο θετικός (αρνητικός) ημιάξονας των  $y$  όταν  $c_2>0$  ( $c_2<0$ ) και κάθε τροχιά προσεγγίζει και εισχωρεί στο  $(0,0)$  καθώς  $t \rightarrow -\infty$ . Όταν  $c_2=0$ , έχουμε  $x=y=c_1 e^t$ . Η τροχιά είναι η ημιευθεία  $y=x$ ,  $x>0$  όταν  $c_1>0$  και η ημιευθεία  $y=x$ ,  $x<0$  όταν  $c_1<0$ . Και τώρα και οι δύο τροχιές προσεγγίζουν και εισχωρούν στο  $(0,0)$  όταν  $t \rightarrow -\infty$ .



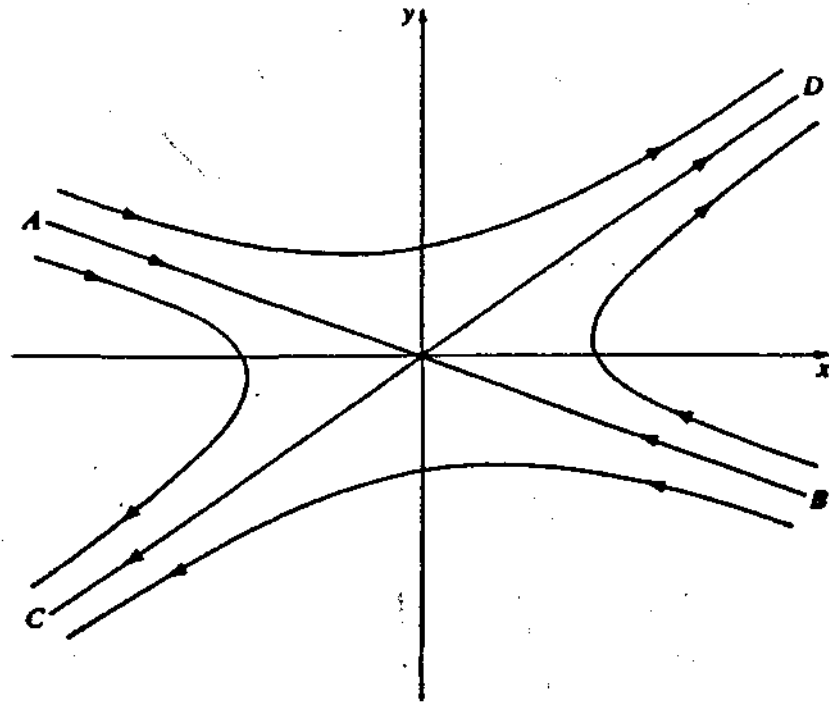
Σχήμα 2.2.

Όταν και το  $c_1$  και το  $c_2$  είναι διάφορα του 0, οι τροχιές βρίσκονται επί των παραβολών  $y = x + \frac{c_2}{c_1} x^2$  που περνάν από το  $(0,0)$  με

κλίση 1. Κάθε μια από αυτές τις τροχιές αποτελείται από ένα μόνο τμήμα μιας παραβολής, το τμήμα με  $x > 0$  όταν  $c_1 > 0$  και εκείνο με  $x < 0$  όταν  $c_1 < 0$ . Κάθε μια από αυτές τις τροχιές προσεγγίζει και εισχωρεί στο  $(0,0)$  καθώς  $t \rightarrow -\infty$ , όπως φαίνεται, άμεσα, από την (2.5). Είναι σαφές από τα παραπάνω, ότι το σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  είναι κόμβος.

**ΣΑΓΜΑΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ:** Ένα σημείο ισορροπίας όπως αυτό του Σχ. 2.3. λέγεται **σαγματικό σημείο**. Οι δύο ημιευθειακές τροχιές ΑΟ και ΒΟ προσεγγίζουν και εισχωρούν στο Ο, καθώς  $t \rightarrow +\infty$ , και οι δύο αυτές τροχιές βρίσκονται επί μιας ευθείας ΑΒ. Επίσης, οι δύο ημιευθειακές τροχιές CO και DO προσεγγίζουν και εισχωρούν στο Ο καθώς  $t \rightarrow -\infty$  και βρίσκονται επί μιας άλλης ευθείας CD.

Μεταξύ των τεσσάρων ημιευθειακών τροχιών υπάρχουν τέσσερις περιοχές, που κάθε μια περιέχει μια οικογένεια τροχιών που μοιάζουν με υπερβολές. Αυτές οι τροχιές δεν τείνουν στο Ο όταν  $t \rightarrow +\infty$  ή  $t \rightarrow -\infty$ , αλλά είναι ασυμπτωτικές ως προς τις ημιευθειακές τροχιές όταν  $t \rightarrow \pm\infty$ .



Σχήμα 2.3.

**ΚΕΝΤΡΑ:** Κέντρο είναι ένα σημείο ισορροπίας που περιβάλλεται από μια οικογένεια κλειστών τροχιών. Δεν προσεγγίζεται από καμιά τροχιά καθώς  $t \rightarrow +\infty$  ή  $t \rightarrow -\infty$ .

**Παράδειγμα 2.2.** Το μόνο σημείο ισορροπίας του συστήματος

$$\begin{aligned}x' &= -y \\ y' &= x\end{aligned}\tag{2.6}$$

Είναι το  $(0,0)$  και η γενική του λύση η

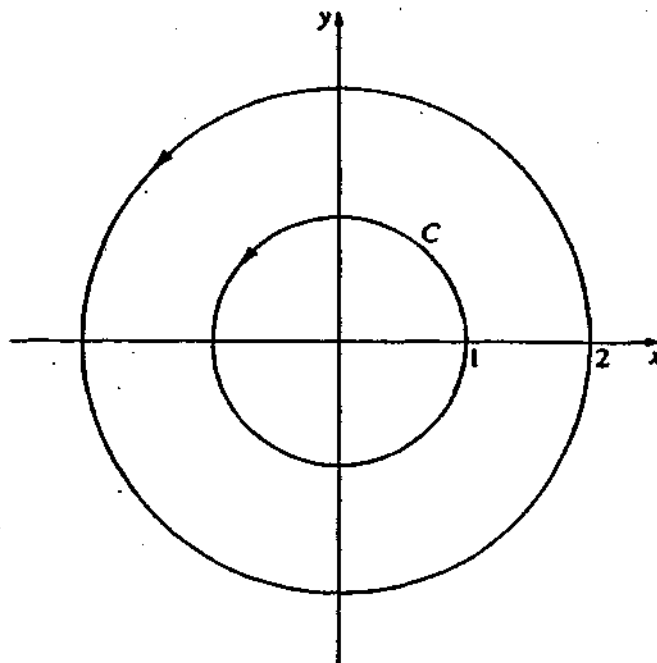
$$\begin{aligned}x &= -c_1 \eta \mu t + c_2 \sigma \nu t \\ y &= -c_1 \sigma \nu t + c_2 \eta \mu t\end{aligned}\tag{2.7}$$

Στην αρχική συνθήκη  $x(0)=1, y(0)=0$  αντιστοιχεί η λύση

$$x = \sigma \nu t, \quad y = \eta \mu t\tag{2.8}$$

ενώ στην αρχική συνθήκη  $x(0)=0, y(0)=-1$  η λύση

$$x = \eta \mu t = \sigma \nu \left( t - \frac{\pi}{2} \right) \quad , \quad y = -\sigma \nu t = \eta \mu \left( t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.9)$$

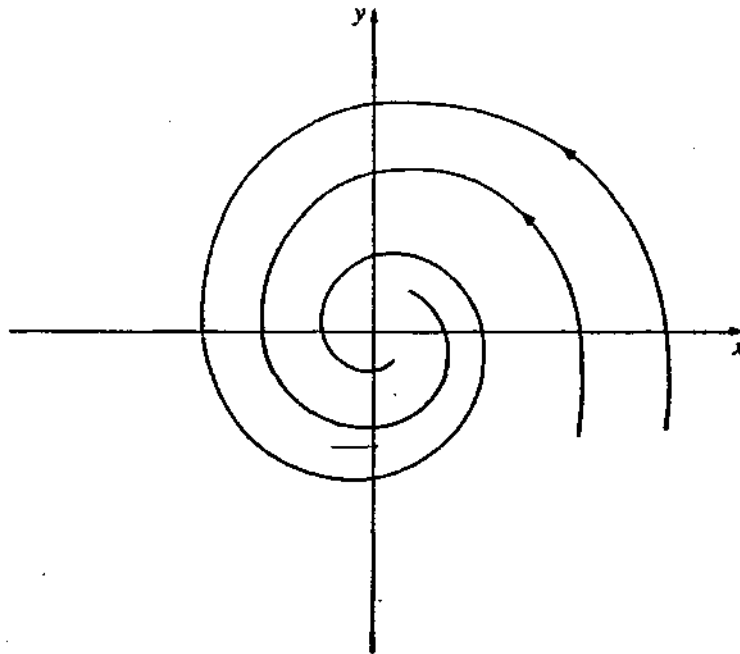


Σχήμα 2.4.

Οι δύο αυτές διαφορετικές λύσεις ορίζουν την ίδια τροχιά C (Σχ. 2.4), που είναι ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 1$ . Και η (2.8) και η (2.9) δείχνουν πως αυτή η τροχιά διατρέχεται κατά την αντίθετη διεύθυνση της κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Είναι προφανές ότι το σημείο ισορροπίας (0,0) του συστήματος (2.6) είναι κέντρο.

**ΕΣΤΙΕΣ:** Ένα σημείο ισορροπίας όπως αυτό του Σχ. 2.5 λέγεται **εστία**. Ένα τέτοιο σημείο προσεγγίζεται με ελικοειδή τρόπο από μια οικογένεια τροχιών που περιελίσσεται γύρω του άπειρες φορές καθώς  $t \rightarrow +\infty$  (ή  $t \rightarrow -\infty$ ).





Σχήμα 2.5.

Παρατηρούμε ότι καθώς οι τροχιές προσεγγίζουν το  $\theta$ , δεν εισχωρούν σε αυτό. Με άλλα λόγια, ένα σημείο  $P$  κινούμενο κατά μήκος μιας τέτοιας τροχιάς προσεγγίζει το  $\theta$  καθώς  $t \rightarrow +\infty$  (ή καθώς  $t \rightarrow -\infty$ ), αλλά η ευθεία  $OP$  δεν προσεγγίζει καμιά συγκεκριμένη διεύθυνση.

**Παράδειγμα 2.3.** Το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - y, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ y' &= x + \alpha y \end{aligned} \quad (2.10)$$

έχει ως μόνο σημείο ισορροπίας το  $(0,0)$ .

Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + \alpha y}{\alpha x - y} \quad (2.11)$$

που προκύπτει με απαλοιφή του  $t$  από το (2.10), μας δίνει τις τροχιές του (2.10). Εισάγοντας πολικές συντεταγμένες  $r, \theta$  που ορίζονται από τις

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

και παρατηρώντας ότι αφού  $r^2 = x^2 + y^2$  και  $\Theta = \text{τοξοφ}(y/x)$ , έχουμε

$$r \frac{dr}{dx} = x + y \frac{dy}{dx} \quad \text{και} \quad r^2 \frac{d\Theta}{dx} = x \frac{dy}{dx} - y$$

η (2.11) γίνεται

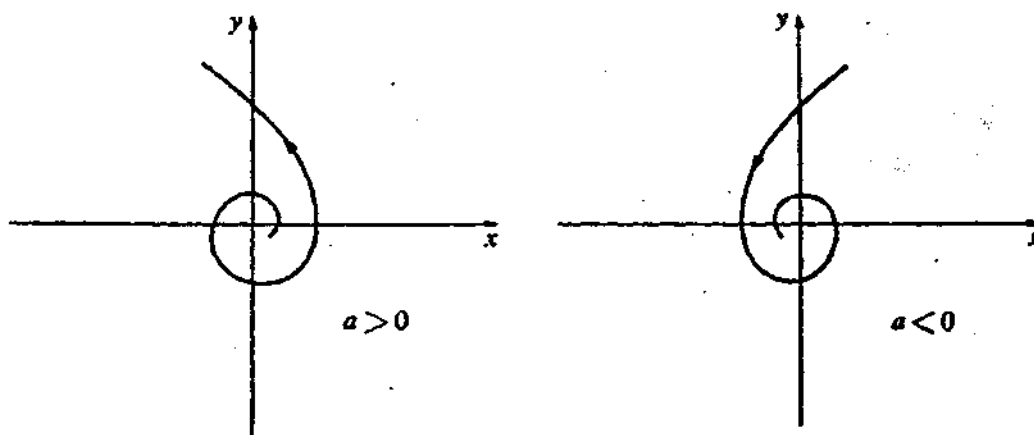
$$\frac{dr}{d\Theta} = ar$$

και έτσι

$$r = ce^{a\Theta} \quad (2.12)$$

που είναι η εξίσωση των τροχιών σε πολικές συντεταγμένες.

Οι δύο ενδεχόμενα ελικοειδείς σχηματισμοί, έχουν σχεδιαστεί στο Σχ. 2.6.



Σχήμα 2.6.

Η διεύθυνση κατά την οποία διατρέχονται αυτές οι τροχιές, προκύπτει από το γεγονός ότι  $x' = -y$  όταν  $x=0$ . Αν  $a=0$ , το (2.10) ανάγεται στο (2.6) και η (2.12) γίνεται  $r=c$ , που είναι η εξίσωση της οικογένειας των κύκλων  $x^2 + y^2 = c^2$ , σε πολικές συντεταγμένες. Αυτό το παράδειγμα λοιπόν, γενικεύει το Παράδειγμα 2.2. Και αφού το κέντρο του Σχ. 2.4. βρίσκεται στο μεταίχμιο μεταξύ των εστιών του Σχ. 2.6, ένα σημείο ισορροπίας που είναι κέντρο λέγεται συχνά **μεταιχμιακή περίπτωση**. Αργότερα θα συναντήσουμε και άλλες μεταιχμιακές περιπτώσεις.

Μπορούμε τώρα να εισάγουμε την έννοια της ευστάθειας (κατά Lyapunov) για το σύστημα (2.1). Χρειαζόμαστε τον ακόλουθο αριθμό:

**Ορισμός 2.1.** Ένα σημείο ισορροπίας  $(x_0, y_0)$  του (2.1) λέγεται μεμονωμένο, αν υπάρχει μια περιοχή του  $(x_0, y_0)$  που δεν περιέχει άλλα σημεία ισορροπίας.

Η ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας, ή ισοδύναμα, η ευστάθεια της λύσης  $x(t)=x_0, y(t)=y_0, t \in (-\infty, +\infty)$  του (2.1) ορίζεται ως εξής:

**Ορισμός 2.2.** Έστω  $(x_0, y_0)$  ένα μεμονωμένο σημείο ισορροπίας του (2.1). Τότε το  $(x_0, y_0)$  λέγεται ευσταθές, αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  τέτοιο ώστε

(i) κάθε τροχιά του (2.1) που βρίσκεται στην περιοχή ακτίνας  $\delta$  του  $(x_0, y_0)$  για κάποιο  $t=t_0$ , ορίζεται για  $t_0 \leq t < +\infty$ .

(ii) αν μια τροχιά ικανοποιεί το (i), παραμένει στην περιοχή ακτίνας  $\varepsilon$  του  $(x_0, y_0)$  για  $t > t_0$ .

Αν, επιπλέον, κάθε τροχιά  $C: x = x(t), y = y(t)$  που ικανοποιεί τα (i) και (ii), ικανοποιεί και το

$$(iii) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = y_0,$$

τότε το  $(x_0, y_0)$  λέγεται ασυμπτωτικά ευσταθές.

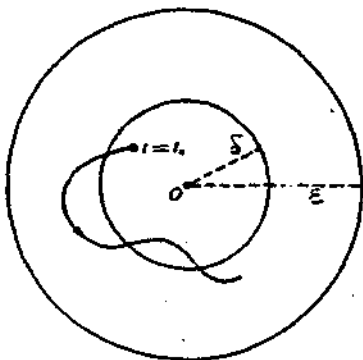
Τέλος, ένα μεμονωμένο σημείο ισορροπίας που δεν είναι ευσταθές, λέγεται ασταθές.

Ένας ανάλογος ορισμός μπορεί να δοθεί και για την περίπτωση που  $t \rightarrow -\infty$ .

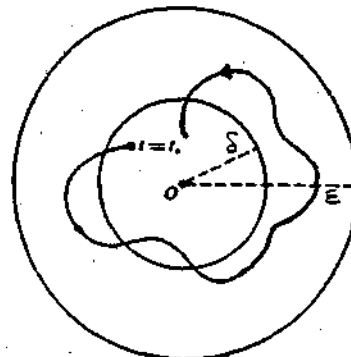
Ως παραδείγματα αυτών των εννοιών έχουμε τα ακόλουθα: ο κόμβος του Σχ. 2.2., το σαγματικό σημείο του Σχ. 2.3 και η εστία στα αριστερά του Σχ. 2.6, είναι ασταθή σημεία ισορροπίας. Το κέντρο, στο Σχ. 2.4, είναι ευσταθές, αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές. Ο κόμβος του Σχ. 2.1, η εστία του Σχ. 2.5 και η εστία στα δεξιά του Σχ. 2.6, είναι ασυμπτωτικά ευσταθή σημεία ισορροπίας.

Σχηματικά έχουμε

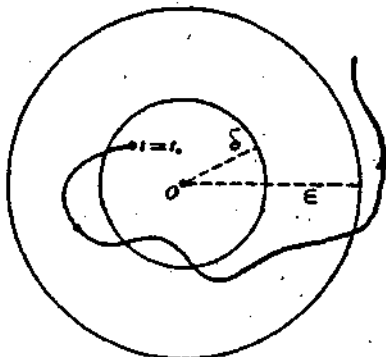
ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ



ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ  
ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ



ΑΣΤΑΘΕΙΑ



Σχήμα 2.7.

Ο προηγούμενος ορισμός γενικεύεται για το σύστημα

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad t \in I \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

όπου  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , η  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  ορίζεται στο  $I \times \mathbb{R}^n$ ,  $I$ : μη φραγμένο διάστημα του  $\mathbb{R}$  με  $t_0 \in I$  και ισχύει το μονοσήμαντο των λύσεων της (2.13). Τότε η λύση  $\phi(t)$ ,  $t \geq t_0$  του (2.13) λέγεται ευσταθής αν  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε λύση  $\psi(t)$  με

$$\|\phi(t_0) - \psi(t_0)\| < \delta$$

να ισχύει

$$\|\phi(t) - \psi(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

Αν επιπλέον ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\phi(t) - \psi(t)\| = 0$$

τότε η λύση  $\phi(t)$  ονομάζεται ασυμπτωτικά ευσταθής.

Μπορούμε πάντοτε να αναγόμεσθε στη μελέτη της ευστάθειας της μηδενικής λύσης ενός συστήματος ως εξής:

**Πρόταση 2.1.** Η λύση  $\phi(t)$  του συστήματος (2.13) με  $\phi(t_0) = \phi_0$  είναι ευσταθής (αντιστ. ασυμπτωτικά ευσταθής, ασταθής) τότε και μόνον τότε αν η μηδενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} \text{με} \quad & y' = g(t, y), \quad t \geq t_0 \\ & g(t, y) = f(t, \phi + y) - \phi'(t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

είναι ευσταθής (αντιστ. ασυμπτωτικά ευσταθής, ασταθής).

**Απόδειξη:** Σε κάθε λύση  $x(t)$  του (2.13), αντιστοιχεί μέσω του μετασχηματισμού

$$x(t) = y(t) + \phi(t)$$

μια λύση του (2.14). Στην λύση  $\phi(t)$  με  $\phi(t_0) = \phi_0$ , αντιστοιχεί η μηδενική λύση  $y_0(t) = 0$ . Εξάλλου

$$\|x(t_0) - \phi(t_0)\| = \|y(t_0) - y_0(t_0)\| = \|y(t_0)\|$$

και για κάθε  $t \geq t_0$

$$\|x(t) - \phi(t)\| = \|y(t) - y_0(t)\| = \|y(t)\|$$

και το συμπέρασμα έπεται από τον προηγούμενο ορισμό.

**Παρατηρήσεις 2.2.** (i) Η ευστάθεια των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (2.15)$$

ανάγεται, κατά τα γνωστά, στην ευστάθεια των λύσεων του συστήματος

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \dots, x_{n-1}' = x_n, \quad x_n' = f(t, x_1, \dots, x_n)$$

όπου  $x_1(t) = \phi(t)$ , λύση της (2.15).

(ii) Η μελέτη της ευστάθειας των λύσεων του συστήματος

$$x' = f(t,x) \quad , \quad t \geq t_0$$

ανάγεται, μέσω του μετασχηματισμού  $t = \tau + t_0$ , στη μελέτη της ευστάθειας του συστήματος.

$$\frac{dx}{d\tau} = f(\tau + t_0, x), \quad \tau \geq 0$$

και έτσι μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να θεωρούμε ότι

$$t_0 = 0$$

### 3. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Θα μελετήσουμε την ευστάθεια γραμμικών συστημάτων, με έμφαση σε εκείνα με σταθερούς συντελεστές.

Θεωρούμε το γραμμικό, μη ομογενές σύστημα

$$x' = A(t)x + b(t) \quad (3.1)$$

όπου ο  $A(t)$  είναι ένας  $n \times n$  πίνακας και το  $b(t) \in \mathbb{R}^n$ , καθώς και το αντίστοιχο ομογενές σύστημα

$$x' = A(t)x \quad (3.2)$$

**Πρόταση 3.1.** Όλες οι λύσεις του μη ομογενούς συστήματος (3.1) έχουν την ίδια ιδιότητα ευστάθειας (αστάθεια, ευστάθεια, ασυμπτωτική ευστάθεια), με εκείνη της μηδενικής λύσης του ομογενούς συστήματος (3.2).

**Απόδειξη.** Έστω  $\phi(t)$  η λύση της οποίας θέλουμε να μελετήσουμε την ευστάθεια και  $x(t)$  οποιαδήποτε άλλη λύση του (3.1). Ορίζουμε

$$\begin{aligned} \xi(t) &= x(t) - \phi(t) \\ \xi(t_0) &= x(t_0) - \phi(t_0) \end{aligned}$$

οπότε

και το  $\xi$  ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση

$$\xi' = A(t)\xi$$

από όπου έπεται το συμπέρασμα.

Για το επόμενο θεώρημα χρειαζόμαστε την έννοια της νόρμας ενός πίνακα: έστω  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (ή  $\in \mathbb{C}^{n \times n}$ ). Ορίζουμε

$$|A| = \left( \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

Η νόρμα αυτή έχει την ιδιότητα ότι για  $u \in \mathbb{R}^n$  (ή  $\mathbb{C}^n$ ) ισχύει

$$\|Au\| \leq \|A\|\|u\|$$

**Θεώρημα 3.1.** Η μηδενική λύση (και, συνεπώς, όλες οι λύσεις) του ομογενούς συστήματος  $x' = A(t)x$  είναι ευσταθής για  $t \geq t_0$ ,  $t_0$ : τυχόν, τότε και μόνον τότε αν κάθε λύση είναι φραγμένη.

**Απόδειξη.** Αρκεί, σύμφωνα, με την Πρόταση 3.1 να θεωρήσουμε μόνο τη μηδενική λύση. Ας υποθέσουμε ότι η μηδενική λύση  $\phi(t) = 0$  είναι ευσταθής. Έστω  $\varepsilon > 0$  και  $\Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t))$  ο θεμελιώδης πίνακας που ικανοποιεί τη σχέση

$$\Psi(t_0) = \frac{1}{2} \delta I$$

όπου  $I$  ο μοναδιαίος πίνακας.

Τότε, αφού

$$\|\psi_j(t_0)\| = \frac{1}{2} \delta < \delta$$

από τον ορισμό της ευστάθειας έπεται ότι θα ισχύει

$$\|\psi_j(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0$$

και συνεπώς κάθε λύση είναι φραγμένη, αφού κάθε άλλη λύση είναι γραμμικός συνδυασμός των  $\psi_j(t)$ .

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι κάθε λύση είναι φραγμένη. Έστω  $\Phi(t)$  τυχόν θεμελιώδης πίνακας. Τότε, από την υπόθεση μας, υπάρχει  $M > 0$  τέτοιο ώστε

$$\|\Phi(t)\| < M, \quad t \geq t_0$$

Έστω  $\varepsilon > 0$ . Θέτουμε

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M\|\Phi^{-1}(t_0)\|}$$

Έστω  $x(t)$  τυχούσα λύση. Θα ελέγξουμε την ευστάθεια της μηδενικής λύσης. Είναι γνωστό (π.χ. [Αθ-Κα-Στρατ] Θεωρ. VII 1.8) ότι

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x(t_0)$$



Αν, συνεπώς,

$$\|x(t_0)\| < \delta$$

τότε

$$\|x(t)\| \leq \|\Phi(t)\| \|\Phi^{-1}(t_0)\| \|x(t_0)\| \leq M \frac{\varepsilon}{M\delta} \delta = \varepsilon$$

Περνάμε τώρα στη μελέτη της ευστάθειας των λύσεων του ομογενούς συστήματος με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή του

$$x' = Ax$$

$$\text{όπου } x = (x_i) \in \mathbb{R}^n \text{ και } A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.4)$$

Αρκεί, όπως έχουμε δει, να μελετήσουμε την ευστάθεια της μηδενικής λύσης. Έχουμε, λοιπόν:

**Θεώρημα 3.2.** Θεωρούμε το ομογενές σύστημα με σταθερούς συντελεστές (3.2). Τότε:

(i) Αν όλες οι ιδιοτιμές του  $A$  έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, η μηδενική λύση είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

(ii) Αν μια τουλάχιστον ιδιοτιμή του  $A$  έχει θετικό πραγματικό μέρος, η μηδενική λύση είναι ασταθής.

(iii) Αν για όλες τις ιδιοτιμές  $\lambda$  του  $A$  ισχύει  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ , η μηδενική λύση είναι ευσταθής, τότε και μόνον τότε αν η διάσταση του ιδιοχώρου που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιοτιμή με  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ , είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα της  $\lambda$ . Διαφορετικά, η μηδενική λύση είναι ασταθής.

**Απόδειξη.** (i) Έστω  $u_k(t) = (u_{1k}(t), \dots, u_{nk}(t))$  η λύση του (3.2) που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη  $u_k(0) = e_k$ . Η λύση του (3.2) που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη  $x(0) = x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = \sum_{k=1}^n x_k^0 u_k(t)$$

Όπως γνωρίζουμε, κάθε  $u_{jk}(t)$  είναι γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων της μορφής  $p(t)e^{\lambda t}$ , όπου  $\lambda = \alpha + i\beta$  είναι ιδιοτιμή του  $A$  και  $p(t)$  πολυώνυμο του  $t$ . Από την υπόθεση μας έχουμε ότι  $\alpha < 0$ , και αφού

$$p(t)e^{\lambda t} = p(t)e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \eta \mu \beta t)$$

έχουμε ότι  $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)e^{\lambda t} = 0$

δηλαδή, ότι οι συναρτήσεις  $p(t)e^{\lambda t}$ ,  $t \geq 0$  είναι φραγμένες. Έστω  $M$  ένα κοινό φράγμα των  $u_{jk}(t)$ ,  $t \geq 0$ .

Τότε

$$|u_k(t)| = \left( \sum_{j=1}^n u_{jk}^2(t) \right)^{1/2} \leq \sqrt{n} \cdot M$$

και

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \sum_{k=1}^n |x_k^0| \cdot |u_k(t)| \leq \sqrt{n} \cdot M \sum_{k=1}^n |x_k^0| \\ &\leq n\sqrt{n} M \|x_0\|, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Έστω  $\varepsilon > 0$ . Θέτουμε

$$\delta = \frac{\varepsilon}{n\sqrt{n} M}$$

Αν  $\|x(0)\| < \delta$ , τότε, προφανώς

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq 0$$

Επιπλέον, αφού  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_{jk}(t) = 0$  ισχύει και ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$$

(ii) Έστω  $\lambda = \alpha + i\beta$  μια ιδιοτιμή του  $A$  με  $\alpha > 0$ . Έστω  $v = v_1 + i v_2$  ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε η

$$x(t) = ce^{\alpha t}(v_1 \cos \beta t - v_2 \eta \mu \beta t)$$

είναι πραγματική λύση του (3.2).

Έστω  $\varepsilon > 0$ . Για οποιοδήποτε  $\delta > 0$ , μπορούμε να βρούμε  $c \neq 0$ , ώστε

$$\|x(0)\| = |c| \|u_1\| < \delta$$

Όμως η  $\|x(t)\| = |c| \|e^{at} \|u_1 \cos bt - u_2 \eta \mu bt\|$  δεν είναι φραγμένη, και συνεπώς η μηδενική λύση δεν είναι ευσταθής.

(iii) Έστω ότι σε κάθε ιδιοτιμή της μορφής  $\lambda = i\beta$  με αλγεβρική πολλαπλότητα  $\tau$ , αντιστοιχεί ένας ιδιοχώρος διάστασης  $\tau$ . Τότε στην  $\lambda$  αντιστοιχούν  $\tau$  γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις του (2.3), της μορφής

$$e^{i\beta t} w_m, \quad m = 1, 2, \dots, \tau$$

όπου  $w_m$  τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Ανάλογα με την περίπτωση (i), διαπιστώνουμε ότι η λύση του (2.3) που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη  $x(0) = x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  θα έχει τη μορφή

$$x(t) = \sum_{k=1}^n x_k^0 u_k(t)$$

όπου  $u_k(t) = (u_{1k}(t), \dots, u_{nk}(t))$ .

Κάθε  $u_{jk}(t)$  είναι γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων της μορφής

$$q(t) = \begin{cases} p(t)e^{\lambda t} & , \operatorname{Re} \lambda < 0 \\ ce^{\lambda t} & , \operatorname{Re} \lambda = 0 \end{cases}$$

και ως εκ τούτου, οι  $u_{jk}(t)$ ,  $t \geq 0$  είναι φραγμένες. Όπως στην περίπτωση (i), καταλήγουμε στο ότι η μηδενική λύση είναι ευσταθής.

Αν αντιθέτως, σε μια ιδιοτιμή  $\lambda = i\beta$ , αλγεβρικής πολλαπλότητας  $\tau$ , αντιστοιχούν λιγότερα από  $\tau$  γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε -κατά τα γνωστά (πρβλ. [Αθ-Κα-Στρατ], κεφ. VII, §3)- προκύπτει ότι το σύστημα (2.3) έχει μια τουλάχιστον λύση της μορφής

$$x(t) = e^{i\beta t} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$$

όπου ένα τουλάχιστον από τα πολυώνυμα  $p_k(t)$  έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 1. Όπως στην περίπτωση (ii), προκύπτει ότι η συνάρτηση  $\|x(t)\|$ ,  $t \geq 0$  δεν είναι φραγμένη και, συνεπώς, η μηδενική λύση είναι ασταθής.

**Παράδειγμα 3.1.** Να εξετασθεί η ευστάθεια των λύσεων του συστήματος:  $x' = Ax$ , όπου

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$  είναι

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda + 2)(\lambda + 1)^2$$

Οι ιδιοτιμές  $-1$  και  $-2$  του  $A$  έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη και έτσι η μηδενική λύση (επομένως και όλες) του συστήματος είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

**Παράδειγμα 3.2.** Να εξετασθεί η ευστάθεια των λύσεων του συστήματος:  $x' = Ax + b(t)$ , όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

Αρκεί να μελετήσουμε την ευστάθεια του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(3 - \lambda)$$

Εδώ οι ιδιοτιμές είναι θετικές (θα αρκούσε έστω και η μια να ήταν) και έτσι η μηδενική λύση του συστήματος είναι ασταθής.

**Παράδειγμα 3.3.** Να εξετασθεί η ευστάθεια του συστήματος  $x' = Ax$ , όπου  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι  $\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 4$ . Οι ιδιοτιμές είναι οι  $\pm 2i$  και συνεπώς κάθε λύση είναι ευσταθής. Δεν είναι, όμως, ασυμπτωτικά ευσταθής. Πράγματι, η λύση του συστήματος είναι

$$x_1 = c_1 \sin 2t + c_2 \eta \mu 2t, \quad x_2 = c_1 \eta \mu 2t + c_2 \sin 2t$$

οπότε

$$\|x(t)\| = (x_1 + x_2)^{1/2} = (c_1 + c_2)^{1/2}$$

Αφού για καμιά μη μηδενική λύση δεν ισχύει ότι  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$  η μηδενική λύση δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

**Παράδειγμα 3.4.** Να εξετασθεί η ευστάθεια της εξίσωσης

$$x'' + 2\mu x' + x = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

στο σημείο ισορροπίας  $(0,0)$ .

Στο επίπεδο φάσεων, η εξίσωση γράφεται ως σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x - 2\mu y \end{aligned}$$

δηλ.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι  $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$ . Έτσι, αν:

(i)  $\mu \geq 1$ : οι  $\lambda_{1,2}$  έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος και συνεπώς το  $(0,0)$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (οι  $\lambda_{1,2}$  είναι πραγματικές και αρνητικές).

(ii)  $0 < \mu < 1$ : οι  $\lambda_{1,2}$  είναι μιγαδικές, με αρνητικό πραγματικό μέρος, και έτσι το  $(0,0)$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

(iii)  $\mu = 0$ :  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Το  $(0,0)$  είναι ευσταθές.

(iv)  $\mu < 0$ : οι  $\lambda_{1,2}$  είναι είτε πραγματικές θετικές, είτε μιγαδικές με θετικό πραγματικό μέρος, οπότε το  $(0,0)$  είναι ασταθές.

**Παράδειγμα 3.5.** Να εξετασθεί η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας  $(0,0)$  της εξίσωσης

$$x^{(4)}(t) + 2x''(t) + x(t) = 0$$

Το αντίστοιχο σύστημα στο χώρο φάσεων είναι

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= z \\z' &= u \\u' &= -x-2z\end{aligned}$$

ή

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι οι  $\pm i$  που έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα 2. Συνεπώς το  $(0,0)$  είναι ασταθές. Αυτό μπορεί να φανεί και από το γεγονός ότι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων είναι το

$$\{\text{συν}t, \eta\mu t, \text{τουν}t, \text{τη}\mu t\}$$

που περιέχει και μη φραγμένους όρους όταν  $t \rightarrow +\infty$ .

#### 4. ΑΥΤΟΝΟΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Η ομοιότητα πινάκων είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου των  $n \times n$  πραγματικών πινάκων και αυτό το σύνολο μπορεί να αναλυθεί σε κλάσεις ισοδυναμίας που λέγονται κλάσεις ομοιότητας. Οι κλάσεις ομοιότητας μπορούν να ομαδοποιηθούν σε πεπερασμένου πλήθους τύπους. Στη συνέχεια δίνουμε αυτούς τους τύπους όταν  $n=2$ .

**Πρόταση 4.1.** Έστω  $A$  ένας  $2 \times 2$  πραγματικός πίνακας. Τότε υπάρχει ένας πραγματικός πίνακας  $M$ , με  $\det M \neq 0$ , τέτοιος ώστε ο  $J = M^{-1}AM$  έχει έναν από τους ακόλουθους τύπους:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1 < \lambda_2 & (\beta) \quad & \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \\ (\gamma) \quad & \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} & (\delta) \quad & \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \beta > 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

όπου  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Ο πίνακας  $J$  λέγεται μορφή **Jordan** του  $A$ . Οι ιδιοτιμές του  $A$  (και του  $J$ ) είναι οι τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - (\text{tr}A)\lambda + \det A = 0 \quad (4.2)$$

Στην περίπτωση μας το ίχνος,  $\text{tr}A$ , του  $A$  είναι  $\text{tr}A = a_{11} + a_{22}$  και η διακρίνουσα,  $\det A$ , του  $A$  είναι  $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , ( $A = (a_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ ). Έτσι οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} (\text{tr}A + \sqrt{\Delta}) \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} (\text{tr}A - \sqrt{\Delta}) \quad (4.3)$$

$$\text{όπου} \quad \Delta = (\text{tr}A)^2 - 4\det A \quad (4.4)$$

Ο τύπος της μορφής **Jordan**,  $J$ , του  $A$  προσδιορίζεται από τη φύση των ιδιοτιμών:

(I) Πραγματικές και διακεκριμένες ιδιοτιμές ( $\Delta > 0$ ).

Αν  $\lambda_1, \lambda_2$  με  $\lambda_1 > \lambda_2$  είναι οι ιδιοτιμές αυτές και  $u_1, u_2$  τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που δίνονται από τη σχέση  $Au_j = \lambda_j u_j, j=1,2$ , θέτουμε

$$M = [u_1 | u_2]$$

τον πίνακα με στήλες τα  $u_1, u_2$ . Τότε

$$M^{-1}AM = J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

(II) Ίσες ιδιοτιμές ( $\Delta = 0$ )

Η (4.3) δίνει  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2 \operatorname{tr}A = \lambda_0$  και πρέπει να θεωρήσουμε τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

(1) ο  $A$  είναι διαγώνιος

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I \quad (4.6)$$

που είναι η (4.1 (β)). Σε αυτή την περίπτωση, για οποιονδήποτε πίνακα  $M$  με  $\det M \neq 0$  ισχύει  $M^{-1}AM = A$ , δηλ. ο  $A$  είναι ο ίδιος μια κλάση ομοιότητας.

(2) ο  $A$  δεν είναι διαγώνιος

Σε αυτή την περίπτωση  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$  και  $\operatorname{rank}(A - \lambda_0 I) = 1$ , οπότε δεν υπάρχουν δύο γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Έστω  $u_0$  ιδιοδιάνυσμα του  $A$ . Επιλέγουμε το  $v$  έτσι ώστε ο  $M = [u_0 | v]$  να έχει  $\det M \neq 0$  και

$$AM = [\lambda_0 u_0 | Av] = M[\lambda_0 e_1 | M^{-1}Av]$$

όπου  $e_1$  η πρώτη στήλη του  $I$ . Οι πίνακες  $A$  και  $M^{-1}AM$  έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές και έτσι



$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_0 & c \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Κάνοντας τον απλό μετασχηματισμό

$$M_1 = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

παίρνουμε

$$M_1^{-1}AM_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

που είναι η (4.1 (γ)).

### (III) Μιγαδικές ιδιοτιμές ( $\Delta < 0$ )

Μπορούμε να γράψουμε  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , όπου  $\alpha = (1/2) \operatorname{tr} A$  και  $\beta = + (1/2)\sqrt{-\Delta}$ . Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει πίνακας  $M = [m_1 | m_2]$ , με  $\det M \neq 0$  ώστε ο  $M^{-1}AM$  να δίνεται από τη σχέση (4.1 (δ)), ή, ισοδύναμα ότι

$$AM = M \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Έχουμε, λοιπόν,

$$[Am_1 | Am_2] = [\alpha m_1 + \beta m_2 | -\beta m_1 + \alpha m_2]$$

που γράφεται

$$[(A - \alpha I)m_1 - \beta m_2 | \beta m_1 + (A - \alpha I)m_2] = [O | O] \quad (4.10)$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{bmatrix} A - \alpha I & -\beta I \\ \beta I & A - \alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ O \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Έστω  $P$  ο πίνακας συντελεστών εξίσωσης αυτής και

$$Q = \begin{bmatrix} A - \alpha I & \beta I \\ -\beta I & A - \alpha I \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Αν  $\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2 + \beta^2)$  είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$ , παρατηρούμε ότι

$$PQ = \begin{bmatrix} \Phi_A(A) & O \\ O & \Phi_A(A) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Από το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε ότι  $\Phi_A(A) = O$  και έτσι

$$PQ = O \quad (4.14)$$

Συνεπώς οι στήλες του  $Q$  πρέπει να είναι λύσεις της (4.11). Η πρώτη στήλη του  $Q$  δίνει ότι

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_{11} - \alpha & -\beta \\ \alpha_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα  $\Delta$  του  $\Phi_A(\lambda) = 0$  γράφεται ως

$$\Delta = (\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\alpha_{12}\alpha_{21} \quad (4.16)$$

Αν  $\Delta < 0$ , τότε  $\alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0$  και συνεπώς  $\alpha_{21} \neq 0$ . Επιπλέον έχουμε ότι  $\beta = + 1/2 \sqrt{-\Delta} \neq 0$  και έτσι  $\det M = \beta\alpha_{21} \neq 0$ . Από την (4.15) παίρνουμε λοιπόν ένα πίνακα  $M$ , με  $\det M \neq 0$ , τέτοιον ώστε ο  $M^{-1}AM$  να δίνεται από την (4.1 (δ)).

**Παράδειγμα 4.1.** Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (i) Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan για τον  $A_j$ ,  $j=1,2,3$ .
- (ii) Να βρεθεί ένας πίνακας  $M_j$  που μετατρέπει τον  $A_j$  στην αντίστοιχη κανονική μορφή Jordan,  $j=1,2,3$ .

**Λύση.** (i) Οι ιδιοτιμές των δοθέντων πινάκων είναι

$$A_1: \lambda_1 = 1 + \sqrt{2}, \lambda_2 = 1 - \sqrt{2} \quad A_2: \lambda_1 = 3 + i, \lambda_2 = 3 - i \quad A_3: \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

Έτσι, οι κανονικές μορφές Jordan, είναι

$$\text{για τον } A_1: \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{για τον } A_2: \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{για τον } A_3: \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(ii) Ο  $A_1$  έχει πραγματικές και διακεκριμένες ιδιοτιμές και έτσι αρκεί να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις  $\lambda_1, \lambda_2$ , που θα ικανοποιούν τις:

$$(A_1 - \lambda_j I)u_j = 0, \quad j=1,2$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$u_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

και έτσι

$$M_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο  $A_2$  έχει συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές και από την (4.15) παίρνουμε

$$M_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Τέλος, ο  $A_3$  έχει μια διπλή ιδιοτιμή και η σχέση

$$(A_3 - \lambda I)u_1 = 0$$

δίνει το ιδιοδιάνυσμα

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

που αποτελεί την πρώτη στήλη του  $M_3$ . Εκλέγοντας τη δεύτερη στήλη έτσι, ώστε  $\det M_3 \neq 0$ , παίρνουμε π.χ.

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det M_3 = 1$$

Ο αναζητούμενος πίνακας  $M_3$  θα είναι

$$M_3 = M_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Συνοψίζοντας, έχουμε

(α) κάθε 2-διάστατο γραμμικό σύστημα της μορφής

$$x' = Ax \quad (4.17)$$

μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα ισοδύναμο κανονικό σύστημα

$$y' = Jy \quad (4.18)$$

όπου  $J = M^{-1}AM$  είναι η μορφή Jordan του  $A$  και

$$x = My \quad (4.19)$$

(β) ο πίνακας Jordan  $J$ , ανήκει σε έναν από τους τέσσερεις τύπους που δίνονται στην Πρόταση 4.1.

### Διαγράμματα φάσεων κανονικών συστημάτων στο επίπεδο

Λέμε ότι ένα γραμμικό σύστημα  $x' = Ax$  είναι απλό αν  $\det A \neq 0$  και ο  $A$  έχει ιδιοτιμές διάφορες του μηδενός. Σε αυτή την περίπτωση, η μόνη λύση του συστήματος  $Ax=0$ , είναι η  $x=0$  και το σύστημα έχει ένα μόνο μεμονωμένο σημείο ισορροπίας, στην αρχή των αξόνων του επιπέδου φάσεων. Το κανονικό σύστημα που αντιστοιχεί σε ένα απλό γραμμικό σύστημα, είναι επίσης απλό, αφού οι  $A$  και  $J$  έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

### Απλά Κανονικά Συστήματα

(I) Πραγματικές και διακεκριμένες ιδιοτιμές

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

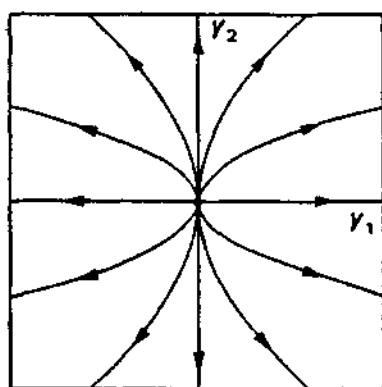
$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 > \lambda_2 \neq 0$$

Συνεπώς

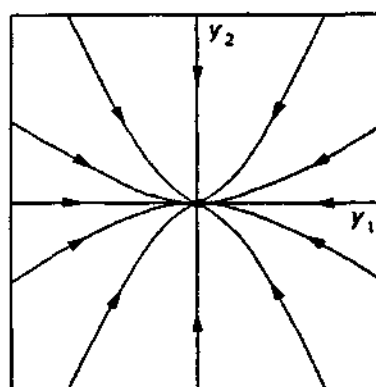
$$y_1' = \lambda_1 y_1, \quad y_2' = \lambda_2 y_2 \quad (4.20)$$

και έτσι

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R} \quad (4.21)$$



$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ : ασταθής κόμβος



$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ : ευσταθής κόμβος

Σχήμα 4.1.

Αν οι  $\lambda_1, \lambda_2$  είναι ομόσημες, προκύπτουν διαγράμματα φάσεων όπως αυτά του Σχ. 4.1. Το σημείο ισορροπίας που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων του  $y_1 y_2$ -επιπέδου λέγεται κόμβος. Όταν όλες οι τροχιές κατευθύνονται προς την αρχή των αξόνων, ο κόμβος λέγεται ευσταθής, ενώ όταν απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων, ο κόμβος λέγεται

ασταθής. Το σχήμα των τροχιών προσδιορίζεται από το λόγο  $\gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ .

Οι (4.20), (4.21) δίνουν

$$\frac{dy_2}{dy_1} = k y_1^{\gamma-1} \quad (4.22)$$

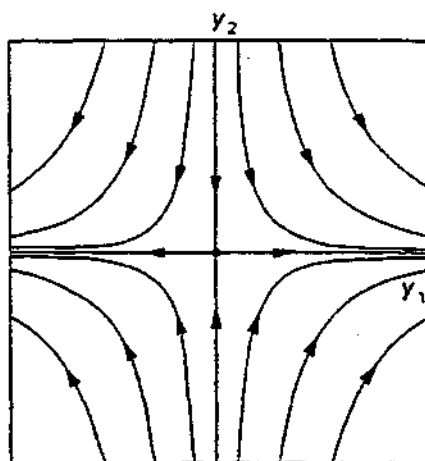
όπου

$$k = \gamma \frac{c_2}{c_1^{\gamma}}$$

και έτσι, όταν  $y_1 \rightarrow 0$

$$\frac{dy_2}{dy_1} \rightarrow \begin{cases} 0 & , \quad \gamma > 1 \\ +\infty & , \quad \gamma < 1 \end{cases} \quad (4.23)$$

Αν οι  $\lambda_1, \lambda_2$  είναι ετερόσημες, προκύπτει το διάγραμμα φάσεων του Σχ. 4.2. Οι άξονες συντεταγμένων (με εξαίρεση την αρχή των αξόνων) είναι η ένωση ειδικών τροχιών που λέγονται διαχωρίζουσες. Πρόκειται για τις μόνες τροχιές που είναι ακτινικές ευθείες γραμμές. Ο κάθε άξονας περιέχει ένα ζεύγος διαχωρίζουσών (υπενθυμίζουμε ότι η αρχή των αξόνων είναι η ίδια μια τροχιά), που κατευθύνονται προς (απομακρύνονται από) την αρχή των αξόνων, αν η αντιστοιχη ιδιοτιμή είναι αρνητική (θετική). Οι υπόλοιπες τροχιές, έχουν τις διαχωρίζουσες ως ασύμπτωτες:



$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ : σαγματικό σημείο

Σχήμα 4.2.

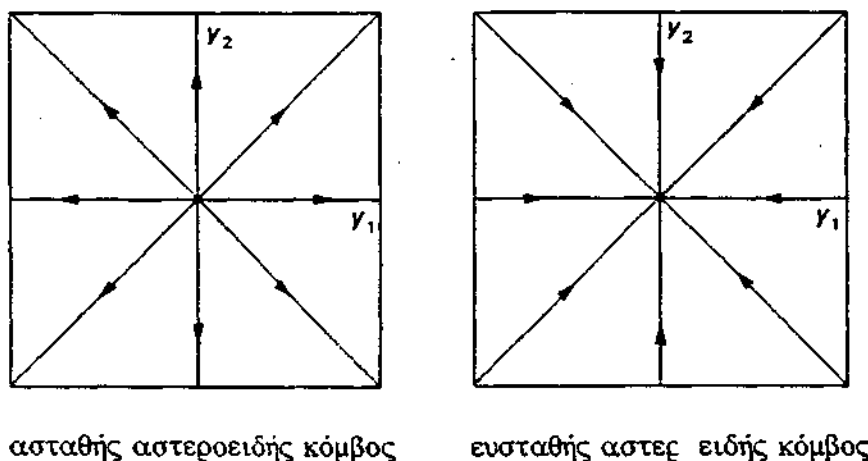
αρχικά προσεγγίζουν το σημείο ισορροπίας καθώς το  $t$  αυξάνει από το  $-\infty$ , στη συνέχεια περνούν από ένα σημείο εγγυτάτης προσέγγισης και τελικώς απομακρύνονται ξανά. Σε αυτή την περίπτωση η αρχή των αξόνων λέγεται σαγματικό σημείο και είναι ασταθές.

## (II) Ίσες ιδιοτιμές

Αν ο  $J$  είναι διαγώνιος, το κανονικό σύστημα έχει λύσεις που δίνονται από την (4.21) με  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \neq 0$ . Έτσι, η περίπτωση που

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_0 \neq 0$$

αντιστοιχεί σε έναν ειδικό κόμβο, που λέγεται **αστεροειδής κόμβος** και είναι ευσταθής αν  $\lambda_0 < 0$  και ασταθής αν  $\lambda_0 > 0$ : σε αυτή την περίπτωση οι τροχιές είναι όλες ακτινικές ευθείες γραμμές.



Σχήμα 4.3.

Αν ο  $J$  δεν είναι διαγώνιος και έχει τη μορφή

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_0 \neq 0$$

τότε έχουμε το σύστημα

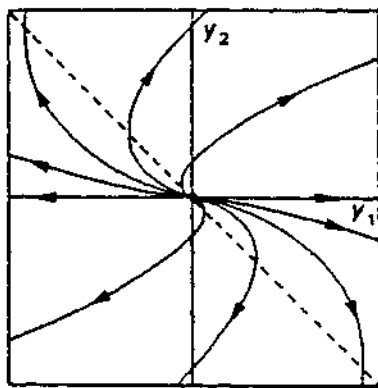
$$y_1' = \lambda_0 y_1 + y_2, \quad y_2' = \lambda_0 y_2 \quad (4.24)$$

που έχει λύση

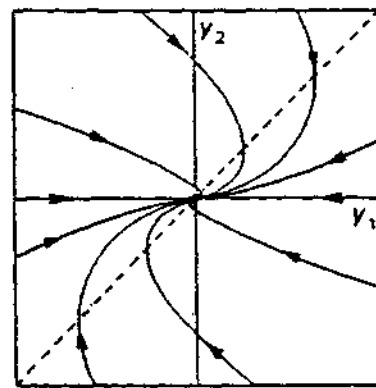
$$y_1(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_0 t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_0 t} \quad (4.25)$$

Προκύπτουν τα διαγράμματα φάσεων του Σχ. 4.4 και η αρχή των αξόνων λέγεται νόθος (εκφυλισμένος, μη γνήσιος) κόμβος και είναι ευσταθής όταν  $\lambda_0 > 0$ . Η ευθεία επί της οποίας αλλάζουν διεύθυνση οι τροχιές είναι ο γεωμετρικός τόπος των ακροτάτων τιμών της  $y_1$ . Δίνεται από την ισοκλινή  $y_1 = 0$  και είναι, συγκεκριμένα, η

$$y_2 = -\lambda_0 y_1 \quad (4.26)$$



ασταθής νόθος κόμβος ( $\lambda_0 > 0$ )



ευσταθής νόθος κόμβος ( $\lambda_0 < 0$ )

Σχήμα 4.4.

### (III) Μιγαδικές ιδιοτιμές

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \beta > 0$$

και έτσι το κανονικό σύστημα είναι το

$$y_1' = \alpha y_1 - \beta y_2, \quad y_2' = \beta y_1 + \alpha y_2 \quad (4.27)$$

Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να λυθεί με την εισαγωγή επιπέδων πολικών συντεταγμένων

$$y_1 = r \cos \Theta, \quad y_2 = r \sin \Theta \quad (4.28)$$

οπότε παίρνουμε

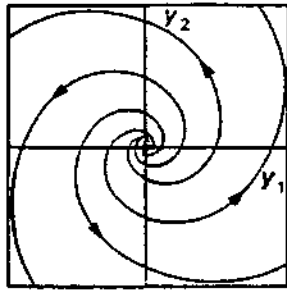
$$r' = \alpha r, \quad \Theta' = \beta \quad (4.29)$$



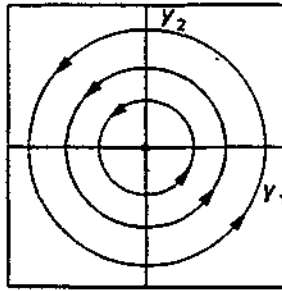
με λύση

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \quad \Theta(t) = \beta t + \Theta_0 \quad (4.30)$$

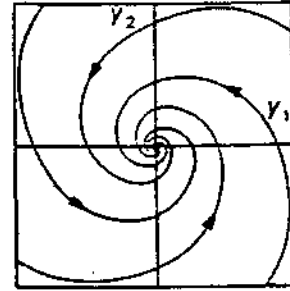
Τυπικά διαγράμματα φάσεων είναι τα ακόλουθα



ασταθής εστία ( $\alpha > 0$ )



κέντρο ( $\alpha = 0$ )



ευσταθής εστία ( $\alpha < 0$ )

Σχήμα 4.5.

Αν  $\alpha \neq 0$ , η αρχή των αξόνων λέγεται **εστία** (ευσταθής αν  $\alpha < 0$  και ασταθής αν  $\alpha > 0$ ). Συχνά λέμε ότι το διάγραμμα φάσεων αποτελείται από έναν ελκυστικό ( $\alpha < 0$ ) ή απωθητικό ( $\alpha > 0$ ) έλικα. Η παράμετρος  $\beta > 0$ , προσδιορίζει τη γωνιακή ταχύτητα περιγραφής του έλικα.

Όταν  $\alpha = 0$ , η αρχή των αξόνων λέγεται **κέντρο** και το διάγραμμα φάσεων αποτελείται από ένα συνεχές ομοκέντρων κύκλων. Αυτή είναι η μόνη, μη τετριμμένη, περίπτωση, κατά την οποία εμφανίζεται περιοδική συμπεριφορά στα γραμμικά συστήματα. Κάθε σημείο (με εξαίρεση την αρχή των αξόνων) του επίπεδου φάσεων, επανέρχεται στη θέση του με περίοδο

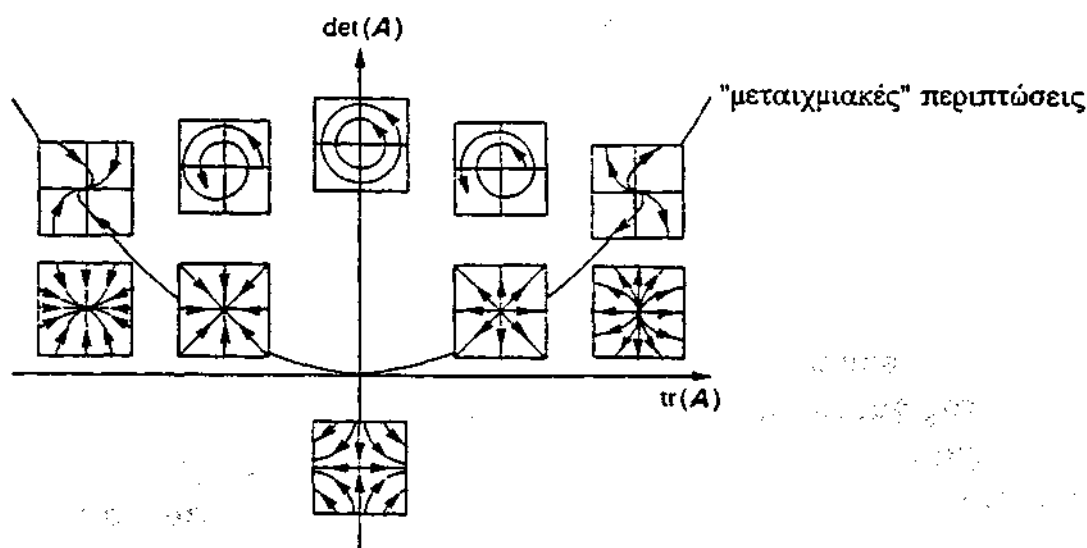
$$T = \frac{2\pi}{\beta} \quad (4.31)$$

και ισχύει

$$y_1 = r_0 \cos(\beta t + \Theta_0), \quad y_2 = r_0 \sin(\beta t + \Theta_0) \quad (4.32)$$

Η άλλη (τετριμμένη) περιοδική συμπεριφορά που εμφανίζεται στα απλά γραμμικά συστήματα, είναι το σημείο ισορροπίας (που "επανέρχεται στη θέση του" στιγμιαία, με περίοδο 0).

Μπορούμε να συνοψίσουμε τον τρόπο με τον οποίο το διάγραμμα φάσεων του συστήματος  $x' = Ax$ , εξαρτάται από το ίχνος και την ορίζουσα το  $A$  στο σχήμα:



Σχήμα 4.6.

### Μη-απλά Κανονικά Συστήματα

Ένα γραμμικό σύστημα  $x' = Ax$  είναι μη-απλό αν  $\det A = 0$  και τουλάχιστον μια ιδιοτιμή του  $A$  είναι μηδέν. Τότε υπάρχουν μη τετριμμένες λύσεις του  $Ax = 0$  και και το σύστημα έχει και άλλα σημεία ισορροπίας εκτός από το  $x = 0$ . Για γραμμικά συστήματα στο επίπεδο, υπάρχουν δύο, μόνο, δυνατότητες: είτε η τάξη του  $A$  είναι 1, είτε ο  $A$  είναι ο μηδενικός πίνακας. Στην πρώτη περίπτωση, υπάρχει μια ευθεία σημείων ισορροπίας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων· στη δεύτερη, κάθε σημείο του επιπέδου είναι σημείο ισορροπίας. Αφού η τάξη του  $J$  είναι ίση με την τάξη του  $A$ , τα κανονικά συστήματα εμφανίζουν ανάλογη μη-απλή συμπεριφορά.

### ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Έχοντας μελετήσει τα διαγράμματα φάσεων των γραμμικών συστημάτων στο επίπεδο, περνάμε στο να θεωρήσουμε τα διαγράμματα φάσεων συστημάτων της μορφής

$$z' = H(z), \quad z \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

όπου  $z = (x,y)$  και  $H(z) = (F(x,y),G(x,y))$  είναι μια συνεχώς διαφορίσιμη μη γραμμική συνάρτηση. Σε αντίθεση με τα όσα είδαμε ως τώρα, τα διαγράμματα φάσεων τέτοιων συστημάτων δεν προσδιορίζονται πάντοτε από τη φύση των σημείων ισορροπίας του συστήματος.

Κατά την ανάλυση μη γραμμικών συστημάτων, συχνά θεωρούμε έναν περιορισμό του πλήρους ή ολικού διαγράμματος φάσεων σε μια περιοχή -όσο μικρή θέλουμε- ενός σημείου. Ένας τέτοιος περιορισμός λέγεται τοπικό διάγραμμα φάσεων στο εν λόγω σημείο.

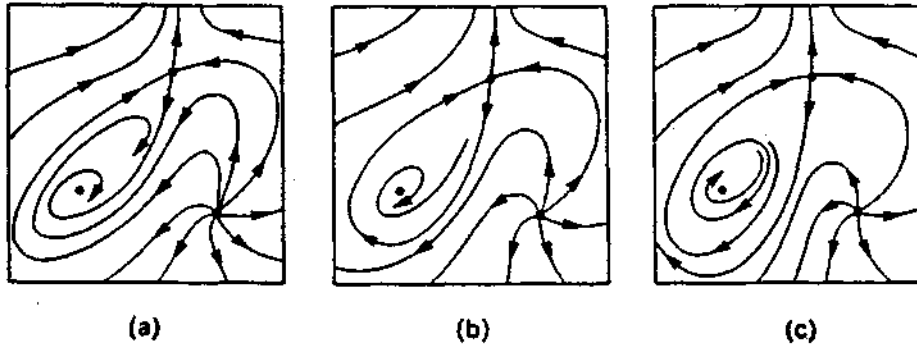
Αν θεωρήσουμε τον περιορισμό ενός απλού γραμμικού συστήματος σε μια περιοχή  $\pi$  της αρχής των αξόνων, υπάρχει μια περιοχή  $\pi' \subseteq \pi$  και μια συνεχής 1-1 και επί απεικόνιση, που διατηρεί τον προσανατολισμό των τροχιών, μεταξύ της  $\pi'$  και του  $\mathbb{R}^2$  που απεικονίζει τον περιορισμό του διαγράμματος φάσεων στην  $\pi'$ , επί του πλήρους διαγράμματος φάσεων. Αυτήν ακριβώς την ποιοτική ισοδυναμία του διαγράμματος φάσεων και των περιορισμών του εννοούμε, λέγοντας ότι το διάγραμμα φάσεων ενός απλού γραμμικού συστήματος προσδιορίζεται από την "φύση" του σημείου ισορροπίας του. Με άλλα λόγια, το τοπικό διάγραμμα φάσεων στην αρχή των αξόνων, είναι ποιοτικά ισοδύναμο με το ολικό διάγραμμα φάσεων του συστήματος.

Τα μη γραμμικά συστήματα μπορεί να έχουν περισσότερα από ένα σημεία ισορροπίας και συχνά μπορούμε να βρούμε το τοπικό διάγραμμα φάσεων για το κάθε ένα από αυτά. Εν τούτοις, τα τοπικά διαγράμματα φάσεων, δεν προσδιορίζουν πάντα το ολικό διάγραμμα φάσεων, Αν, π.χ., θεωρήσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}x' &= -ay + x(1-x^2-y^2) - y(x^2+y^2) \\y' &= ax + y(1-x^2-y^2) + x(x^2+y^2) + \beta\end{aligned}$$

για ορισμένες τιμές των  $a, \beta$ , παίρνουμε τρία ποιοτικά διαφορετικά ολικά διαγράμματα φάσεων, που κάθε ένα περιέχει τρία σημεία ισορροπίας. Τα τοπικά διαγράμματα φάσεων στα σημεία ισορροπίας είναι τα ίδια και για τα τρία διαγράμματα. Η περίπτωση (c) του επομένου σχήματος, μας δείχνει ένα ολικό χαρακτηριστικό των μη γραμμικών διαγραμμάτων φάσεων που δεν μπορεί να μας αποκαλύψει η μελέτη των σημείων ισορροπίας.

Η μεμονωμένη κλειστή τροχιά που περιβάλλει ένα από τα σημεία ισορροπίας λέγεται οριακός κύκλος. Η ανίχνευση οριακών κύκλων απαιτεί μια ολική προσέγγιση.



Κατά συνέπεια, η μελέτη μη γραμμικών συστημάτων περιλαμβάνει τεχνικές που σχετίζονται και με την τοπική και με την ολική συμπεριφορά. Στις δύο επόμενες παραγράφους θα ασχοληθούμε με τεχνικές τοπικής συμπεριφοράς.

## 5. ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Θα εφαρμόσουμε την ανάλυση που κάναμε για τα γραμμικά συστήματα, σε μη γραμμικά συστήματα της μορφής

$$\begin{aligned}x' &= F(x,y) = ax+by+h_1(x,y) \\y' &= G(x,y) = cx+dy+h_2(x,y)\end{aligned}\quad (5.1)$$

για τα οποία υποθέτουμε ότι

(i) οι  $F$  και  $G$  καθώς και οι πρώτες μερικές παράγωγοι τους είναι συνεχείς σε μια περιοχή του  $(0,0)$ ,

(ii)  $ad-bc \neq 0$ ,

$$(iii) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_i(x,y)}{r} = 0, \quad i=1,2, \text{ όπου } r=(x^2+y^2)^{1/2}$$

Αυτό σημαίνει ότι το  $(0,0)$  είναι σημείο ισορροπίας του (5.1). Για ένα σύστημα της μορφής (5.1) που ικανοποιεί τα (i), (ii) και (iii), λέμε ότι το  $(0,0)$  είναι ένα απλό σημείο ισορροπίας του (5.1).

Θα συμβολίζουμε με  $V$  και  $U$ , αντιστοίχως, τα διανυσματικά πεδία

$$\begin{aligned}V(x,y) &= (F(x,y), G(x,y)) \\U(x,y) &= (ax+by, cx+dy)\end{aligned}\quad (5.2)$$

που ορίζονται για  $(x,y)$  κοντά στο  $(0,0)$ . Λόγω της υπόθεσης (iii), μπορούμε να αναμένουμε ότι το διάγραμμα φάσεων του (5.1) κοντά στο  $(0,0)$ , θα μοιάζει με εκείνο του γραμμικοποιημένου συστήματος:

$$\begin{aligned}x' &= ax+by \\y' &= cx+dy\end{aligned}\quad (5.3)$$

Το ακόλουθο θεώρημα μας δείχνει ότι, πράγματι, αυτό συμβαίνει.

**Θεώρημα 5.1.** Το απλό σημείο ισορροπίας  $(0,0)$  του (5.1) είναι μεμονωμένο και ισχύουν οι σχέσεις

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|V|}{|U|} = 1 \quad , \quad \lim_{r \rightarrow 0} (\arg V - \arg U) = 0 \quad (5.4)$$

Απόδειξη. Η  $U$  είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται επί του κύκλου  $r=1$ , αφού το  $(0,0)$  είναι το μόνο σημείο ισορροπίας του (5.3). Αν

$$u = \inf_{r=1} |U| \quad , \quad \text{τότε}$$

$$u > 0 \quad \text{και} \quad |U| \geq ur \quad \text{για κάθε } r \quad (5.5)$$

Έτσι

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\| \frac{V}{|U|} - \frac{U}{|U|} \right\| \leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|V - U|}{ur} = 0 \quad (5.6)$$

λόγω της υπόθεσης (iii).

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι η  $V$  δεν μηδενίζεται κοντά στο  $(0,0)$  και έτσι η αρχή των αξόνων είναι ένα μεμονωμένο σημείο ισορροπίας.

Οι σχέσεις (5.4) προκύπτουν από τις

$$\left| \frac{|V|}{|U|} - 1 \right| \leq \left\| \frac{V}{|U|} - \frac{U}{|U|} \right\| \quad (5.7)$$

και

$$\text{τοξεφ}\omega - \text{τοξεφ}\phi = \text{τοξεφ} \frac{\omega - \phi}{1 + \omega\phi} \quad (5.8)$$

Θα περιγράψουμε τώρα τη συμπεριφορά των τροχιών του (5.1) κοντά στο  $(0,0)$ , χρησιμοποιώντας την ορολογία του κεφαλαίου 4. Μας εξυπηρετεί η εισαγωγή πολικών συντεταγμένων. Έστω ότι η  $C: x=x(t), y=y(t)$  είναι μια τροχιά του (5.1). Μπορούμε να την αναπαραστήσουμε ως

$$C: r=r(t) \quad , \quad \Theta=\Theta(t) \quad , \quad r(t) > 0$$

όπου  $x(t) = r(t)\cos\Theta(t)$  ,  $y(t) = r(t)\sin\Theta(t)$

**Ορισμός 5.1.** Έστω ότι υπάρχει μια περιοχή  $\pi$  του απλού κρίσιμου σημείου  $(0,0)$  του (5.1) στην οποία:

(1) όλες οι τροχιές ορίζονται, για κάποιο  $t_0$ , στο  $t_0 < t < +\infty$  ή στο  $-\infty < t < t_0$

$$(2) \lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0$$

Λέμε, τότε, ότι το  $(0,0)$  είναι:

(α) εστία, αν  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\Theta(t)| = +\infty$  ή  $\lim_{t \rightarrow -\infty} |\Theta(t)| = +\infty$  για

κάθε τροχιά στην  $\pi$ ,

(β) κόμβος, αν  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Theta(t) = c$  ή  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Theta(t) = c$ ,  $c$ : σταθερά,

για κάθε τροχιά στην  $\pi$ .

(γ) αστεροειδής κόμβος, αν είναι κόμβος και για κάθε σταθερά  $c$  υπάρχει μια τροχιά που ικανοποιεί είτε

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Theta(t) = c \quad \text{ή} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \Theta(t) = c$$

**Ορισμός 5.2.** Το απλό κρίσιμο σημείο  $(0,0)$  του (5.1) λέγεται:

(α) κέντρο, αν υπάρχει μια περιοχή του  $(0,0)$  που περιέχει αριθμήσιμο πλήθος κλειστές τροχιές, που κάθε μια περιβάλλει το  $(0,0)$  και των οποίων οι διάμετροι τείνουν στο μηδέν.

(β) σαγματικό σημείο, αν υπάρχουν δύο τροχιές που εισχωρούν στο  $(0,0)$  από αντίθετες διευθύνσεις και όλες οι άλλες τροχιές που βρίσκονται κοντά σε οποιαδήποτε από αυτές τις δύο και στο  $(0,0)$ , απομακρύνονται καθώς το  $t$  τείνει στο άπειρο.

Μπορούμε τώρα, να δούμε με ποιο τρόπο -κάτω από τις υποθέσεις που έχουν γίνει- σχετίζονται οι τροχιές του (5.1) με εκείνες του γραμμικού συστήματος (5.3), κοντά στο απλό σημείο ισορροπίας  $(0,0)$ .

Κατ'αρχή, αν οι τροχιές του (5.2) ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0$$

τότε το ίδιο συμβαίνει για τις τροχιές του (5.1). Συνεπώς, διατηρείται η ασυμπτωτική ευστάθεια ή η αστάθεια.

Ισχύουν, επίσης, και τα ακόλουθα αποτελέσματα· παραλείπουμε τις αποδείξεις για λόγους συντομίας, αφού για κάθε περίπτωση απαιτείται λεπτομερής απόδειξη.

(1) Αν το  $(0,0)$  είναι εστία για το (5.3), είναι εστία και για το (5.1).

(2) Αν το  $(0,0)$  είναι κόμβος για το (5.3), είναι κόμβος και για το (5.1).

(3) Αν το  $(0,0)$  είναι σαγματικό σημείο για το (5.3), είναι σαγματικό σημείο και για το (5.1).

(4) Αν το  $(0,0)$  είναι αστεροειδής κόμβος για το (5.3), δεν είναι, απαραίτητως, αστεροειδής κόμβος και για το (5.1).

Εντούτοις, αν τα  $h_i(x,y)$ ,  $i=1,2$ , περιοριστούν περαιτέρω, αν π.χ. το

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|h_i|}{r^{1+\sigma}}$$
 είναι φραγμένο για κάποιο  $\sigma > 0$ , τότε το  $(0,0)$  είναι

αστεροειδής κόμβος για το (5.1).

(5) Αν το  $(0,0)$  είναι κέντρο για το (5.3), τότε είναι είτε κέντρο ή εστία για το (5.1).

**Παρατήρηση 5.1.** Δεν είναι απαραίτητο να αναφερόμαστε στο  $(0,0)$ , όπως κάναμε σε όλη την προηγούμενη θεώρηση, όταν μιλάμε για τους διάφορους τύπους σημείων ισορροπίας. Αν  $(\xi, \eta)$  είναι ένα σημείο ισορροπίας για το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= F(x,y) \\ y' &= G(x,y) \end{aligned} \quad (5.9)$$

τότε οι μεταβλητές

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x - \xi \\ \bar{y} &= y - \eta \end{aligned} \quad (5.10)$$

αποτελούν ένα σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων του επιπέδου φάσεων, που έχουν ως αρχή των αξόνων τους το σημείο  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\xi, \eta)$  και ονομάζονται τοπικές συντεταγμένες στο  $(\xi, \eta)$ . Ισχύει

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= x' = F(x,y) = F(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta) \\ \bar{y}' &= y' = G(x,y) = G(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta) \end{aligned}$$



και αν ορίσουμε

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= F(\tilde{x} + \xi, \tilde{y} + \eta) \\ \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= G(\tilde{x} + \xi, \tilde{y} + \eta)\end{aligned}\quad (5.11)$$

παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}\tilde{x}' &= \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \tilde{y}' &= \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y})\end{aligned}\quad (5.12)$$

που έχει το -υπό εξέταση- σημείο ισορροπίας στην αρχή των αξόνων του επιπέδου φάσεων.

Υπάρχει ένας συστηματικός τρόπος εύρεσης γραμμικοποιήσεων με τη χρήση αναπτυγμάτων Taylor. Θεωρούμε και πάλι το σύστημα

$$\begin{aligned}x' &= F(x, y) \\ y' &= G(x, y)\end{aligned}\quad (5.13)$$

και υποθέτουμε ότι οι  $F(x, y)$ ,  $G(x, y)$  είναι συνεχώς διαφορίσιμες σε μια περιοχή ενός σημείου  $(\xi, \eta)$ . Τότε

$$F(x, y) = F(\xi, \eta) + (x - \xi) \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta) + (y - \eta) \frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta) + R_1(x, y)\quad (5.14)$$

$$G(x, y) = G(\xi, \eta) + (x - \xi) \frac{\partial G}{\partial x}(\xi, \eta) + (y - \eta) \frac{\partial G}{\partial y}(\xi, \eta) + R_2(x, y)$$

όπου

$$R_1(x,y) = \frac{1}{2} \left\{ (x-\xi)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(z,\zeta) + 2(x-\xi)(y-\eta) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(z,\zeta) + (y-\eta)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(z,\zeta) \right\} \quad (5.15)$$

με  $z \in (\xi, x)$ ;  $\zeta \in (\eta, y)$ , είναι το υπόλοιπο δεύτερης τάξης του αναπτύγματος Taylor της  $F(x,y)$  στο σημείο  $(\xi, \eta)$ , και το  $R_2(x,y)$  ορίζεται ανάλογα. Είναι, όμως, προφανές ότι

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R_i(x,y)}{r} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (5.16)$$

όπου

$$r = ((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)^{1/2}$$

Αν το  $(\xi, \eta)$  είναι ένα σημείο ισορροπίας του (5.13), έχουμε

$$F(\xi, \eta) = G(\xi, \eta) = 0$$

και εισάγοντας τις τοπικές συντεταγμένες

$$\bar{x} = x - \xi, \quad \bar{y} = y - \eta$$

παίρνουμε

$$\bar{x}' = \bar{x} \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta) + \bar{y} \frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta) + R_1(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta) \quad (5.17)$$

$$\bar{y}' = \bar{x} \frac{\partial G}{\partial x}(\xi, \eta) + \bar{y} \frac{\partial G}{\partial y}(\xi, \eta) + R_2(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta)$$

Αυτό το σύστημα είναι της μορφής (5.1) με

$$h_i(x,y) = R_i(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta), \quad i = 1, 2$$

και

$$a = \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta), \quad b = \frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta), \quad c = \frac{\partial G}{\partial x}(\xi, \eta), \quad d = \frac{\partial G}{\partial y}(\xi, \eta) \quad (5.18)$$

και μπορεί, επίσης, να γραφεί ως

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x,y) = (\xi, \eta)} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Χρησιμοποιώντας όλα τα προηγούμενα, μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο.

**Θεώρημα 5.2. (Θεώρημα Γραμμικοποίησης).** Έστω ότι το μη γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= F(x,y) \\ y' &= G(x,y) \end{aligned}$$

έχει ένα απλό σημείο ισορροπίας στο  $(x,y) = (0,0)$ . Τότε, σε μια περιοχή της αρχής των αξόνων, τα διαγράμματα φάσεων του συστήματος και της γραμμικοποίησης του, είναι ποιοτικά ισοδύναμα, με την προϋπόθεση ότι το  $(0,0)$  δεν είναι κέντρο για το γραμμικοποιημένο σύστημα.

**Παράδειγμα 5.1.** Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος

$$\begin{aligned} x' &= e^{x+y} \cdot y \\ y' &= -x + xy \end{aligned} \quad (5.20)$$

και στη συνέχεια να γραμμικοποιηθεί το σύστημα σε αυτά τα σημεία.

Τα σημεία ισορροπίας του (5.20) ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{aligned} e^{x+y} \cdot y &= 0 \\ x(y-1) &= 0 \end{aligned}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε  $x=0$  ή/και  $y=1$ .

Αν  $x=0$ , η πρώτη εξίσωση γίνεται  $e^y=y$  που δεν έχει καμία πραγματική λύση και έτσι δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας με  $x=0$ . Αν  $y=1$ , παίρνουμε  $e^{x+1}=1$ , οπότε  $x=-1$ . Έτσι, το μόνο σημείο ισορροπίας είναι το  $(-1,1)$ .

Εισάγουμε τις τοπικές συντεταγμένες

$$\bar{x} = x+1 \quad \bar{y} = y-1$$

και κατόπιν υπολογισμών (θέτοντας  $F(x,y) = e^{x+y}-y$ ,  $G(x,y) = -x+xy$ ) έχουμε

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x,y) = (-1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

οπότε η γραμμικοποίηση στο  $(-1,1)$  είναι

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

δηλαδή,

$$\bar{x}' = \bar{x} \quad , \quad \bar{y}' = -\bar{y}$$

(ή  $x' = x+1$  ,  $y' = 1-y$ , ως προς τις αρχικές συντεταγμένες).

**Παράδειγμα 5.2.** Να προσδιοριστεί το τοπικό διάγραμμα φάσεων του συστήματος

$$\begin{aligned} x' &= x+4y+e^x-1 \\ y' &= -y-ye^x \end{aligned}$$

στην αρχή των αξόνων.

Έστω  $F(x,y)=x+4y+e^x-1$  και  $G(x,y)=-y(1+e^x)$ . Αυτές οι συναρτήσεις είναι συνεχώς διαφορίσιμες και έτσι παίρνουμε τη γραμμικοποίηση

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x,y) = (0,0)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

που γράφεται  $x' = 2x + 4y$ ,  $y' = -2y$

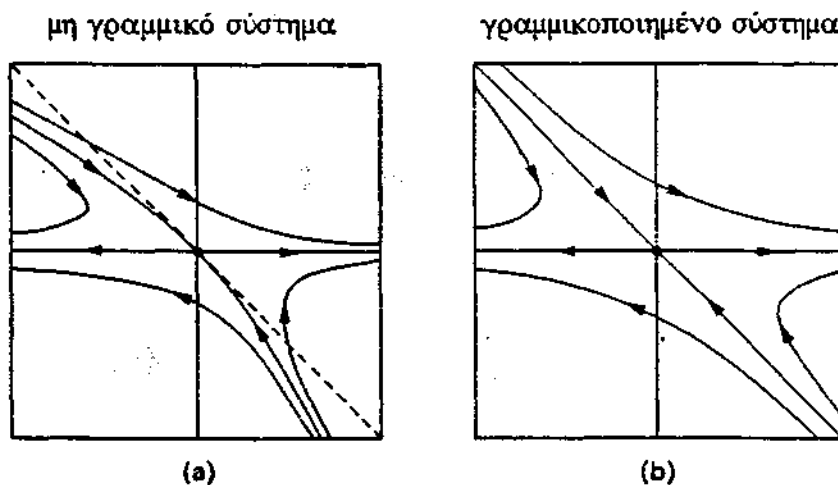
Αυτό είναι ένα απλό γραμμικό σύστημα και η αρχή των αξόνων είναι σαγματικό σημείο, αφού οι ιδιοτιμές είναι το 2 και το -2.

Οι διευθύνσεις των διαχωρίζουσών δίνονται από τα αντίστοιχα

ιδιοδιανύσματα  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  και  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Έτσι οι ασταθείς διαχωρίζουσες

βρίσκονται επί της ευθείας  $y=0$ , ενώ οι ευσταθείς επί της  $y=-x$ . Για το μη γραμμικό σύστημα, υπάρχει μια περιοχή του  $(0,0)$  στην οποία οι μη γραμμικές διαχωρίζουσες είναι όπως στο Σχ. 5.1 (α). Αυτό ισχύει, επειδή

επί της  $y=-x$  έχουμε  $\frac{dy}{dx} \cong -1$  όταν  $x \cong 0$ .



Σχήμα 5.1.

**Παράδειγμα 5.3.** Να δείχτεί ότι τα συστήματα

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(x^2 + y^2) \\ y' &= x + y(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (5.21)$$

και

$$\begin{aligned} x' &= -y - x(x^2 + y^2) \\ y' &= x - y(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (5.22)$$

έχουν τα ίδια γραμμικοποιημένα συστήματα στο  $(0,0)$ , αλλά ότι τα διαγράμματα φάσεων είναι ποιοτικά διαφορετικά.

Το (5.21) και το (5.22) είναι στη μορφή (5.1) αφού

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{x(x^2 + y^2)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{y(x^2 + y^2)}{r} = 0$$

Έτσι και τα δύο συστήματα έχουν τη γραμμικοποίηση

$$\begin{aligned} x' &= -y \\ y' &= x \end{aligned} \quad (5.23)$$

που στο σημείο  $x=y=0$  έχει κέντρο.

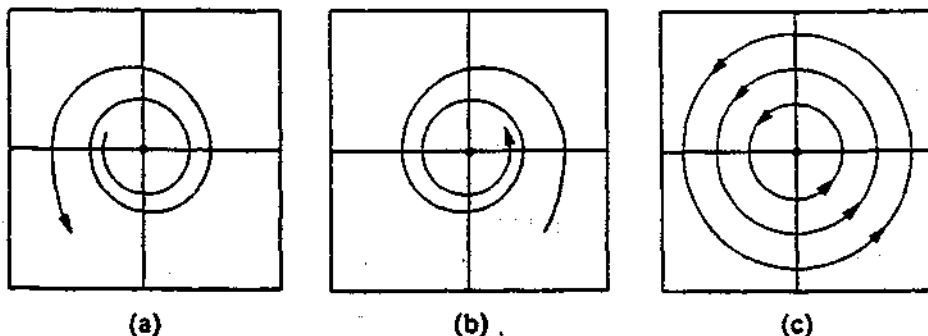
Όμως σε πολικές συντεταγμένες το (5.21) γίνεται

$$r' = r^3, \quad \Theta' = 1 \quad (5.24)$$

ενώ το (5.22) παίρνει τη μορφή

$$r' = -r^3, \quad \Theta' = 1 \quad (5.25)$$

Η (5.24) δείχνει ότι  $r' > 0$  για κάθε  $r$  και συνεπώς οι τροχιές του (5.21) είναι έλικες με διεύθυνση προς τα έξω καθώς αυξάνεται το  $t$ , ενώ για το (5.25) ισχύει  $r' < 0$  για τα θετικά  $r$  και οι τροχιές του (5.22) είναι έλικες που διευθύνονται προς τα μέσα. Έτσι το (5.21) έχει ασταθή συμπεριφορά, ενώ το (5.22) ευσταθή. Εντούτοις, αρκετά κοντά στο  $(0,0)$ , τα διανυσματικά πεδία και του (5.21) και του (5.22) προσεγγίζονται ποσοτικά -και μάλιστα με οποιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια- από το γραμμικό διανυσματικό πεδίο του (5.23).



Σχήμα 5.2.

Τα διαγράμματα φάσεων των συστημάτων (5.21), (5.22) και (5.23), αντιστοίχως, απεικονίζονται στα Σχ. 5.2 (a), Σχ. 5.2 (b) και Σχ. 5.2 (c).

**Παρατήρηση 5.2.** Από το Παράδειγμα 5.3 φαίνεται ότι, το να είναι ποσοτικά κοντά η συνάρτηση  $(F(x,y), G(x,y))$  και η γραμμικοποίηση της δεν εγγυάται την ποιοτική ισοδυναμία του μη γραμμικού συστήματος και του γραμμικοποιημένου. Το θεώρημα Γραμμικοποίησης μας λέει ότι το κέντρο είναι η μόνη εξαίρεση: αν, δηλαδή, οι ιδιοτιμές του γραμμικοποιημένου συστήματος έχουν μη μηδενικό πραγματικό μέρος, τα διαγράμματα φάσεων του μη γραμμικού συστήματος και της γραμμικοποίησης του, είναι τοπολογικά ισοδύναμα σε μια περιοχή του σημείου ισορροπίας. Τα σημεία ισορροπίας με αυτή την ιδιότητα λέγονται υπερβολικά.

**Παρατήρηση 5.3.** Η ιδιότητα της ευστάθειας ή αστάθειας για κόμβους, νόθους κόμβους και εστίες της γραμμικοποίησης, διατηρείται και στο διάγραμμα φάσεων του μη γραμμικού συστήματος. Μπορούμε, λοιπόν, να χαρακτηρίζουμε τα μη γραμμικά σημεία ισορροπίας ως κόμβους, εστίες, κ.ο.κ., όταν οι γραμμικοποιήσεις τους έχουν τον ίδιο τύπο.

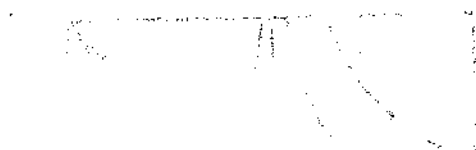
Αυτή η γενική ιδιότητα των υπερβολικών σημείων ισορροπίας, οφείλεται στον ειδικό χαρακτήρα της συνεχούς, 1-1 και επί απεικόνισης που υπεισέρχεται στην ποιοτική ισοδυναμία. Η απεικόνιση αυτή πρέπει να αντανakλά την ποσοτική σύμπτωση της  $(F(x,y), G(x,y))$  και της γραμμικοποίησης της, κοντά στο σημείο ισορροπίας. Πρέπει, σε μικρές περιοχές, η εν λόγω απεικόνιση να μην απέχει πολύ -υπό κάποια έννοια- από την ταυτοτική.

**Παρατήρηση 5.4.** Οι εφαπτόμενες, στο σημείο ισορροπίας, των διαχωριζουσών του γραμμικοποιημένου συστήματος, είναι, επίσης, εφαπτόμενες των μη γραμμικών διαχωριζουσών (πρβλ. Σχ. 5.1). Οι διευθύνσεις των γραμμικών διαχωριζουσών, παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάλυση των μη γραμμικών συστημάτων και λέγονται κύριες διευθύνσεις.

**Παρατήρηση 5.5.** Ένα σημείο ισορροπίας ενός μη γραμμικού συστήματος λέγεται μη απλό αν το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα είναι μη απλό. Υπενθυμίζουμε ότι, τέτοια συστήματα έχουν μια ευθεία γραμμή (ή, ενδεχομένως, και ένα ολόκληρο επίπεδο) από σημεία ισορροπίας. Οι μη γραμμικοί όροι  $h_1(x,y), h_2(x,y)$  συστημάτων της μορφής (5.1) μπορούν να μεταβάλλουν ουσιαστικά αυτή την συμπεριφορά.

Πράγματι, σε αντίθεση με τα απλά σημεία ισορροπίας, υπάρχουν άπειροι διαφορετικοί τύποι τοπικών διαγραμμάτων φάσεων. Στα επόμενα σχήματα βλέπουμε τι μπορεί να συμβεί ακόμα και για μη γραμμικότητες πολυωνυμικού τύπου χαμηλού βαθμού. Οι γραμμικοποιήσεις όλων των συστημάτων αυτών, έχουν μια τουλάχιστον ευθεία γραμμή από σημεία ισορροπίας ως διαγράμματα φάσεων.

Να σημειώσουμε, τέλος, ότι γραμμές από σημεία ισορροπίας μπορεί να εμφανιστούν και σε μη γραμμικά συστήματα· δεν είναι απαραίτητως ευθείες και αποτελούνται πάντα από μη απλά σημεία ισορροπίας. Όλα αυτά καθιστούν εύλογο το γεγονός ότι δεν υπάρχει λεπτομερής ταξινόμηση των μη απλών σημείων ισορροπίας.

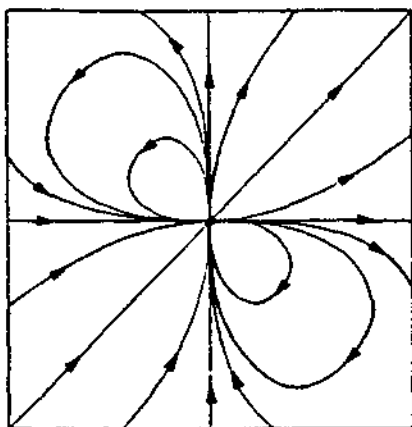




Μη γραμμικό σύστημα

$$x' = x(x+2y)$$

$$y' = y(2x+y)$$



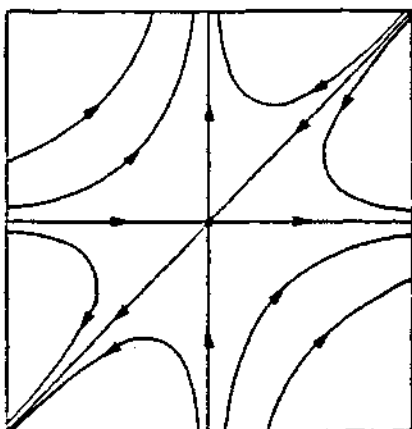
Γραμμικοποιημένο σύστημα

$$x' = 0$$

$$y' = 0$$

$$x' = x(x-2y)$$

$$y' = -y(2x-y)$$

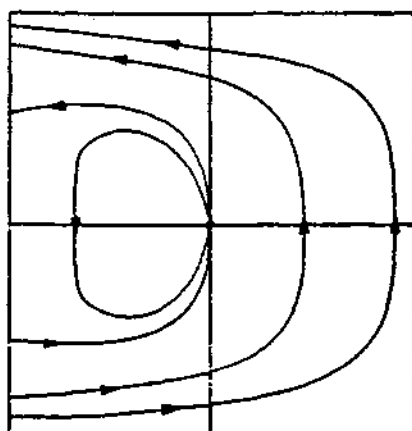


$$x' = 0$$

$$y' = 0$$

$$x' = -y^5$$

$$y' = x+y^2$$



$$x' = 0$$

$$y' = x$$

Σχήμα 5.3.

## 6. ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

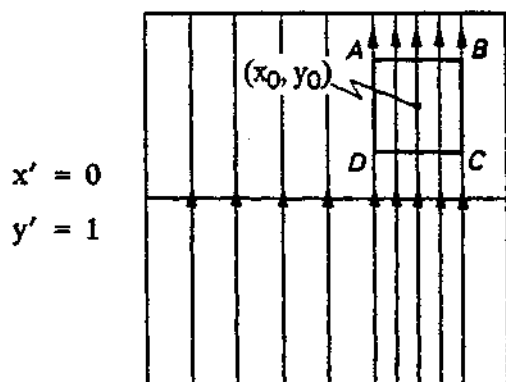
Κάθε σημείο του διαγράμματος φάσεων του συστήματος

$$\begin{aligned}x' &= F(x,y) \\ y' &= G(x,y)\end{aligned}$$

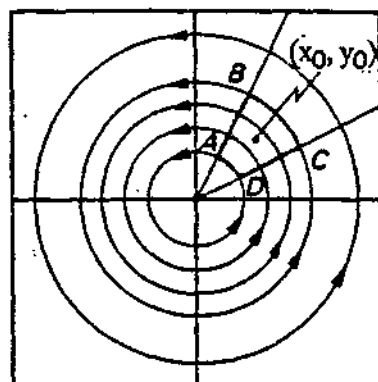
που δεν είναι σημείο ισορροπίας, λέγεται κανονικό σημείο.

Έτσι, αν το  $(x_0, y_0)$  είναι ένα κανονικό σημείο, τότε  $(F(x_0, y_0), G(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$  και λόγω της συνέχειας των  $F$  και  $G$ , υπάρχει μια περιοχή του  $(x_0, y_0)$  που περιέχει μόνο κανονικά σημεία. Κατά συνέπεια, το τοπικό διάγραμμα φάσεων σε ένα κανονικό σημείο, δεν περιέχει σημεία ισορροπίας. Υπάρχει ένα σημαντικό αποτέλεσμα που αφορά στην ποιοτική ισοδυναμία τέτοιων τοπικών διαγραμμάτων φάσεων: πρόκειται για το "Θεώρημα του Κιβωτίου Ροής" (Flow Box Theorem).

Ας θεωρήσουμε τα τοπικά διαγράμματα φάσεων σε ένα τυπικό κανονικό σημείο, που έχουν σχεδιαστεί στα Σχήματα 6.1 ως 6.3. Σε όλες τις περιπτώσεις έχει σχεδιαστεί μια ειδική περιοχή του  $(x_0, y_0)$  που λέγεται κιβώτιο ροής. Οι τροχιές του συστήματος εισέρχονται από τη μια πλευρά και εξέρχονται από την απέναντι της, ενώ δεν υπάρχουν τροχιές που να διαφεύγουν από τις πλαϊνές πλευρές. Για κάθε ένα από αυτά τα διαγράμματα φάσεων, μπορούν να βρεθούν νέες συντεταγμένες του επιπέδου, έτσι ώστε το τοπικό διάγραμμα φάσεων εντός του κιβωτίου ροής να είναι όπως αυτό του Σχ. 6.1.



Σχήμα 6.1.

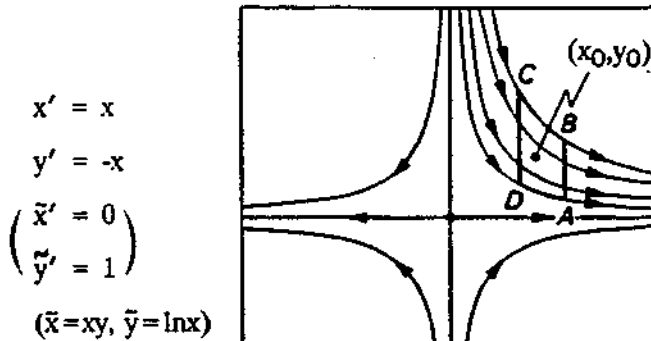


Σχήμα 6.2.

$$\begin{aligned}x' &= -y \\ y' &= x \\ (r' &= 0) \\ (\theta' &= 1) \\ (r &= (x^2 + y^2)^{1/2}, \\ \theta &= \text{τοξεφ}(y/x)\end{aligned}$$

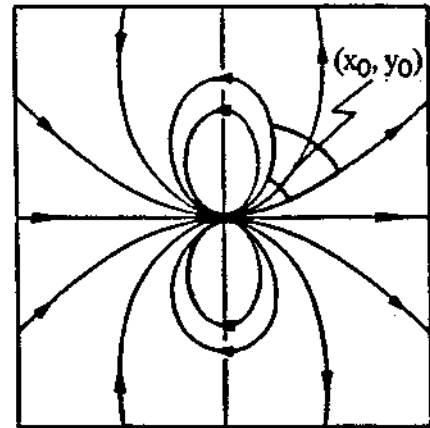
Πιο συγκεκριμένα, για το Σχ. 6.2 θεωρούμε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ . Στο  $(r, \theta)$ -επίπεδο, οι κύκλοι ( $r = \text{σταθ.}$ ) γίνονται ευθείες παράλληλες με τον άξονα  $\theta = 0$  και οι ακτινικές γραμμές ( $\theta = \text{σταθ.}$ ) γίνονται

ευθείες παράλληλες με τον άξονα  $r=0$ . Συνεπώς το διάγραμμα φάσεων εντός του κιβωτίου ροής στο Σχ. 6.2, είναι,  $(r,\Theta)$ -επίπεδο, το ίδιο με εκείνο του Σχ. 6.1.



Υπάρχουν συντεταγμένες που μετασχηματίζουν το τοπικό διάγραμμα φάσεων του Σχ. 6.4 στο  $(x_0, y_0)$  σε μορφή όπως εκείνη του Σχ. 6.1.

Σχήμα 6.3.



Σχήμα 6.4.

Για το Σχ. 6.3 οι τροχιές στην περιοχή του  $(x_0, y_0)$  βρίσκονται επί των υπερβολών  $xy = c > 0$ . Εισάγοντας τις νέες μεταβλητές  $\bar{x} = xy$  και  $\bar{y} = \ln x$ , τότε το κιβώτιο ροής φράσσεται από τις ευθείες  $\bar{x} = \text{σταθ.}$  και  $\bar{y} = \text{σταθ.}$  Στο  $\bar{x}, \bar{y}$ -επίπεδο, το διάγραμμα φάσεων είναι, πάλι, ίδιο με αυτό του Σχ. 6.1.

Αυστηρότερα, έχουμε το

**Θεώρημα 6.1. ("Θεώρημα του Κιβωτίου Ροής").** Έστω  $(x_0, y_0)$  ένα κανονικό σημείο του συστήματος

$$\begin{aligned} x' &= F(x, y) \\ y' &= G(x, y) \end{aligned}$$

Τότε, σε μια ικανοποιητικά μικρή περιοχή του  $(x_0, y_0)$ , υπάρχει μια διαφορίσιμη αλλαγή συντεταγμένων

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \phi(x, y) \\ \bar{y}' &= \psi(x, y) \end{aligned}$$

τέτοια ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= 0 \\ \bar{y}' &= 1 \end{aligned}$$

Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [Hi-Sma], σελ. 242.

**Παρατήρηση 6.1.** Το θεώρημα 6.1 εγγυάται την ύπαρξη νέων συντεταγμένων που έχουν την παραπάνω ιδιότητα, τουλάχιστον σε μια περιοχή οποιουδήποτε κανονικού σημείου, για οποιοδήποτε σύστημα. Συνεπώς, τα τοπικά διαγράμματα φάσεων στα κανονικά σημεία, είναι όλα ποιοτικά ισοδύναμα.

**Παρατήρηση 6.2.** Τα θεωρήματα Γραμμικοποίησης και "Κιβωτίου Ροής" μας δίνουν τοπικά διαγράμματα φάσεων στα περισσότερα απλά σημεία ισορροπίας και σε όλα τα κανονικά σημεία. Αυτές, όμως, οι πληροφορίες δεν προσδιορίζουν το πλήρες διάγραμμα φάσεων ενός συστήματος, όπως δείχνει το ακόλουθο παράδειγμα: το σύστημα

$$\begin{aligned}x' &= 2x - x^2 \\y' &= -y + xy\end{aligned}\quad (6.1)$$

έχει σημεία ισορροπίας τα  $A=(0,0)$  και  $B=(2,0)$ . Τα γραμμικοποιημένα συστήματα είναι

$$\begin{aligned}x' &= 2x \\y' &= -y\end{aligned}\quad \text{στο } A \quad (6.2)$$

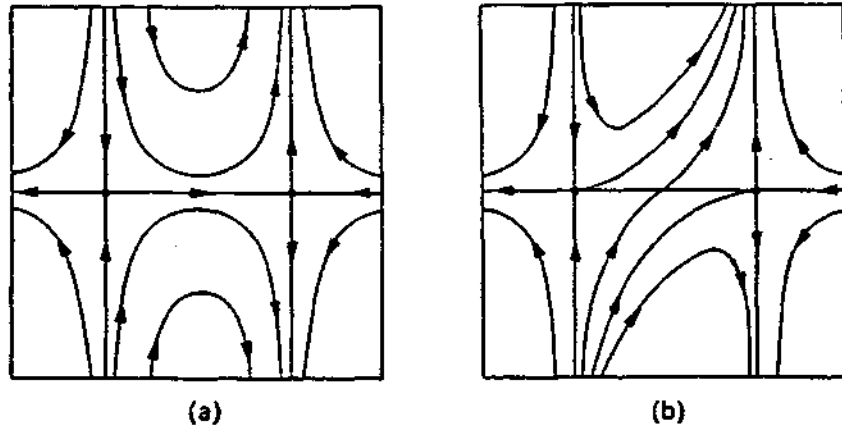
και

$$\begin{aligned}\bar{x}' &= -2\bar{x} \\ \bar{y}' &= \bar{y}\end{aligned}\quad \text{στο } B \quad (6.3)$$

Από το Θεώρημα Γραμμικοποίησης προκύπτει ότι το (6.1) έχει σαγματικά σημεία στα  $A$  και  $B$ . Επιπλέον, οι μη γραμμικές διαχωρίζουσες αυτών των σαγματικών σημείων είναι εφαπτόμενες στις κύριες διευθύνσεις, στα  $A$  και  $B$ . Για τα (6.2) και (6.3) οι κύριες διευθύνσεις συμπίπτουν με τους τοπικούς άξονες συντεταγμένων.

Αυτές οι πληροφορίες είναι ανεπαρκείς για τον προσδιορισμό του ποιοτικού τύπου του ολικού διαγράμματος φάσεων. Το Σχ. 6.5 δείχνει δύο διαγράμματα φάσεων που είναι συμβιβαστά με την τοπική συμπεριφορά. Στο Σχ. 6.5 (a) τα δύο σαγματικά σημεία έχουν μια κοινή διαχωρίζουσα, ενώ στο Σχ. 6.5 (b) δεν έχουν. Αυτή είναι μια ποιοτική διαφορά: δεν υπάρχει συνεχής, 1-1 και επί απεικόνιση που συσχετίζει τα δύο διαγράμματα φάσεων.

Για το (6.1), παρατηρούμε ότι  $x' \equiv 0$  επί των ευθειών  $x=0$  και  $x=2$  έτσι, ώστε οι τροχιές συμπίπτουν με αυτές τις ευθείες. Επιπλέον,  $y' = 0$  όταν  $y=0$ . Έτσι προκύπτει ότι το Σχ. 6.5(a) δίνει το σωστό ποιοτικό τύπο διαγράμματος φάσεων.



Σχήμα 6.5.

## 7. Η ΑΜΕΣΗ Ή ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΛΥΑΡΟΥΝΟΒ

Είναι διαισθητικά φανερό, ότι αν η ολική ενέργεια ενός φυσικού συστήματος έχει τοπικό ελάχιστο σε κάποιο σημείο ισορροπίας, τότε αυτό το σημείο είναι ευσταθές. Αυτή η ιδέα γενικεύθηκε από τον Α.Μ. Λυαρουνοβ και αποτέλεσε μια απλή αλλά ισχυρή μέθοδο μελέτης προβλημάτων ευστάθειας. Πιο συγκεκριμένα, στην §5 το κύριο εργαλείο αντιμετώπισης θεμάτων σχετικών με τη συμπεριφορά ενός μη γραμμικού συστήματος, ήταν το θεώρημα Γραμμικοποίησης. Αυτό το θεώρημα μας έδινε αποτελέσματα μόνο όταν τα σημεία ισορροπίας ήταν απλά και δεν ήταν κέντρα. Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε μια μέθοδο που μας επιτρέπει την ταξινόμηση των σημείων ισορροπίας σε ευσταθή, ασυμπτωτικά ευσταθή και ασταθή. Ξεκινάμε με ένα παράδειγμα

### Παράδειγμα 7.1. Η εξίσωση

$$\begin{aligned}u'' + u + g(u') &= 0 \\g(0) &= 0, \quad g'(0) > 0\end{aligned}$$

μετατρέπεται μέσω του γνωστού μετασχηματισμού

$$u = x, \quad u' = y$$

στο (μη γραμμικό) σύστημα

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -x - g(y)\end{aligned}$$

που έχει γραμμικοποιήσει την

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -g'(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Για τις ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2$  του προηγούμενου πίνακα ισχύει

- (i) αν  $g'(0) > 0$  τότε  $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$  και  $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$
- (ii) αν  $g'(0) = 0$  τότε  $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$

Στην περίπτωση (ii) η μηδενική λύση του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι ευσταθής, αλλά δεν μπορούμε να εξάγουμε κανένα

συμπέρασμα για το μη γραμμικό σύστημα, αφού το  $(0,0)$  είναι κέντρο. Καταφεύγουμε τότε στην εξής μέθοδο:

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση του μη γραμμικού συστήματος επί  $x$ , τη δεύτερη επί  $y$  και προσθέτοντας παίρνουμε

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) = xx' + yy' = -yg(y) \leq 0$$

αφού

$$g(0) = 0 \text{ και } g'(y) \geq 0$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η παράσταση  $(x^2+y^2)(t)$  είναι μη αύξουσα συνάρτηση του  $t$  και συνεπώς

$$|(x,y)(t)| \leq |(x,y)(0)|$$

Η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει την ευστάθεια της μηδενικής λύσης του μη γραμμικού συστήματος. Η συνάρτηση  $(x^2+y^2)(t)$  αποτελεί μια συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα. Ο προσδιορισμός μιας κατάλληλης συνάρτησης που θα μας επιτρέψει να αποφανθούμε για την ευστάθεια ενός συστήματος, είναι το δύσκολο πρακτικό χαρακτηριστικό της μεθόδου.

Έστω  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  και  $V(x)$  μια βαθμωτή συνάρτηση των  $x_1, \dots, x_n$ .

**Ορισμός 7.1.** Η  $V(x)$  λέγεται θετικά (αρνητικά) οριμένα σε μια περιοχή  $\pi$  του  $O$ , αν ισχύει  $V(x) > 0$  ( $V(x) < 0$ ) για κάθε  $x \neq O$  στην  $\pi$  και  $V(O) = 0$ .

Η  $V(x)$  λέγεται θετικά (αρνητικά) ημιορισμένη αν το " $>$ " (" $<$ ") του προηγούμενου ορισμού αντικατασταθεί με " $\geq$ " (" $\leq$ ").

Θεωρούμε το αυτόνομο σύστημα

$$x' = f(x), \quad f = (f_1, \dots, f_n) \quad (7.1)$$

**Ορισμός 7.2.** Η ολική παράγωγος μιας συνάρτησης  $V(x)$  κατά μήκος μιας τροχιάς  $\gamma$  του αυτόνομου συστήματος (7.1) που αντιστοιχεί σε μια λύση  $x(t)$ , είναι

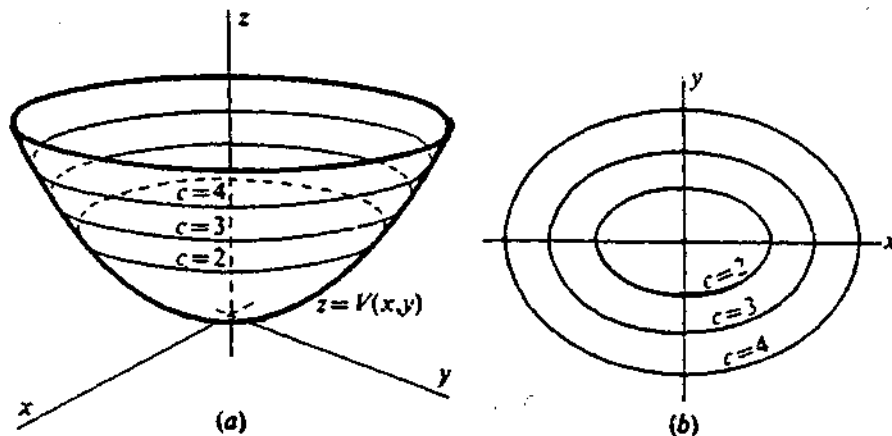
$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_\gamma = \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(\mathbf{x})$$

Όταν χρησιμοποιούμε την  $V$  ως συνάρτηση της θέσης, γράφουμε  $V'(\mathbf{x})$ , όπου

$$V'(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(\mathbf{x}) \quad (7.2)$$

και μπορούμε να λέμε ότι "η  $V$  είναι συνεχής" ή "η  $V'$  είναι θετικά ορισμένη" εννοώντας ως προς  $\mathbf{x}$ .

Έστω ότι η  $V(\mathbf{x})$  είναι θετικά ορισμένη. Ένα απλό πρότυπο μιας τέτοιας συνάρτησης σε διάσταση 2, έχει σχεδιαστεί στο Σχ. 7.1 (α).



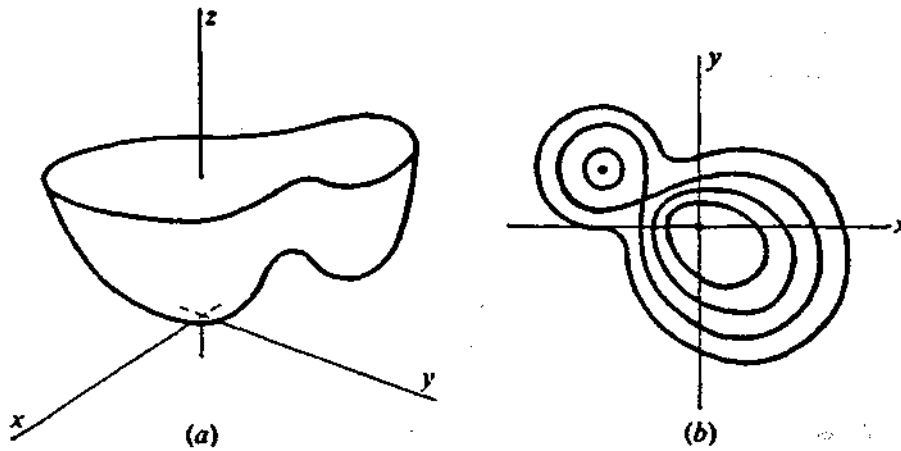
Σχήμα 7.1.

Οι ισοκλινείς καμπύλες  $V(x, y) = c$  συνιστούν ένα σύστημα που αποτελείται από απλές κλειστές καμπύλες που περικλείουν το  $(0, 0)$  και τείνουν στο  $(0, 0)$  όταν  $c \rightarrow 0$ . Γενικώς, μια θετικά ορισμένη συνάρτηση, δεν είναι τόσο απλή· μπορεί να έχει μορφή όπως στο Σχ. 7.2 (α) με αρκετά ελάχιστα. Ακόμα και σε τέτοια περίπτωση, υπάρχει μια περιοχή του  $(0, 0)$ , στην οποία η  $V$  έχει την απλή δομή του Σχ. 7.1.

Στα θεωρήματα που ακολουθούν, περιοριζόμαστε σε τέτοιες, ακριβώς, περιοχές της αρχής των αξόνων. Σε μεγαλύτερη διάσταση, δεν μπορούμε να έχουμε εποπτεία, αλλά όταν η  $V(\mathbf{x})$  είναι θετικά ορισμένη και έχει συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε για κάθε αρκετά μικρό,



θετικό  $c$  και για  $x$  σε κάποια ικανοποιητικά μικρή περιοχή της αρχής των αξόνων, ισχύει ένα ανάλογο αποτέλεσμα.



Σχήμα 7.2.

Στο επόμενο θεώρημα, υποθέτουμε ότι όλες οι κατασκευές γίνονται σε μια περιοχή  $\pi^*$  της αρχής των αξόνων, που ορίζεται από τη σχέση

$$V(x) < c^*$$

για την οποία ισχύουν τα παραπάνω. Η οικογένεια περιοχών  $\pi_c$  που ορίζεται από τη σχέση  $V(x) < c$ , για μικρά  $c$ , αποτελεί ένα κατάλληλο μέσο για την αναγνώριση της ευστάθειας. Αντί για περιοχές  $\|x\| < \varepsilon$ , χρησιμοποιούμε περιοχές

$$V(x) < \varepsilon \leq c^*$$

**Θεώρημα 7.1.** Έστω  $x(t) = 0$ ,  $t \geq t_0$  η μηδενική λύση του συστήματος

$$x' = f(x), f(0) = 0 \quad (7.3)$$

Αν υπάρχει μια συνάρτηση  $V(x)$ , με τις ακόλουθες ιδιότητες σε κάποια περιοχή  $\pi^*$  του  $x=0$ ,

- (i) η  $V(x)$  και οι μερικές παράγωγοι της είναι συνεχείς,
  - (ii) η  $V(x)$  είναι θετικά ορισμένη,
  - (iii) η  $V'(x)$  είναι αρνητικά ημιορισμένη,
- τότε η  $x(t)$  είναι ευσταθής για  $t \geq t_0$ .

Αν η (iii) αντικατασταθεί από την ισχυρότερη συνθήκη  
(iii)' η  $V'(x)$  είναι αρνητικά ορισμένη,  
τότε η  $x(t)$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Απόδειξη. Έστω  $\varepsilon > 0$  τέτοιο, ώστε  $\pi_\varepsilon \in \pi^*$ . Λόγω της (iii), στην  $\pi_\varepsilon$  ισχύει ότι  $V'(x) \leq 0$ , και συνεπώς η  $V$  είναι μη αύξουσα ως προς  $t$ : έτσι, κάθε ημιτροχιά που αρχίζει μέσα στην  $\pi_\varepsilon$ , παραμένει μέσα της. Το ίδιο ισχύει για κάθε ικανοποιητικά μικρό  $\varepsilon$  και κατά συνέπεια για κάθε μικρή περιοχή της αρχής των αξόνων. Άρα η μηδενική λύση είναι ευσταθής.

Για το δεύτερο μέρος του θεωρήματος: αφού η  $V'$  είναι αρνητικά ορισμένη, η  $V(x(t))$  θα φθίνει πάνω σε κάθε ημιτροχιά  $x(t)$ . Έτσι ή θα ισχύει ότι  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = 0$  και όλες οι ημιτροχιές τείνουν στην αρχή των αξόνων, είτε θα υπάρχει μια (τουλάχιστον) ημιτροχιά  $x(t)$  τέτοια, ώστε

$$V(x(t)) \geq m > 0, \forall t \geq t_0 \quad (7.4)$$

για κάποιο  $m > 0$ . Αφού η  $x(t)$  είναι ευσταθής, υπάρχει μια περιοχή  $D$ ,

$$D: m \leq V(x) \leq c$$

που περιέχει αυτήν την ημιτροχιά. Η  $D$  είναι κλειστή και λόγω της (i) η  $V'$  είναι συνεχής επί της  $D$ , πράγμα που σημαίνει ότι η  $V'$  έχει το άνω φράγμα της στην  $D$  και αυτό είναι μια αρνητική σταθερά

$$V'(x) \leq -M < 0, x \in D, M > 0 \quad (7.5)$$

Ολοκληρώνοντας την (7.5) από  $t_0$  ως  $t$  παίρνουμε

$$V(x(t)) - V(x(t_0)) \leq -M(t - t_0) \quad \forall t > t_0$$

που αντιβαίνει στην (7.4). Έτσι  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = 0$ .

**Ορισμός 7.3.** Μια συνάρτηση  $V$  που ικανοποιεί τις υποθέσεις (i), (ii) και (iii) του Θεωρήματος 7.1 λέγεται ασθενής συνάρτηση **Lyapunov**.

πον. Αν η (iii) αντικατασταθεί από την (iii)', τότε λέγεται ισχυρή συνάρτηση Lyapunov.

**Παράδειγμα 7.2.** Θεωρούμε την εξίσωση

$$u'' + u + u' + (u')^3 = 0$$

Θέτοντας  $u=x$ ,  $u'=y$  παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x - y - y^3 \end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε την

$$V_1(x,y) = 1/2 (x^2 + y^2)$$

παρατηρούμε ότι

$$V_1'(x,y) = xx' + yy' = -y^2 - y^4 \leq 0$$

και έτσι η  $V_1$  είναι μια ασθενής συνάρτηση Lyapunov και το σύστημα είναι ευσταθές. Η  $V_1$  δεν προσφέρεται για τον έλεγχο της ασυμπτωτικής ευστάθειας. Αντιθέτως, για την

$$V_2(x,y) = 1/2 (x^2 + y^2) + \alpha xy$$

ισχύει

$$\begin{aligned} V_2'(x,y) &= -y^2 - y^4 + \alpha y^2 - \alpha x^2 - \alpha xy - \alpha xy^3 = \\ &= -2\alpha \frac{x^2}{2} - 2(1-\alpha) \frac{y^2}{2} - y^4 - (1+y^2)\alpha xy \leq \\ &\leq -\beta \left( \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \alpha xy \right) = -\beta V_2(x,y) \end{aligned}$$

για κάποιο  $\beta > 0$  και κατάλληλα επιλεγμένο  $\alpha$ .

Έτσι η  $V_2$  είναι μια ισχυρή συνάρτηση Lyapunov και έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια.

Παρατηρούμε, ότι η ισχύς των αποτελεσμάτων εξαρτάται από την επιλογή της συνάρτησης Lyapunov.

Σε κάποιες περιπτώσεις, μπορούμε να πάρουμε ασυμπτωτική ευστάθεια από συστήματα που έχουν μια ασθενή συνάρτηση Lyapunov. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο

**Θεώρημα 7.2.** Αν υπάρχει μια ασθενής συνάρτηση Lyapunov  $V$  για το σύστημα

$$x' = f(x)$$

σε μια περιοχή ενός μεμονωμένου σημείου ισορροπίας στην αρχή των αξόνων, τότε, με την προϋπόθεση ότι η  $V'(x)$  δεν μηδενίζεται ταυτοτικά πάνω σε καμιά τροχιά, εκτός από το ίδιο το σημείο ισορροπίας, η αρχή των αξόνων είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Η απόδειξη βασίζεται στις ίδιες ιδέες με εκείνη του θεωρήματος 7.1 και γι' αυτό αφήνεται ως άσκηση.

**Παράδειγμα 7.3.** Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x - (1-x^2)y \end{aligned}$$

Η συνάρτηση  $V(x,y) = x^2 + y^2$  είναι μια ασθενής συνάρτηση Lyapunov στον δίσκο  $x^2 + y^2 < 1$ , αφού  $V'(x,y) = -2y^2(1-x^2)$ . Η  $V'$  μηδενίζεται μόνο επί των ευθειών  $y=0$  και  $x=\pm 1$ . Όμως δεν υπάρχουν τροχιές του συστήματος που να βρίσκονται πάνω σε αυτές τις ευθείες, αφού επί της  $y=0$  ισχύει  $y' = -x \neq 0$  και επί των  $x=\pm 1$  ισχύει  $x' = y \neq 0$ . Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα το  $(0,0)$  είναι, συνεπώς, ασυμπτωτικά ευσταθές.

**Παρατήρηση 7.1.** Μια επιπλέον πληροφορία που προκύπτει από την απόδειξη του Θεωρήματος 7.1, είναι ότι εκτός από τη μηδενική λύση, και όλες οι λύσεις που ξεκινούν μέσα από συγκεκριμένες περιοχές της αρχής των αξόνων, είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς. Μια τέτοια περιοχή λέγεται πεδίο έλξης. Ένα πεδίο έλξης μπορεί να βρεθεί με τη διαδικασία προσδιορισμού της περιοχής στην οποία η  $V$  έχει την ιδιότητα της περιοχής που περιγράφεται στη σελίδα 64· γενικώς, όμως, δεν θα προσδιοριστεί έτσι το μέγιστο πεδίο έλξης, αφού αυτό εξαρτάται από την επιλογή της συγκεκριμένης συνάρτησης Lyapunov. Στο

Παράδειγμα 7.3 το πεδίο έλξης είναι το σύνολο  $\{(x,y): x^2+y^2 < 1\}$ . Μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει ότι η συνάρτηση

$$V(x,y) = x^2 + y^2$$

ορίζει μια ισχυρή συνάρτηση Lyaroupon, σε ολόκληρο το επίπεδο  $\mathbb{R}^2$ , για το σύστημα

$$x' = -x-xy^2, \quad y' = -y-yx^2$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το σύστημα είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Η ύπαρξη του πεδίου έλξης προκύπτει από το Θεώρημα Γραμμικοποίησης, αλλά αυτή η οπτική δεν δίνει καμιά ένδειξη για το μέγεθος του πεδίου έλξης.

Όπως παρατηρήσαμε και προηγουμένως, σε πολύπλοκες καταστάσεις η κατασκευή μιας κατάλληλης συνάρτησης Lyaroupon μπορεί να είναι δύσκολη. Σε αυτή την κατεύθυνση είναι συχνά χρήσιμη η επόμενη

**Πρόταση 7.1.** Η συνάρτηση  $U(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$  είναι θετικά ορισμένη τότε και μόνον τότε αν  $a > 0$  και  $b^2 - 4ac < 0$  και αρνητικά ορισμένη τότε και μόνο τότε αν  $a < 0$  και  $b^2 - 4ac < 0$ .

**Άπόδειξη.** Αν  $y=0$ , έχουμε ότι  $U(x,0) = ax^2$  και έτσι  $U(x,0) > 0$  για  $x \neq 0$ , τότε και μόνο τότε αν  $a > 0$ . Αν  $y \neq 0$ , έχουμε

$$U(x,y) = y^2 \left\{ a \left( \frac{x}{y} \right)^2 + b \left( \frac{x}{y} \right) + c \right\}$$

Όταν  $a > 0$ , το πολυώνυμο ως προς  $x/y$  (που είναι θετικό για μεγάλο  $x/y$ ) είναι θετικό για κάθε  $x/y$  τότε και μόνο τότε αν  $b^2 - 4ac < 0$ .

Για το δεύτερο μέρος της Πρότασης, αρκεί να θεωρήσουμε την  $-U(x,y)$ .

Η προσέγγιση της άμεσης μεθόδου του Lyaroupon μπορεί να τροποποιηθεί, έτσι, ώστε να ελέγχει την αστάθεια της μηδενικής λύσης. Σχετικά έχουμε το

**Θεώρημα 7.3.** Έστω  $x(t)=0, t \geq t_0$  η μηδενική λύση του συστήματος

$$x' = f(x), \text{ όπου } f(0)=0$$

Αν υπάρχει μια συνάρτηση  $U(x)$  τέτοια, ώστε σε κάποια περιοχή

$$\|x\| \leq k$$

να ισχύουν:

- (i) η  $U(x)$  και οι μερικές παράγωγοι της είναι συνεχείς,
- (ii)  $U(0)=0$ ,
- (iii)  $U'(x)$  είναι θετικά ορισμένη για το σύστημα,
- (iv) σε κάθε περιοχή της αρχής των αξόνων, υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο  $x$  στο οποίο  $U(x)>0$ , τότε η μηδενική λύση είναι ασταθής.

**Απόδειξη.** Λόγω του (iv), για δεδομένο  $\delta: 0<\delta<k$ , υπάρχει  $x_\delta$  τέτοιο, ώστε  $0 < \|x_\delta\| < \delta$  και  $U(x_\delta) > 0$ . Έστω  $x(\delta,t), t \geq t_0$  η λύση που ικανοποιεί την  $x(\delta,t_0) = x_\delta$ . Η τροχιά της δεν μπορεί να εισχωρήσει στην αρχή των αξόνων καθώς  $t \rightarrow +\infty$ , αφού  $U(0)=0$ , αλλά  $U'(x) > 0, x \neq 0$ . Αφού η  $U'$  είναι θετικά ορισμένη και συνεχής και αφού η τροχιά φράσσεται μακριά από την αρχή των αξόνων, υπάρχει ένας αριθμός  $m>0$  τέτοιος, ώστε

$$U'(x(\delta,t)) \geq m > 0, t \geq t_0$$

υπό την προϋπόθεση ότι

$$\|x(\delta,t)\| \leq k$$

Συνεπώς

$$U(x(\delta, t)) - U(x(\delta, t_0)) = \int_{t_0}^t U'(x(\delta, t)) dt \geq m(t - t_0)$$

Η  $U(x)$  ως συνεχής συνάρτηση φράσσεται επί της  $\|x\| \leq k$ . Όμως το δεξιό μέλος της τελευταίας σχέσης είναι μη φραγμένο, που σημαίνει ότι η  $x(\delta, t)$  δεν μπορεί να παραμένει εντός της  $\|x\| \leq k$  και έτσι η τροχιά φθάνει το σύνορο  $\|x\| = k$ .

Συνεπώς, αν δοθεί τυχόν  $\varepsilon: 0 < \varepsilon < k$ , τότε για κάθε  $\delta$ -οσοδήποτε μικρο-υπάρχει μια τουλάχιστον λύση  $x(\delta, t)$  με  $\|x(\delta, t_0)\| < \delta$ , αλλά  $\|x(\delta, t)\| > \varepsilon$  για κάποιο  $t$ . Η μηδενική λύση είναι, λοιπόν, ασταθής.

**Παράδειγμα 7.4.** Με τη χρήση της συνάρτησης

$$U(x, y) = ax^3 + \beta x^2 y + \gamma x^2 y + \delta y^3$$

για κατάλληλη επιλογή των σταθερών  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , ναδειχτεί ότι το σύστημα

$$x' = x^2, \quad y' = 2y^2 - xy$$

είναι ασταθές στην αρχή των αξόνων.

Η παράγωγος της  $U$  κατά μήκος των τροχιών του συστήματος είναι

$$U'(x, y) = 3ax^4 + \beta x^3 y + (2\beta - \gamma)x^2 y^2 + (4\gamma - 3\delta)xy^3 + 6\delta y^4$$

Παρατηρούμε ότι επιλέγοντας

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = 4, \quad \gamma = 2, \quad \delta = \frac{4}{3}$$

έχουμε

$$U'(x, y) = x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + 8y^4 = (x+y)^4 + 7y^4$$

που είναι, προφανώς, θετικά ορισμένη. Η συνάρτηση  $U$  δίνεται από τη σχέση

Αυτή η συνάρτηση έχει την ιδιότητα

$$U(x,y) = \frac{1}{3} x^3 + 4x^3y + 2xy^2 + \frac{4}{3} y^3$$

$$U(x,0) = \frac{1}{3} x^3$$

και έτσι υπάρχουν σημεία, επί του  $x$ -άξονα, οσοδήποτε κοντά στο  $(0,0)$ , για τα οποία η  $U$  είναι θετική. Από το Θεώρημα 7.3. έπεται ότι το  $(0,0)$  είναι ασταθές.

**Παράδειγμα 7.5. (Η εξίσωση Lienard).** Θεωρούμε την εξίσωση

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0$$

όπου οι  $f$  και  $g$  είναι συνεχείς και

(i) η  $f(x)$  είναι θετική σε μια περιοχή του μηδενός με εξαίρεση το μηδέν,

(ii) η  $g(x)$  είναι θετική/αρνητική όταν το  $x$  είναι θετικό/αρνητικό (πράγμα που σημαίνει ότι  $g(0) = 0$ ).

Αν θέσουμε

$$F(x) = \int_0^x f(u)du$$

η εξίσωση γράφεται ως σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= y - F(x) \\ y' &= -g(x) \end{aligned}$$

και ορίζοντας

$$G(x) = \int_0^x g(u)du$$

θεωρούμε τη συνάρτηση



$$V(x,y) = G(x) + \frac{1}{2} y^2$$

Αυτή είναι, προφανώς, θετικά ορισμένη και

$$V'(x,y) = g(x)x' + yy' = -g(x)F(x)$$

που είναι αρνητικά ορισμένη. Κατά συνέπεια η μηδενική λύση είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

**Παράδειγμα 7.6. (Προβλήματα Hamilton).** Τα συντηρητικά προβλήματα, κυρίως της δυναμικής, μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$p_i' = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad q_i' = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.6)$$

όπου η  $H$  είναι η λεγόμενη συνάρτηση Hamilton (Hamiltonian) του συστήματος, οι  $q_i$  είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες και οι  $p_i$  οι γενικευμένες ορμές,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Η συνάρτηση Hamilton ορίζεται ως

$$H(p, q) = T(p, q) + V(q) \quad (7.7)$$

όπου  $T$  η κινητική και  $V$  η δυναμική ενέργεια: υποτίθεται ότι  $V(0) = 0$ . Η  $T$  είναι μια θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή ως προς  $p_i$  και έτσι  $H(0, 0) = 0$ .

Έστω ότι το  $q = 0$  είναι ελάχιστο της  $V(q)$ , έτσι, ώστε η  $V$  και συνεπώς και η  $H$ , είναι θετικά ορισμένη σε μια περιοχή της αρχής των αξόνων. Τότε

$$H'(p, q) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i' + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} q_i' = 0$$

λόγω της (7.6).

Συνεπώς η  $H$  είναι μια ασθενής συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα (7.6). Άρα η μηδενική λύση  $p = 0, q = 0$ , που είναι μια θέση ισορροπίας, είναι ευσταθής όταν βρίσκεται σε ένα ελάχιστο της  $V$ .

Έστω, τώρα, ότι το  $q = 0$  είναι μέγιστο της  $V$  και ότι η  $V$  αναλύεται ως

$$V(\mathbf{q}) = \Pi_{\mu}(\mathbf{q}) + \Pi_{\mu+1}(\mathbf{q}) + \dots, \mu \geq 2$$

όπου το  $\Pi_{\mu}(\mathbf{q})$  είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $\mu \geq 1$  ως προς  $q_i$ . Θεωρούμε μια συνάρτηση  $U$  που ορίζεται ως

$$U(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n p_i q_i \quad (7.8)$$

Τότε η  $U$  ικανοποιεί τις συνθήκες (i), (ii) και (iv) του Θεωρήματος 7.3. Εξάλλου

$$\begin{aligned} U'(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \sum_{i=1}^n p_i q_i' + \sum_{i=1}^n p_i' q_i = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial T}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial T}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial V}{\partial q_i} = \\ &= 2T - \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_i} - \mu \Pi_{\mu}(\mathbf{q}) - (\mu + 1) \Pi_{\mu+1}(\mathbf{q}) - \dots \end{aligned}$$

(έχει χρησιμοποιηθεί το θεώρημα του Euler για ομογενείς συναρτήσεις, για τις  $T, \Pi_{\mu}, \Pi_{\mu+1}, \dots$ ). Οι κυρίαρχοι όροι της σειράς κοντά στο  $\mathbf{p}=\mathbf{q}=\mathbf{0}$  είναι οι  $2T - \mu \Pi_{\mu}(\mathbf{q})$ . Αφού, εξ υποθέσεως, το  $\Pi_{\mu}$  έχει μέγιστο στο  $\mathbf{q}=\mathbf{0}$  και η  $T$  είναι θετικά ορισμένη, η  $U'$  είναι αρνητικά ορισμένη σε μια περιοχή της αρχής των αξόνων. Συνεπώς, από το Θεώρημα 7.3, το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές, όταν βρίσκεται σε ένα μέγιστο της  $V$ .

Στη συνέχεια αυτής της παραγράφου, επεκτείνουμε τη μελέτη των συναρτήσεων Lyapunov με μια λεπτομερέστερη συζήτηση για το πεδίο έλξης ενός ασυμπτωτικά ευσταθούς σημείου ισορροπίας. Θα χρειαστούμε ορισμένες έννοιες της γεωμετρίας των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων.

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$x' = f(x) \ , \ x(t_0) = x_0 \quad (7.9)$$

και υποθέτουμε ότι  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , όπου  $\Omega$  ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ .

Από το θεώρημα του Peano, έπεται ότι η οικογένεια όλων των ειδικών λύσεων της  $x' = f(x)$ , μπορεί να αναπαρασταθεί από τη λύση  $\phi(t, x_0)$  του (7.9) θεωρούμενη ως συνάρτηση δύο μεταβλητών, της  $t \in I_{x_0}$  και της  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  ( $I_{x_0}$  είναι το μέγιστο διάστημα ύπαρξης λύσης (του (7.9))). Υπό αυτό το πρίσμα ιδωμένη, η  $\phi(t, x_0)$  λέγεται ροή της  $x' = f(x)$ .

Το υποσύνολο του  $\mathbb{R}^{n+1}$  που ορίζεται ως

$$\{t, \phi(t, x_0)\}: t \in I_{x_0}\}$$

λέγεται **διαδρομή** (trajectory) που διέρχεται από το  $x_0$ . Η διαδρομή εφάπτεται στα ευθύγραμμα τμήματα του πεδίου διευθύνσεων, σε κάθε σημείο του επιπέδου από το οποίο (σημείο) διέρχεται, όταν βρισκόμαστε στο  $\mathbb{R}^2$ .

Ορίζουμε ως θετική τροχιά,  $\gamma^+(x_0)$ , αρνητική τροχιά,  $\gamma^-(x_0)$ , και τροχιά,  $\gamma(x_0)$ , του  $x_0$  τα ακόλουθα σύνολα:

$$\gamma^+(x_0) = \bigcup_{t \in [0, \beta_{x_0})} \phi(t, x_0) \quad (7.10)$$

$$\gamma^-(x_0) = \bigcup_{t \in [\alpha_{x_0}, 0)} \phi(t, x_0) \quad (7.11)$$

$$\gamma(x_0) = \bigcup_{t \in [\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})} \phi(t, x_0) \quad (7.12)$$

όπου  $I_{x_0} = (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$ .

Είναι προφανές από αυτούς τους ορισμούς, ότι η τροχιά,  $\gamma(x_0)$ , είναι η προβολή της διαδρομής που διέρχεται από το  $x_0$  επί του χώρου φάσεων.

Όταν το  $x$  είναι σημείο ισορροπίας της  $x' = f(x)$ , τότε -εξ ορισμού-  $f(x) = 0$  και έτσι η σταθερή συνάρτηση  $x(t) = x$  είναι λύση για κάθε  $t$ . Συνεπώς  $\gamma(x) = x$ .

Είναι εύκολο (και αφήνεται ως άσκηση) να δειχτεί το ακόλουθο

**Λήμμα 7.1.** Υποθέτουμε ότι η λύση,  $\phi(t, x_0)$ , του προβλήματος αρχικών τιμών

$$x' = f(x) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

είναι μοναδική για κάθε  $x_0$ . Τότε

- (i) η  $\phi(t, x_0)$  είναι μονότονη συνάρτηση του  $t$ ,
- (ii) αν  $x_0 < y_0$ , τότε  $\phi(t, x_0) < \phi(t, y_0)$  για κάθε  $t$ ,
- (iii) αν η  $\gamma^+(x_0)$  (αντιστ. η  $\gamma^-(x_0)$ ) είναι φραγμένη, τότε  $\beta_{x_0} = +\infty$  (αντιστ.  $\alpha_{x_0} = -\infty$ ) και

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x_0) = \bar{x} \quad (\text{αντιστ. } \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x_0) = \bar{x})$$

όπου  $\bar{x}$  ένα σημείο ισορροπίας.

Ο προσδιορισμός των σημείων εκκίνησης και κατάληξης των τροχιών είναι ένα σημαντικό πρόβλημα και γι'αυτό εισάγουμε τις ακόλουθες έννοιες.

**Ορισμός 7.4.** Αν η  $\gamma^-(x_0)$  είναι φραγμένη, τότε το σύνολο

$$\alpha(x_0) := \left\{ p : \exists (t_k) \text{ με } \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = -\infty \text{ ώστε } \lim_{k \rightarrow -\infty} \phi(t_k, x_0) = p \right\}$$

(7.13)

λέγεται το  $\alpha$ -οριακό σύνολο του  $x_0$ .

Ομοίως, αν η  $\gamma^+(x_0)$  είναι φραγμένη, τότε το σύνολο

$$\omega(x_0) := \left\{ q : \exists (t_k) \text{ με } \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = \infty \text{ ώστε } \lim_{k \rightarrow -\infty} \phi(t_k, x_0) = q \right\}$$

(7.14)

λέγεται το  $\omega$ -οριακό σύνολο του  $x_0$ .

Με βάση αυτόν τον ορισμό το (iii) του Λήμματος 7.1 μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: τα οριακά σύνολα  $\alpha(x_0)$  και  $\omega(x_0)$ , αν υπάρχουν, είναι σημεία ισορροπίας.

Αυτή η "παράξενη" ορολογία (που είναι διεθνής), προέρχεται από το ότι το  $\alpha$  και το  $\omega$  είναι το πρώτο και το τελευταίο γράμμα του αλφαβήτου μας.

**Ορισμός 7.5.** Ένα υποσύνολο  $M$  του  $\mathbb{R}^n$  λέγεται αναλλοίωτο για το σύστημα (7.9), αν για κάθε  $x_0 \in M$  η τροχιά  $\gamma(x_0)$ , που διέρχεται από το  $x_0$ , ανήκει στο  $M$ . Συμβολικά:  $\phi(t, M) = M$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ .

Αντίστοιχα ορίζονται οι έννοιες του θετικά ( $\gamma^+(x_0)$  αντί για  $\gamma(x_0)$  και, φυσικά,  $t \in \mathbb{R}^+$  αντί για  $t \in \mathbb{R}$ ) αναλλοίωτου και του αρνητικά αναλλοίωτου υποσύνολου.

Στο επόμενο θεώρημα δίνονται μερικές από τις σημαντικές τοπολογικές ιδιότητες των οριακών συνόλων.

**Θεώρημα 7.4.** Το  $\alpha$ - και το  $\omega$ -οριακό σύνολο μίας τροχιάς  $\gamma$  είναι κλειστά και αναλλοίωτα. Αν επιπλέον η  $\gamma^+$  (αντιστ. η  $\gamma^-$ ) είναι φραγμένη, τότε το  $\omega$ -οριακό (αντιστ. το  $\alpha$ -οριακό) σύνολο είναι μη κενό, συμπαγές και συνεκτικό.

**Απόδειξη.** Αν  $t_n \rightarrow +\infty$ , τότε η  $\{\phi(t_n, x)\}$  έχει ένα οριακό σημείο, έστω  $y$ , και  $y \in \omega(x)$ : συνεπώς το  $\omega(x)$  είναι μη κενό.

Η κλειστότητα είναι προφανής, αφού εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι

$$\omega(\gamma) = \bigcap_{p \in \gamma} \overline{\gamma^+(p)} = \bigcap_{t \in (-\infty, +\infty)} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} \phi(t, p)} \quad (7.15)$$

και

$$\alpha(\gamma) = \bigcap_{p \in \gamma} \overline{\gamma^-(p)} = \bigcap_{t \in (-\infty, +\infty)} \overline{\bigcup_{t \leq \tau} \phi(t, p)} \quad (7.16)$$

Αν η  $\gamma^+$  είναι φραγμένη, τότε το  $\omega(\gamma)$  είναι συμπαγές, ως κλειστό και φραγμένο.

Για το αναλλοίωτο, θεωρούμε  $x_0 \in \gamma$  και  $y \in \omega(x_0)$ : τότε υπάρχει ακολουθία  $(t_n)$ ,  $t_n \rightarrow +\infty$ , τέτοια ώστε  $\phi(t_n, x_0) \rightarrow y$  όταν  $n \rightarrow +\infty$ . Συνεπώς, για οποιοδήποτε  $t \in (-\infty, +\infty)$  έχουμε

$$\phi(t + t_n, x_0) = \phi(t, \phi(t_n, x_0)) \rightarrow \phi(t, y) \text{ όταν } n \rightarrow +\infty \quad (7.17)$$

λόγω της συνέχειας της  $\phi$ . (Η ισότητα ισχύει γιατί, ως γνωστό

$\phi(0, x) = x$  και  $\phi(0 + t_n, x_0) = \phi(t_n, x_0)$  και  $\phi(0, \phi(t_n, x_0)) = \phi(t_n, x_0)$  και έχουμε υποθέσει το μονοσήμαντο των λύσεων για το (7.9)). Από την (7.17) έπεται ότι  $\gamma(y) \in \omega(x_0)$ , που αποδεικνύει το αναλλοίωτο του  $\omega(x_0)$ .

Έστω, τέλος, ότι το  $\omega(x_0)$  δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχουν δύο ξένα, κλειστά και συμπαγή σύνολα  $A$  και  $B$ , ώστε  $\omega(x_0) = A \cup B$ . Συνεπώς  $d(A, B) > 0$ .

Έστω  $d(A, B) = \rho$ . Έστω  $y_1 \in A$ ,  $y_2 \in B$ . Επιλέγουμε ακολουθίες  $(t_n)$  και  $(s_n)$  τέτοιες, ώστε  $\phi(t_n, x_0) \rightarrow y_1$  και  $\phi(s_n, x_0) \rightarrow y_2$ ,

$$d(\phi(t_n, x_0), y_1) < \frac{\rho}{3} \quad \text{και} \quad d(\phi(s_n, x_0), y_2) < \frac{\rho}{3}$$

και να ισχύει

$$t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < \dots < t_j < s_j < t_{j+1} < s_{j+1} < \dots$$

Θεωρούμε το τόξο

$$\{\phi(t, x_0) : t_n \leq t \leq s_n\}$$

το οποίο συνδέει δύο συνιστώσες και, ως εκ τούτου, δεν μπορεί να ανήκει στο  $\omega(x_0)$ . Υπάρχει, συνεπώς,  $\bar{t}_n$  τέτοιο, ώστε

$$d(\phi(\bar{t}_n, x_0), \omega(x_0)) \geq \frac{\rho}{3}$$

και

$$\bar{t}_n \rightarrow +\infty$$

, άτοπο.

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ορολογία, μπορούμε να διατυπώσουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας.

**Θεώρημα 7.5. (Αρχή Αναλλοίωτου του LaSalle).** Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση  $x' = f(x)$  με  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Έστω  $V$  μια συνάρτηση τέτοια, ώστε το σύνολο  $U := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < k\}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , να είναι ανοιχτό. Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι η  $V$  είναι συνεχής στο  $U$  και  $C^1$ -διαφορίσιμη στο  $U$ , με  $V'(x) \leq 0$  για  $x \in U$ . Θεωρούμε το υποσύνολο  $S$  του  $U$  που ορίζεται ως

$$S := \{x \in U : V'(x) = 0\}$$

και έστω  $M$  το μέγιστο αναλλοίωτο σύνολο στο  $S$ . Τότε κάθε θετική τροχιά που ξεκινά από το  $U$  και παραμένει φραγμένη, έχει το  $\omega$ -οριακό σύνολο της εντός του  $M$ .

**Απόδειξη.** Έστω  $x_0 \in U$ ,  $\phi(t, x_0)$  η λύση που διέρχεται από το  $x_0$ , για την οποία υποθέτουμε ότι είναι φραγμένη για  $t \geq 0$ . Τότε  $V'(\phi(t, x_0)) \leq 0$  και συνεπώς  $V(\phi(t, x_0)) \leq V(x_0) \leq k, \forall t \geq 0$ . Άρα, για κάθε  $t \geq 0, \phi(t, x_0) \in U$ . Επιπλέον  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\phi(t, x_0)) = u, u \in \mathbb{R}$ . Η συνέχεια

της  $V$ , συνεπάγεται ότι  $V(y) = u, \forall t \in \mathbb{R}$ . Έτσι  $V'(\phi(t, y)) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$  και  $\omega(x_0) \subset S$ . Από το αναλλοίωτο του  $\omega(x_0)$  έπεται ότι  $\omega(x_0) \subset M$ .

**Πόρισμα 7.1.** Αν επιπλέον, κάθε θετική τροχιά είναι φραγμένη, η  $V$  είναι θετικά ορισμένη και  $M = \{0\}$ , τότε το  $0$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και ολόκληρο το  $U$  ανήκει στο πεδίο έλξης.

**Πόρισμα 7.2.** Αν, επιπλέον, κάθε θετική τροχιά είναι φραγμένη και η  $V$  είναι θετικά ορισμένη για  $x \in U \setminus \{0\}$ , τότε  $M = \{0\}$ .

**Θεώρημα 7.6.** Αν η  $V$  είναι μια  $C^1$ -διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια, ώστε  $V(x) \rightarrow +\infty$  καθώς  $\|x\| \rightarrow +\infty$  και  $V'(x) \leq 0$  για όλα τα  $x$ , τότε κάθε θετική τροχιά είναι φραγμένη και το  $\omega$ -οριακό σύνολο της ανήκει στο  $M$ , το μέγιστο αναλλοίωτο σύνολο του  $\{x: V'(x) = 0\}$ .

**Παράδειγμα 7.7.** Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= -y \\ y' &= x - y \eta \mu^2 \left( \frac{\pi}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι το  $(0,0)$  είναι το μόνο σημείο ισορροπίας καθώς και ότι η  $x(t) = \cos t, y(t) = \eta \mu t$  είναι λύση. Συνεπώς ο μοναδιαίος κύκλος,  $x^2 + y^2 = 1$ , είναι τροχιά του συστήματος. Λόγω του μονοσήμαντου, το  $U = \{(x,y): x^2 + y^2 < 1\}$  είναι αναλλοίωτο. Η συνάρτηση  $V: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $V(x,y) = 1/2 (x^2 + y^2)$  έχει την ιδιότητα

$$V'(x,y) = xx' + yy' = -y^2 \eta \mu^2 \left( \frac{\pi}{x^2 + y^2} \right) \leq 0$$

και επιπλέον

$$V'(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad \eta \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{m}, \quad m \in \mathbb{N}$$

οπότε  
όπου

$$S = S_1 \cup S_2,$$

$$S_1 = \{(x,0): x \in [-1,1]\} \quad , \quad S_2 = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left\{ (x,y): x^2 + y^2 = \frac{1}{m} \right\}$$

Αν κάποια τροχιά περιέχεται στο  $S_1$ , τότε  $y(t) = 0$ , δηλ.  $y'(t) = 0$  και συνεπώς  $x(t) = 0$ . Τό μόνο αναλλοίωτο σύνολο, συνεπώς, που περιέχεται στο  $S_1$  είναι το  $\{(0,0)\}$ . Εξάλλου, κάθε σύνολο

$$A_m := \left\{ (x,y): x^2 + y^2 = \frac{1}{m} \right\} \quad \text{περιέχεται στο } \bar{U} \text{ και αποτελεί τροχιά}$$

(αφού η  $x(t) = \frac{1}{m} \cos t$ ,  $y(t) = \frac{1}{m} \eta \mu t$  είναι λύση) και είναι, ως εκ τούτου, αναλλοίωτο. Συνεπώς

$$M = \{0,0\} \cup S_2$$

Κάθε ένα από τα σύνολα που συνιστούν το  $M$  είναι  $\omega$ -οριακό σύνολο. Προφανώς  $\omega(\{0,0\}) = \{(0,0)\}$ . Για τα υπόλοιπα (αφού

$$S_2 = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m), \text{ θεωρούμε κάποιο } A_m \text{ και έστω } (x_0, y_0) \in A_m. \text{ Τότε,}$$

προφανώς  $\omega((x_0, y_0)) \subset A_m$ . Εξάλλου, υπάρχει  $t_0$  τέτοιο ώστε η

$$\phi_m(t_0) := \left( \frac{1}{m} \cos t, \frac{1}{m} \eta \mu t \right), \text{ για την οποία ισχύει } \phi_m(t_0) = t_0 \phi_m(0), \text{ να}$$

ικανοποιεί τη σχέση



$$\phi_m(t_0) = (x_0, y_0)$$

Έστω  $t_k = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Τότε  $t_k \rightarrow +\infty$

$$t_k(x_0, y_0) = t_k(t_0 \phi_m(0)) = t_0(t_k \phi_m(0)) = t_0 \phi_m(t_k) = t_0 \phi_m(0) = (x_0, y_0)$$

από όπου συνάγεται ότι

$$(x_0, y_0) \in \omega((x_0, y_0)) \text{ δηλ. } A_m \subset \omega((x_0, y_0))$$

Έτσι, τελικά,  $\omega((x_0, y_0)) = A_m$ .

Από το Θεώρημα 7.5 προκύπτει ότι δεν υπάρχουν άλλα  $\omega$ -οριακά σύνολα, που να περιέχονται στο  $\bar{U}$ .

Έστω, τέλος,  $R$  ο δακτύλιος που περιέχεται μεταξύ του  $A_{m+1}$  και του  $A_m$ . Έστω  $(x_0, y_0) \in R$ . Τότε, επειδή

$$\frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = -2y^2 \eta \mu^2 \left( \frac{\pi}{x^2 + y^2} \right) \leq 0 \quad \text{η απόσταση του } (x(t), y(t)) \text{ από}$$

το  $(x_0, y_0)$  μειώνεται, καθώς αυξάνεται το  $t$ , έχουμε ότι η  $\gamma^+((x_0, y_0))$  τείνει στον κύκλο  $A_{m+1}$ . Εξάλλου αν  $(x_0, y_0) \in A_m$  τότε ισχύει ότι  $\gamma((x_0, y_0)) = A_m$  και  $\gamma((0,0)) = \{(0,0)\}$ .

**Παράδειγμα 7.8.** Η εξίσωση  $x'' + 2ax' + x + x^3 = 0$ ,  $a \in (0,1)$  είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x - x^3 - 2ay \end{aligned}$$

Το  $(0,0)$  είναι το μόνο σημείο ισορροπίας και οι ιδιοτιμές της γραμμικοποίησης στο  $(0,0)$  είναι  $-a \pm i\sqrt{1-a^2}$ . Το  $(0,0)$  είναι, συνεπώς, ασυμπτωτικά ευσταθές. θα βρούμε το πεδίο έλξης, χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση Lyapunov.

Όταν  $a=0$ , το σύστημα είναι συντηρητικό, με ενέργεια

$$V(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1}{4} x^4$$

Ένας απλός υπολογισμός, δίνει ότι

$$V'(x,y) = -2ay^2$$

Έτσι, λοιπόν, αφού  $V(x,y) \rightarrow +\infty$  καθώς  $\|(x,y)\| \rightarrow +\infty$  για κάθε  $k$ , παίρνουμε ότι όλα τα σύνολα  $U$  της διατύπωσης του Θεωρήματος 7.5 είναι φραγμένα. Εξάλλου, είναι προφανές ότι το  $S$  περιέχεται στον  $x$ -άξονα. Θα προσδιορίσουμε το μέγιστο αναλλοίωτο σύνολο  $M$  του  $x$ -άξονα. Αφού το  $M$  είναι αναλλοίωτο, αρκεί να εργασθούμε μόνο με τις λύσεις του συστήματος, που παραμένουν στον  $x$ -άξονα για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ . Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος παίρνουμε  $x' = 0$ , δηλ.  $x = \text{σταθ}$ . Η δεύτερη εξίσωση μας δίνει ότι  $x = 0$ , και συνεπώς  $M = \{(0,0)\}$ . Από το Πόρισμα 7.1 έπεται ότι το πεδίο έλξης της αρχής των αξόνων είναι ολόκληρο το  $\mathbb{R}^2$ .

## 8. ΠΡΩΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, η ύπαρξη μιας συνάρτησης  $V$  με  $V' = 0$ , μας έδωσε ορισμένες σημαντικές πληροφορίες για την ποιοτική μας ανάλυση.

**Ορισμός 8.1.** Έστω  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος  $x' = f(x)$ ,  $x \in S \subseteq \mathbb{R}^2$ , επί του  $D \subseteq S$ , αν η  $g(x(t))$  είναι σταθερή για κάθε λύση  $x(t)$  του συστήματος.

Από την ύπαρξη ενός πρώτου ολοκληρώματος, δεν προκύπτει η μοναδικότητα του. Αντιθέτως, αν  $g(x)$  είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα, το ίδιο συμβαίνει και για το  $g(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Η σταθερά  $c$  συχνά χρησιμεύει ώστε με την κατάλληλη επιλογή της, το πρώτο ολοκλήρωμα να παίρνει μια επιθυμητή τιμή για  $x = 0$ . Το τετριμμένο πρώτο ολοκλήρωμα, που είναι ταυτοτικά σταθερό επί του  $D$ , δεν μας ενδιαφέρει.

Το γεγονός ότι η  $g$  είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα για την εξίσωση  $x' = f(x)$ , μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια των (συνεχών) πρώτων μερικών παραγώγων της  $g$ . Αφού η  $g$  είναι σταθερή πάνω σε κάθε λύση  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  του συστήματος έχουμε

$$0 = \frac{d}{dt} g(x(t)) = x_1'(t) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x(t)) + x_2'(t) \frac{\partial g}{\partial x_2}(x(t)) \quad (8.1)$$

$$= f_1(x(t)) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x(t)) + f_2(x(t)) \frac{\partial g}{\partial x_2}(x(t)) \quad (8.2)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{g(x + hf(x)) - g(x)}{h} \right)_{x = x(t)} \quad (8.3)$$

Η τελευταία σχέση ισχύει σε κάθε σημείο του  $D$  και έτσι η κατευθυνόμενη παράγωγος της  $g$  κατά μήκος του διανυσματικού πεδίου  $f$  είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν επί του  $D$ .

Τα πρώτα ολοκληρώματα είναι χρήσιμα λόγω της σχέσης μεταξύ των επιπέδων καμπύλων τους (που ορίζονται από τη σχέση  $g(x) = \text{σταθ.}$ ) και των τροχιών του συστήματος. Θεωρούμε την επίπεδη καμπύλη  $L_c = \{x: g(x) = c\}$ . Έστω  $x_0 \in L_c$  και  $\gamma(t)$  η τροχιά που διέρχεται από το  $x_0$  στο επίπεδο φάσεων. Αφού η  $g$  είναι πρώτο ολοκλήρωμα,

$$g(\gamma(t)) = g(x_0) = c$$

Η τροχιά, συνεπώς, που διέρχεται από το  $x_0$  βρίσκεται στην  $L_c$ .

Όταν η  $g$  είναι πρώτο ολοκλήρωμα, είναι σταθερή πάνω σε κάθε τροχιά στο  $D$ . Κάθε τροχιά είναι, λοιπόν, μέρος κάποιας επίπεδης καμπύλης της  $g$ . Ως εκ τούτου, κάθε επίπεδη καμπύλη είναι ένωση τροχιών· το μονοσήμαντο των λύσεων του συστήματος, εξασφαλίζει ότι οι "συνιστώσες" αυτής της ένωσης είναι ξένες μεταξύ τους.

Τα πρώτα ολοκληρώματα ονομάζονται έτσι, επειδή συνήθως προκύπτουν από ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης

$$\bullet \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad (x_1, x_2) \in \tilde{D} \subset S \quad (8.4)$$

Αν οι λύσεις αυτής της εξίσωσης ικανοποιούν τη σχέση

$$g(x_1, x_2) = c \quad (8.5)$$

όπου  $g: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , τότε η  $g$  είναι πρώτο ολοκλήρωμα της  $x' = f(x)$  επί του  $\tilde{D}$ . Πράγματι

$$0 \equiv \frac{dg}{dx_1} = \frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dx_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} \quad (8.6)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του  $\frac{dx_2}{dx_1}$  από την (8.4) και πολλαπλα-

σιάζοντας επί  $f_1(x_1, x_2)$ , παίρνουμε την (8.2). Φυσικά η  $f_1$  δεν μπορεί να μηδενίζεται επί του  $\tilde{D}$ , αλλιώς η (8.4) δεν θα όριζε την  $\frac{dx_2}{dx_1}$ . Αντιθέ-

τως, τα σημεία που μηδενίζεται η  $f_1$  δεν δημιουργούν πρόβλημα στην (8.2). Έτσι, αν η  $g(x)$  είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε ένα υπερσύνολο  $D$  του  $\tilde{D}$  και ικανοποιείται η (8.4) στο  $D$ , τότε η  $g$  είναι πρώτο ολοκλήρωμα της  $x' = f(x)$  επί του  $D$ .

**Ορισμός 8.2.** Ένα σύστημα που έχει πρώτο ολοκλήρωμα σε ολόκληρο το επίπεδο (δηλ.  $D = \mathbb{R}^2$ ) λέγεται συντηρητικό.

**Παράδειγμα 8.1.** Το σύστημα

$$x_1' = -x_2, x_2' = x_1 \quad (8.7)$$

είναι συντηρητικό, πράγμα που δεν συμβαίνει για το σύστημα

$$x_1' = x_1, x_2' = x_2 \quad (8.8)$$

Η διαφορική εξίσωση (8.4) δίνει για το (8.7) την

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2}, \quad x_2 \neq 0 \quad (8.9)$$

της οποίας οι λύσεις ικανοποιούν την

$$x_1^2 + x_2^2 = c, \quad x_2 \neq 0, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad (8.10)$$

Όμως η (8.2), με

$$g(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad (8.11)$$

ικανοποιείται για κάθε  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Η (8.11) είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα του (8.7) σε ολόκληρο το επίπεδο και έτσι το σύστημα (8.7) είναι συντηρητικό.

Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1}, \quad x_1 \neq 0 \quad (8.12)$$

που παίρνουμε από την (8.4) για το (8.8), έχει λύσεις

$$x_2 = cx_1, \quad c \in \mathbb{R} \quad (8.13)$$

Σε αυτή την περίπτωση η (8.2) ικανοποιείται από την

$$g(x) = \frac{x_2}{x_1}, \quad x_1 \neq 0 \quad (8.14)$$

και έτσι  $\bar{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$ .

Δεν υπάρχει τρόπος επέκτασης του  $\bar{D}$ . Η μόνη συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού ολόκληρο το  $\mathbb{R}^2$ , που είναι σταθερή πάνω σε κάθε τροχιά του (8.8) (πάνω, δηλ., στο  $(0,0)$  και σε κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το  $(0,0)$ ), μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία σημείων  $(x_j)$  τέτοια, ώστε  $\lim_{j \rightarrow +\infty} x_j = 0$ . Λόγω της συνέχειας,  $g(x_j) = g(0)$  για

κάθε  $j$ .

Δεν υπάρχει, συνεπώς, πρώτο ολοκλήρωμα σε ολόκληρο το  $\mathbb{R}^2$  και έτσι το (8.8) δεν είναι συντηρητικό σύστημα.

Τα πρώτα ολοκληρώματα είναι ένας από τους κύριους τρόπους για την εξακρίβωση του αν κάποιο σημείο ισορροπίας είναι κέντρο για ένα μη γραμμικό σύστημα.

**Παράδειγμα 8.2.** Ναδειχθεί ότι το  $(1,1)$  είναι κέντρο για το σύστημα

$$x_1' = x_1(1-x_2), \quad x_2' = x_2(x_1-1) \quad (8.15)$$

Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2(x_1-1)}{x_1(1-x_2)}, \quad x_1 \neq x_1x_2 \quad (8.16)$$

είναι χωριζομένων μεταβλητών και οι λύσεις της ικανοποιούν τη σχέση

$$h(x_1)h(x_2) = c, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad (8.17)$$

όπου

$$h(x) = xe^{-x} \quad (8.18)$$

Η  $h$  έχει μέγιστο για  $x=1$  και  $h(1)=1/e$ . Έπεται λοιπόν ότι το σημείο  $(1,1)$  είναι μέγιστο για το πρώτο ολοκλήρωμα

$$g(x_1, x_2) = h(x_1)h(x_2) \quad (8.19)$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια περιοχή του  $(1,1)$ , στην οποία οι επίπεδες καμπύλες της  $g(x_1, x_2)$  είναι κλειστές. Αφού αυτές οι επίπεδες καμπύλες συμπίπτουν με τροχιές, συμπεραίνουμε ότι το  $(1,1)$  είναι κέντρο.

Είναι, τέλος, σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι τα πρώτα ολοκληρώματα δεν μας δίνουν τις λύσεις  $x(t)$  ενός συστήματος· εκείνο που κάνουν, είναι ότι μας δίνουν το σχήμα των τροχιών.

**Παράδειγμα 8.3.** Ναδειχθεί ότι τα συστήματα

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = -x_2 \quad (8.19)$$

και 
$$x_1' = x_1(1-x_2), \quad x_2' = x_2(x_2-1) \quad (8.20)$$

έχουν το ίδιο πρώτο ολοκλήρωμα και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα φάσεων τους.

Οι τροχιές και των δύο συστημάτων βρίσκονται πάνω στις λύσεις της

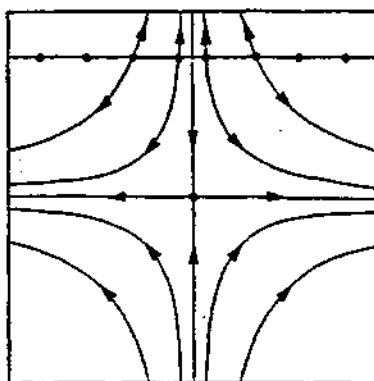
$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2}{x_1}, \quad x_1 \neq 0 \quad (8.21)$$

και, επίσης, έχουν και τα δύο ως πρώτο ολοκλήρωμα στο  $\mathbb{R}^2$ , την

$$g(x) = x_1 x_2 \quad (8.22)$$

Οι επίπεδες καμπύλες της  $g$  είναι υπερβολές, που -για το (8.19)- μπορούν να προσανατολισθούν παρατηρώντας τη διεύθυνση του  $x'$  επί των αξόνων. Πρόκειται για το γνωστό μας γραμμικό σαγματικό σημείο (πρβ. Σχ. 4.2, σελ. 37).

Το σύστημα (8.20) έχει σημεία ισορροπίας στο  $(0,0)$  και παντού επί της ευθείας  $x_2=1$ .



Σχήμα 8.1.

Επιπλέον, για  $x_2 > 1$  και  $x_2 < 0$  έχουμε  $x_2' > 0$ , ενώ για  $0 < x_2 < 1$  έχουμε  $x_2' < 0$ . Κατά συνέπεια, το διάγραμμα φάσεων είναι αυτό του Σχ. 8.1.

**Παρατήρηση 8.1.** Τα συντηρητικά συστήματα παίζουν σημαντικό ρόλο σε προβλήματα μηχανικής. Οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να κατασκευαστούν από τη συνάρτηση Hamilton (πρβλ. σελ. 72). Σε μια διάσταση, ένα κινούμενο σωματίδιο με συντεταγμένη θέσης  $x$ , ορμή  $p$  και συνάρτηση Hamilton  $H(x,p)$  έχει εξισώσεις κίνησης

$$x' = \frac{\partial H(x,p)}{\partial p}, \quad p' = - \frac{\partial H(x,p)}{\partial x} \quad (8.23)$$

Εδώ η  $H(x,p)$  είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα για το (8.23), αφού

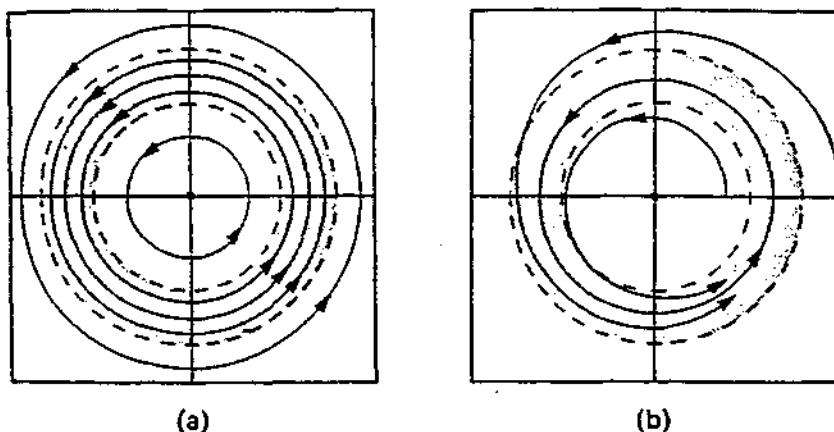
$$\frac{d}{dt} H(x,p) \equiv 0, \quad \text{και η } H \text{ παραμένει σταθερή κατά μήκος των τροχιών.}$$



## 9. ΥΠΑΡΞΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

**Ορισμός 9.1.** Μια κλειστή τροχιά  $C$  σε ένα διάγραμμα φάσεων λέγεται οριακός κύκλος αν είναι απομονωμένη από όλες τις άλλες κλειστές τροχιές· ακριβέστερα, αν υπάρχει μια σωληνοειδής περιοχή της  $C$  που δεν περιέχει άλλες κλειστές τροχιές.

Η διάκριση ενός οριακού κύκλου από ένα κέντρο, φαίνεται στο επόμενο σχήμα



Σχήμα 9.1.

Στο Σχ. 9.1 η σωληνοειδής περιοχή έχει ληφθεί ως ένας κυκλικός δακτύλιος. Στο Σχ. 9.1 (a) έχουμε ένα κέντρο και οι κλειστές τροχιές δεν είναι απομονωμένες. Στο Σχ. 9.1 (b), αντιθέτως, ο οριακός κύκλος είναι η μόνη κλειστή τροχιά μέσα στη σωληνοειδή περιοχή.

**Παράδειγμα 9.1.** Ναδειχθεί ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= -y + x[1 - \sqrt{x^2 + y^2}] \\ y' &= x + y[1 - \sqrt{x^2 + y^2}] \end{aligned} \quad (9.1)$$

έχει έναν οριακό κύκλο, που δίνεται από τη σχέση  $x^2 + y^2 = 1$ .

Σε πολικές συντεταγμένες  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , η (9.1) γίνεται

$$r' = r(1-r), \quad \theta' = 1 \quad (9.2)$$

Προφανώς, η  $r(t) \equiv 1$ ,  $\Theta(t) = t$  είναι μια λύση που δίνει μια κλειστή τροχιά που αποτελείται από τον κύκλο  $x^2 + y^2 = 1$  που διατρέχεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\Theta' = 1$  και με φορά αντίθετη από εκείνη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Για  $r \in (0, 1)$ , έχουμε  $r' > 0$  και οι τροχιές σε αυτή την περιοχή κινούνται ελικοειδώς προς τα έξω, προς τον κύκλο  $r = 1$ . Όταν  $r > 1$ , έχουμε  $r' < 0$  και οι τροχιές κινούνται ελικοειδώς προς τα μέσα, καθώς αυξάνει ο χρόνος. Το διάγραμμα φάσεων είναι ποιοτικά ισοδύναμο με αυτό του Σχ. 9.1 (b), με οριακό κύκλο  $x^2 + y^2 = 1$ .

Οι οριακοί κύκλοι δεν παρουσιάζουν όλοι την ίδια συμπεριφορά με αυτόν του προηγούμενου παραδείγματος. Υπάρχουν τρεις τύποι:

**Ορισμός 9.2.** (i) **Ευσταθής** (ή **ελκυστικός**) οριακός κύκλος, είναι εκείνος για τον οποίο οι τροχιές κινούνται σπειροειδώς προς την κλειστή τροχιά και από τις δύο πλευρές καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

(ii) **Ασταθής** (ή **απωθητικός**) οριακός κύκλος, είναι εκείνος για τον οποίο οι τροχιές κινούνται σπειροειδώς απομακρυνόμενες από την κλειστή τροχιά και από τις δύο πλευρές.

(iii) **Ημιευσταθής** οριακός κύκλος, είναι εκείνος για τον οποίο οι τροχιές κινούνται σπειροειδώς προς την κλειστή τροχιά, από τη μια πλευρά και σπειροειδώς απομακρυνόμενες από την κλειστή τροχιά, από την άλλη πλευρά.

**Παράδειγμα 4.2.** Να βρεθούν οι οριακοί κύκλοι και οι τύποι τους, για τα συστήματα:

$$(\alpha) \quad r' = r(r-1)(r-2), \quad \Theta' = 1$$

$$(\beta) \quad r' = r(r-1)^2, \quad \Theta' = 1$$

(α) Οι κλειστές τροχιές δίνονται από τις σχέσεις

$$(i) \quad r(t) \equiv 1, \quad \Theta(t) = t$$

$$(ii) \quad r(t) \equiv 2, \quad \Theta(t) = t$$

και ισχύει

$$r'(t) \begin{cases} > 0, & r(t) \in (0,1) \cup (2, +\infty) \\ < 0, & r(t) \in (1,2) \end{cases}$$

Το σύστημα έχει, κατά συνέπεια, δύο κυκλικούς οριακούς κύκλους: ο ένας είναι ευσταθής ( $r=1$ ) και ο άλλος ασταθής ( $r=2$ ).

(β) Το σύστημα έχει έναν κυκλικό οριακό κύκλο ( $r=1$ ). Επειδή ισχύει

$$r'(t) > 0, r(t) \in (0,t) \cup (1, +\infty)$$

ο οριακός αυτός κύκλος είναι ημιευσταθής.

**Παρατήρηση 9.1.** Οι οριακοί κύκλοι δεν είναι πάντα κυκλικοί και έτσι η προσφυγή σε πολικές συντεταγμένες δεν τους αποκαλύπτει πάντοτε. Για παράδειγμα η εξίσωση Van der Pol:

$$x'' - (1-x^2)x' + x = 0$$

ισοδυναμεί με το σύστημα

$$x' = y, y' = x(1-x^2) - x$$

που σε πολικές συντεταγμένες γράφεται

$$r' = r\eta^2\Theta(1-r^2\sigma\eta^2\Theta), \Theta' = \sigma\eta\Theta\eta\Theta(1-r^2\sigma\eta^2\Theta) - 1$$

Αυτές οι εξισώσεις δεν δίνουν άμεσα καμιά πληροφορία για τη φύση του διαγράμματος φάσεων (που είναι γνωστό ότι περιέχει έναν μοναδικό ευσταθή οριακό κύκλο).

Γενικώς, δεν μπορούμε να ελπίζουμε ότι θα είμαστε σε θέση να διαπιστώνουμε ότι ένα σύστημα έχει οριακό κύκλο με το να τον βρίσκουμε, όπως στο Παράδειγμα 9.2. Θα δώσουμε, στη συνέχεια, ορισμένα αποτελέσματα, που μας επιτρέπουν να συμπεραίνουμε ότι σε κάποιες περιοχές του επιπέδου φάσεων περιέχονται ή όχι οριακοί κύκλοι.

Θεωρούμε το σύστημα

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2) \quad (9.3)$$

και υποθέτουμε ότι οι  $f_j, j=1,2$  είναι συνεχώς διαφορίσιμες σε όλο το  $\mathbb{R}^2$ .

Έστω  $C$  μια κλειστή καμπύλη στο επίπεδο φάσεων που δεν διέρχεται από κανένα σημείο ισορροπίας του (9.3). Έτσι, αφού  $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$  επί της  $C$ , το διάνυσμα  $(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$  ορίζει μια μοναδική διεύθυνση σε κάθε σημείο  $(x_1, x_2)$  της  $C$ . Αυτή η διεύθυνση δεν είναι παρά η διεύθυνση της μοναδικής τροχιάς που περνά από το  $(x_1, x_2)$ . Έστω ότι η διεύθυνση αυτή σχηματίζει μια γωνία  $\phi$  με τον  $x_1$ -άξονα.

**Ορισμός 9.3.** Ο δείκτης  $I(C)$  της κλειστής καμπύλης  $C$  είναι

$$\frac{\Delta\Phi}{2\pi}, \quad \text{όπου } \Delta\Phi \text{ η συνολική μεταβολή στη γωνία } \Phi, \text{ που σχηματίζει το}$$

$(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$  με τον  $x_1$ -άξονα, καθώς το σημείο  $(x_1, x_2)$  διατρέχει μια φορά την  $C$  κατά την θετική (αντίθετη με την των δεικτών του ρολογιού) έννοια.

Προφανώς ο  $I(C)$  είναι ακέραιος. Για να τον προσδιορίσουμε αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\epsilon\phi\phi = \frac{f_2}{f_1}$$

και έτσι

$$d\phi = \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2 + f_2^2}$$

οπότε

$$I(C) = \frac{1}{2\pi} \int_C d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2 + f_2^2} \quad (9.4)$$

όπου

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2, \quad df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \quad (9.5)$$

**Θεώρημα 9.1.** Έστω  $C$  κλειστή καμπύλη που δεν περιέχει σημεία ισορροπίας ούτε εντός, ούτε επί της  $C$ . Τότε  $I(C)=0$ .

**Απόδειξη.** Έστω  $S$  το χωρίο που περιβάλλεται από την  $C$ . Τότε  $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$  στο  $S$ , και από το Θεώρημα του Green και την (9.4) παίρνουμε

$$I(C) = \frac{1}{2}\pi \iint_S \left\{ \frac{\partial}{\partial f_1} \left( \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \right) + \frac{\partial}{\partial f_2} \left( \frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2} \right) \right\} df_1 df_2$$

Όμως η υπό ολοκλήρωση παράσταση ισούται ταυτοτικά με το μηδέν, απ'όπου έπεται το ζητούμενο. Μπορούμε να παρατηρήσουμε, εξάλλου, ότι

$$df_1 df_2 = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2$$

**Πόρισμα 9.1.** Έστω  $C_1$  και  $C_2$  κλειστές καμπύλες, που η  $C_2$  περικλείει την  $C_1$ , και  $S$  το μεταξύ τους χωρίο. Αν δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας εντός του  $S$ , τότε

$$I(C_1) = I(C_2)$$

**Απόδειξη.** Έστω  $\Gamma$  και  $-\Gamma$  δύο ευθύγραμμα τμήματα (παράλληλα, με μικρή μεταξύ τους απόσταση) που συνδέουν τη  $C_1$  με τη  $C_2$ . Από το Θεώρημα 9.1 έπεται ότι  $I(C)=0$ , όπου  $C$  η κλειστή καμπύλη που ορίζεται από τη  $C_1$ , τη  $C_2$  το  $\Gamma$  και το  $-\Gamma$ . Όμως

$$I(C) = I(C_2) + I(-C_1) + I(\Gamma) + I(-\Gamma) = I(C_2) + I(-C_1)$$

και αφού, προφανώς,  $I(C_1) = -I(-C_1)$ , έπεται το ζητούμενο.

**Ορισμός 9.4.** Ο δείκτης  $I(P)$  ενός μεμονωμένου σημείου ισορροπίας  $P$ , είναι ο δείκτης  $I(C)$  τυχούσας κλειστής καμπύλης  $C$  που

περικλείει το  $P$ , ενώ δεν περιέχει κανένα άλλο σημείο ισορροπίας στο εσωτερικό της.

**Θεώρημα 9.2.** Ο δείκτης μιας κλειστής καμπύλης  $C$  που περιέχει  $k$  μεμονωμένα σημεία ισορροπίας  $P_j$ ,  $j=1,2,\dots,k$ , στο εσωτερικό της, δίνεται από τη σχέση

$$I(C) = \sum_{j=1}^k I(P_j) \quad (9.6)$$

**Απόδειξη.** Έστω  $C_j$  κλειστή καμπύλη που περιβάλλει το  $P_j$  και δεν περιέχει κανένα άλλο σημείο ισορροπίας στο εσωτερικό της,  $j=1,2,\dots,k$ . Τότε  $I(P_j) = I(C_j)$  και αναλόγως με την απόδειξη του Πορίσματος

9.1, συμπεραίνουμε ότι  $I(C) = \sum_{j=1}^k I(C_j)$ , απόπου έπεται η (9.6).

**Θεώρημα 9.3.** Έστω  $C$  η τροχιά μιας περιοδικής λύσης του (9.3). Τότε  $I(C) = 1$ .

**Απόδειξη.** Αφού η  $C$  είναι τροχιά, το πεδίο διευθύνσεων  $(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$  σε τυχόν σημείο  $(x_1, x_2)$  επί της  $C$ , συμπίπτει με το εφαπτόμενο διάνυσμα στην  $C$ . Τότε, προφανώς  $\int_C d\phi = 2\pi$ , και το

ζητούμενο έπεται από τον Ορισμό 9.3.

**Θεώρημα 9.4. (Poincaré).** Κάθε κλειστή τροχιά του (9.3), περικλείει ένα τουλάχιστον σημείο ισορροπίας.

**Απόδειξη.** Έστω  $C$  μια κλειστή τροχιά του (9.3) που δεν περιέχει κανένα σημείο ισορροπίας στο εσωτερικό της. Τότε από το Θεώρημα 9.1, έπεται ότι  $I(C) = 0$ . Η  $C$ , όμως, ως κλειστή τροχιά θα έχει  $I(C) = 1$ , από το Θεώρημα 9.3.

Άμεσα έπεται το επόμενο

**Πόρισμα 9.2.** Έστω  $C$  η τροχιά μιας περιοδικής λύσης του (9.3) και έστω ότι όλα τα σημεία ισορροπίας του (9.3) είναι μεμονωμένα. Τότε

το εσωτερικό της  $C$  περιέχει ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων ισορροπίας  $P_j, j=1,2,\dots,k$ , και

$$I(C) = \sum_{j=1}^k I(P_j) = 1 \quad (9.7)$$

Τέλος, μπορεί να δειχθεί ότι για το σύστημα

$$x_1' = a_1x_1 + a_2x_2 + g_1(x_1, x_2), \quad x_2' = b_1x_1 + b_2x_2 + g_2(x_1, x_2), \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

με

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|g_1|}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|g_2|}{r} = 0, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

ο δείκτης ενός μεμονωμένου σημείου ισορροπίας είναι  $-1$  αν το σημείο είναι σαγματικό, ενώ  $+1$ , διαφορετικά.

**Θεώρημα 9.5. (Το Αρνητικό Κριτήριο του Bendixson).** Αν η

παράσταση  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  έχει σταθερό πρόσημο σε κάποιο απλά

συνεκτικό χωρίο του επιπέδου φάσεων, τότε δεν υπάρχουν κλειστές τροχιές σε αυτό το χωρίο.

**Απόδειξη.** Έστω ότι το εν λόγω χωρίο περιέχει μια κλειστή τροχιά  $C = \{x_1(t), x_2(t)\}$ , με εσωτερικό  $R$ . Τότε, από την υπόθεση και το Θεώρημα του Green, έχουμε

$$\int_C (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = \iint_R \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \neq 0$$

Όμως, κατά μήκος της  $C$  έχουμε  $dx_1 = f_1 dt$  και  $dx_2 = f_2 dt$ , άρα

$$\int_C (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = \int_0^T (f_1 f_2 - f_2 f_1) dt = 0, \quad \text{άτοπο}$$

Τα Θεωρήματα 9.4 και 9.5 είναι, βέβαια, χρήσιμα, αλλά αποτελούν αρνητικά κριτήρια. Αυτά που στην πραγματικότητα επιθυμούμε, είναι

θετικά κριτήρια, που να δίνουν ικανές συνθήκες για την ύπαρξη κλειστών τροχιών του (9.3). Ένα από τα λίγα θεωρήματα αυτού του είδους είναι το κλασικό

**Θεώρημα 9.6. (Poincaré-Bendixson).** Έστω  $R$  κλειστό και φραγμένο χωρίο, τέτοιο, ώστε κάποια θετική ημιτροχιά  $C$  του συστήματος  $x' = f(x)$  να βρίσκεται ολόκληρη εντός του  $R$ . Τότε, είτε η ίδια η  $C$  είναι οριακός κύκλος, είτε κινείται σπειροειδώς πλησιάζοντας έναν οριακό κύκλο, ή καταλήγει σε ένα σημείο ισορροπίας.

Δεν δίνουμε εδώ την απόδειξη· μπορεί να βρεθεί στα συγγράμματα [Ha], [Hu] και [Hi-Sma] της βιβλιογραφίας.

**Παρατήρηση 9.2.** Γνωρίζουμε ότι ένα γραμμικό σύστημα έχει κλειστές τροχιές τότε και μόνον τότε αν οι ρίζες του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου είναι γνήσιες φανταστικές· τότε όλες οι τροχιές είναι κλειστές. Έτσι, για τα γραμμικά συστήματα, είτε κάθε τροχιά είναι κλειστή ή δεν υπάρχουν κλειστές τροχιές.

Το Θεώρημα 9.6 έχει τα ακόλουθα, χρήσιμα, πορίσματα.

**Πόρισμα 9.3.** Αν το χωρίο  $R$  είναι ένα κλειστό, φραγμένο και θετικά αναλλοίωτο σύνολο του συστήματος και αν δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας εντός του  $R$ , τότε υπάρχει ένας οριακός κύκλος εντός του  $R$ .

**Πόρισμα 9.4.** Έστω  $g$  ένα πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος. Αν δεν υπάρχει ανοιχτό σύνολο επί του οποίου η  $g$  να είναι σταθερή, τότε δεν υπάρχουν οριακοί κύκλοι.

**Παρατήρηση 9.3.** Το Θεώρημα 9.6 μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εξής: έστω ότι μπορούμε να βρούμε δύο κλειστές καμπύλες  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$ , που η  $\Gamma_2$  να βρίσκεται εντός της  $\Gamma_1$ , τέτοιες ώστε όλες οι τροχιές που τέμνουν την  $\Gamma_1$  να κατευθύνονται προς το εσωτερικό της, ενώ όλες οι τροχιές που τέμνουν την  $\Gamma_2$  να κατευθύνονται έξω από αυτήν. Τότε, καμιά τροχιά που εισέρχεται στο δακτυλιοειδές χωρίο μεταξύ της  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$ , δεν μπορεί ποτέ να διαφύγει από εκεί. Ο "δακτύλιος"  $R$  είναι ένα κατάλληλο χωρίο για το θεώρημα. Αν, επιπροσθέτως, μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι ο  $R$  δεν περιέχει σημεία ισορροπίας, τότε το θεώρημα προβλέπει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον κλειστής τροχιάς  $G$ , κάπου μέσα στον  $R$ . Η  $G$  οφείλει να περιβάλλει την εσωτερική καμπύλη ( $\Gamma_2$ ), αφού ο δείκτης της είναι 1 και ως εκ τούτου πρέπει να έχει στο εσωτερικό της



κάποιο σημείο ισορροπίας και επειδή ο  $R$  δεν περιέχει σημεία ισορροπίας. Για τον ίδιο λόγο, πρέπει να υπάρχουν κατάλληλα σημεία ισορροπίας στο εσωτερικό της  $\Gamma_2$ .

Το ίδιο αποτέλεσμα αληθεύει αν οι τροχιές που τέμνουν την  $\Gamma_1$  κατευθύνονται όλες προς το εσωτερικό της, ενώ εκείνες που τέμνουν την  $\Gamma_2$ , όλες έξω από αυτήν.

Η εύρεση τέτοιων  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  για ένα συγκεκριμένο σύστημα, είναι συχνά δύσκολη.

**Παρατήρηση 9.4.** Ο τίτλος αυτής της παραγράφου δικαιολογείται ως εξής:

Μια λύση  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  του συστήματος (9.3) λέγεται περιοδική, αν η  $x(t)$  δεν είναι σταθερή, ορίζεται για κάθε  $t$  και υπάρχει ένας θετικός αριθμός  $T$ , τέτοιος ώστε  $x_j(t+T) = x_j(t)$ , για κάθε  $T$ . Ο μικρότερος αριθμός με αυτή την ιδιότητα λέγεται περίοδος της λύσης. Είναι προφανές ότι κάθε περιοδική λύση του (9.3) ορίζει μια κλειστή τροχιά, που διασχίζεται μια φορά, καθώς, για τυχόν  $t_0$ , το  $t$  αυξάνει από  $t_0$  ως  $t_0+T$ . Αντιστρόφως, εύκολα διαπιστώνεται ότι, αν η  $C = \{x_1(t), x_2(t)\}$  είναι μια κλειστή τροχιά του (9.3), τότε η  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  είναι μια περιοδική λύση. Συνεπώς, η αναζήτηση περιοδικών λύσεων του (9.3), ανάγεται στην αναζήτηση κλειστών τροχιών.

**Παράδειγμα 9.3.** Ναδειχθεί ότι το διάγραμμα φάσεων της εξίσωσης

$$x'' - x'(1-3x^2-2(x')^2) + x = 0 \quad (9.8)$$

έχει έναν οριακό κύκλο.

Το αντίστοιχο σύστημα είναι

$$x' = y, \quad y' = -x + y(1-3x^2-2y^2)$$

που σε πολικές συντεταγμένες γράφεται

$$r' = r\mu^2\Theta(1-3r^2\cos^2\Theta-2r^2\mu^2\Theta),$$

$$\Theta' = -1 + \frac{1}{2} \eta \mu^2 \Theta (1 - 3r^2 \sigma \nu^2 \Theta - 2r^2 \eta \mu^2 \Theta)$$

Η πρώτη από αυτές τις εξισώσεις με  $r=1/2$  δίνει

$$r' = \frac{1}{4} \eta \mu^2 \Theta \left( 1 - \frac{1}{2} \sigma \nu^2 \Theta \right) \geq 0$$

όπου το "=" ισχύει μόνο για  $\Theta=0$  ή  $\Theta=\pi$ . Συνεπώς το σύνολο

$$\left\{ (x,y) : r > \frac{1}{2} \right\}$$

είναι θετικά αναλλοίωτο.

Επίσης από την πρώτη των εξισώσεων του συστήματος σε πολική μορφή, παίρνουμε

$$r' \leq r \eta \mu^2 \Theta (1 - 2r^2)$$

Έτσι για  $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ισχύει  $r' \leq 0$ , με ισότητα μόνο για  $\Theta=0$  ή

$\Theta=\pi$ . Συνεπώς και το σύνολο

$$\left\{ (x,y) : r < \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

είναι θετικά αναλλοίωτο.

Έτσι, έπεται ότι ο δακτύλιος

$$\left\{ (x,y) : \frac{1}{2} < r < \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

είναι θετικά αναλλοίωτο σύνολο και αφού το μόνο σημείο ισορροπίας είναι το  $(x,y) = (0,0)$ , συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένας οριακός κύκλος εντός του δακτυλίου.

**Παράδειγμα 9.4.** Να δειχθεί ότι αν το σύστημα

$$\begin{aligned}x_1' &= -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \quad , \\x_2' &= x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}\quad (9.9)$$

έχει μια κλειστή τροχιά τότε είτε αυτή περιβάλλει την αρχή των αξόνων,

ή τέμνει τον κύκλο  $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}$ .

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα

$$\begin{aligned}\frac{\partial(-x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2))}{\partial x_1} + \frac{\partial(x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) + \alpha)}{\partial x_2} &= \\ &= 2(1 - 2(x_1^2 + x_2^2))\end{aligned}\quad (9.10)$$

είναι θετική εντός του κύκλου  $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}$  και αρνητική έξω από αυτόν.

Συνεπώς καμιά κλειστή τροχιά δεν μπορεί να περιέχεται πλήρως στο

απλά συνεκτικό χωρίο  $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < \frac{1}{2}\}$ . Έτσι, αν υπάρχει μια

κλειστή τροχιά, είτε βρίσκεται στο  $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 > \frac{1}{2}\}$ , ή τέμνει τον

$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}$ . Αν η κλειστή τροχιά βρίσκεται στο  $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 > \frac{1}{2}\}$

θα πρέπει να περιβάλλει το  $(0,0)$ , διαφορετικά θα περιέχει μια περιοχή όπου η (9.10) θα έχει σταθερή αρνητική πρόσημο.

**Παράδειγμα 9.5.** Να δειχθεί ότι το σύστημα

$$x_1' = x_2 + x_1 - x_1^3, \quad x_2' = -x_1 + x_2 - x_2^3 \quad (9.11)$$

έχει μια τουλάχιστον κλειστή τροχιά στο επίπεδο φάσεων.

Θέτουμε  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ . Τότε

$$V'(x_1, x_2) = 2(x_1 x_1' + x_2 x_2') = 2(x_1^2 + x_2^2 - x_1^4 - x_2^4)$$

Αν  $x_1^2 + x_2^2 < 1$ , τότε

$$x_1^2 + x_2^2 > (x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4 \geq x_1^4 + x_2^4$$

Συνεπώς η  $V'(x_1, x_2)$  είναι γνήσια θετική επί του κύκλου  $x_1^2 + x_2^2 = \rho$

για κάθε  $\rho \in (0, 1)$ .

• Εξάλλου, αν  $x_1^2 + x_2^2 > 2$ , τότε

$$2(x_1^4 + x_2^4) \geq (x_1^2 + x_2^2)^2 > 2(x_1^2 + x_2^2)$$

Συνεπώς η  $V'(x_1, x_2)$  είναι γνήσια αρνητική επί του κύκλου

$x_1^2 + x_2^2 = \rho$  για κάθε  $\rho > 2$ .

Το σύστημα έχει, λοιπόν, τουλάχιστον μια κλειστή τροχιά που βρίσκεται μεταξύ των δύο ομοκέντρων κύκλων.

Το Θεώρημα Poincaré-Bendixson είναι πολύ ικανοποιητικό από θεωρητική άποψη, αλλά, γενικώς, είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθεί. Ένα περισσότερο πρακτικό κριτήριο, εξασφαλίζει την ύπαρξη κλειστών τροχιών για εξισώσεις της μορφής

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \quad (9.12)$$

που λέγεται εξίσωση Lienard (πρβλ. Παράδειγμα 7.5 σελ. 71). Η (9.8) γράφεται

$$\begin{aligned} x' &= y - F(x) \\ y' &= -g(x) \end{aligned} \quad (9.13)$$

όπου

$$F(x) = \int_0^x f(u) du$$

Το θεμελιώδες θεώρημα που αφορά στις κλειστές τροχιές της (9.12) είναι το

**Θεώρημα 9.7. (Levinson-Smith).** Η (9.12) έχει μια μοναδική περιοδική λύση, αν οι  $f$  και  $g$  είναι συνεχείς και

(i) η  $F(x)$  είναι περιττή συνάρτηση

(ii) η  $F(x)$  είναι ίση με μηδέν μόνο στα σημεία  $0, \pm \alpha$ , για κάποιο  $\alpha > 0$

(iii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$  με μονότονο τρόπο για  $x > \alpha$

(iv) η  $g(x)$  είναι περιττή συνάρτηση και ισχύει  $g(x) > 0$  για  $x > 0$ .

Δεν δίνουμε εδώ την απόδειξη· μπορεί να βρεθεί στα [Jor-Sm] και [Si].

**Παράδειγμα 9.6.** Η εξίσωση Van der Pol

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0, \quad \varepsilon > 0 \quad (9.14)$$

έχει έναν μοναδικό οριακό κύκλο.

Πράγματι, για  $f(x) = \varepsilon(x^2 - 1)$ ,  $F(x) = \varepsilon x(1/3 x^2 - 1)$ ,  $g(x) = x$  και  $\alpha = \sqrt{3}$  ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος 9.7.

## 10. ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΙΣ

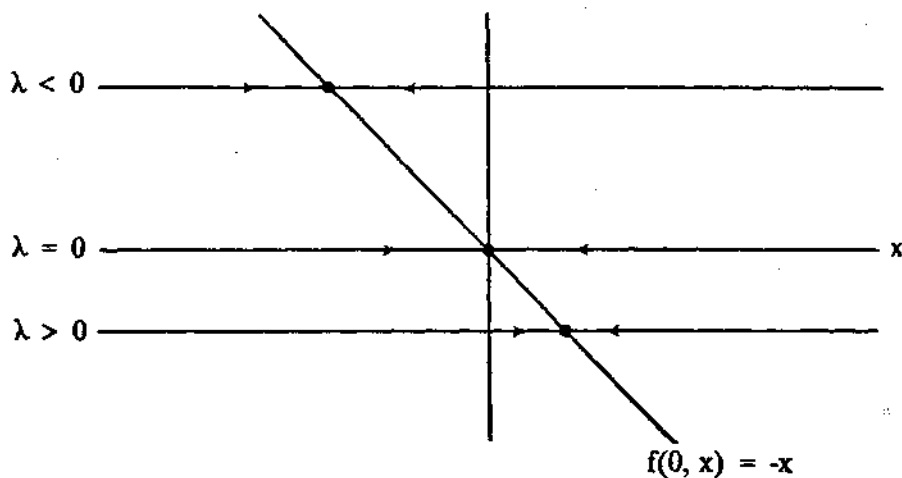
Κάθε εφαρμοσμένο πρόβλημα περιλαμβάνει αρκετές φυσικές παραμέτρους, που, ενδεχομένως, μεταβάλλονται μέσα σε κάποια προκαθορισμένα σύνολα. Είναι, συνεπώς, σημαντικό το να κατανοήσουμε την ποιοτική συμπεριφορά του συστήματος καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροι. Ένα καλά κατασκευασμένο σύστημα, θα πρέπει να είναι τέτοιο, ώστε η ποιοτική του συμπεριφορά να μένει αμετάβλητη όταν οι παράμετροι μεταβάλλονται λίγο γύρω από την τιμή για την οποία είχε γίνει ο αρχικός σχεδιασμός. Μια μεταβολή των ποιοτικών ιδιοτήτων θα μπορούσε να σημαίνει αλλαγή στην ευστάθεια του αρχικού συστήματος. Χωρίς απαιτήσεις αυστηρότητας, οι τιμές των παραμέτρων για τις οποίες συμβαίνει μια τέτοια μεταβολή λέγονται τιμές διακλάδωσης· η γνώση των τιμών διακλάδωσης είναι απολύτως αναγκαία για την πλήρη κατανόηση του συστήματος.

Σε αυτή τη, συντόμη, παράγραφο θα δώσουμε κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα που θα μας διευκρινίσουν ορισμένες από τις βασικές ιδέες της Θεωρίας Διακλαδώσεων. Παρά την απλότητά τους, αυτά τα παραδείγματα περιγράφουν αυτά που συμβαίνουν στη γενική περίπτωση.

Η Θεωρία Διακλαδώσεων είναι μια σύγχρονη, πολύ σημαντική και ιδιαίτερα γόνιμη περιοχή έρευνας και αυτή η παράγραφος δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ούτε καν ως μια εισαγωγή στη Θεωρία· ίσως, μόνο, ως ένα ερέθισμα για περαιτέρω μελέτη. Σε αυτή την κατεύθυνση μπορεί κανείς να ανατρέξει στα συγγράμματα [Ha-Ko] (που έχει χρησιμοποιηθεί ουσιαστικά σε αυτήν την παράγραφο) και [C-Ha].

**Παράδειγμα 10.1.** Για τη διαφορική εξίσωση

$$x' = \lambda x := f(\lambda, x), \quad \lambda \in \mathbf{R} \quad (10.1)$$



Σχήμα 10.1.

μπορούμε εύκολα (μεταθέτοντας κατακόρυφα τον  $x$ -άξονα κατά  $-\lambda$ ) να προσδιορίσουμε τη ροή για κάθε τιμή του  $\lambda$ , από το γράφημα της  $f(0,x)$ . Όπως φαίνεται στο Σχ. 10.1, υπάρχει ένα μόνο (υπερβολικό) σημείο ισορροπίας, που είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

**Παράδειγμα 10.2.** Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$x' = \lambda - x^2 := f(\lambda, x), \quad \lambda \in \mathbf{R} \quad (10.2)$$

Η ροή της (10.2) μπορεί να βρεθεί για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ , με το να σχεδιάσουμε την "αρχική" παραβολή  $f(0,x) = x^2$  και να μεταθέσουμε κατακόρυφα τον  $x$ -άξονα κατά  $-\lambda$ .

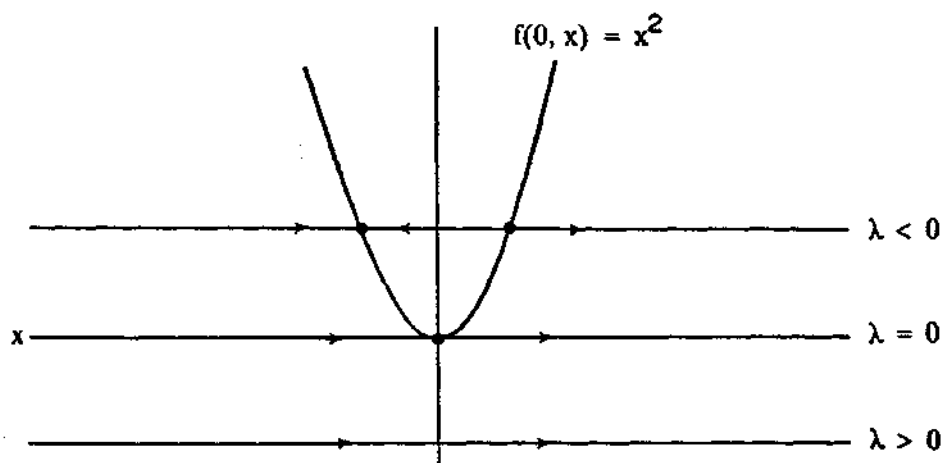
Για  $\lambda < 0$ , οι τροχιές δίνονται από τα διαστήματα  $(-\infty, -\sqrt{-\lambda})$ ,  $(-\sqrt{-\lambda}, \sqrt{-\lambda})$ ,  $(\sqrt{-\lambda}, +\infty)$  και τα σημεία ισορροπίας  $-\sqrt{-\lambda}$ ,  $\sqrt{-\lambda}$ . Για  $\lambda = 0$ , οι τροχιές είναι τα  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, +\infty)$  και το σημείο ισορροπίας  $0$ . Για  $\lambda > 0$ , η μόνη τροχιά είναι το  $(-\infty, +\infty)$  και δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας.

Καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος  $\lambda$  έχουμε την ακόλουθη συμπεριφορά:

(i) όσο το  $\lambda$  παραμένει αρνητικό, το πλήθος και οι διευθύνσεις των τροχιών διατηρούνται αμετάβλητα· το μόνο που αλλάζει είναι η θέση των σημείων ισορροπίας  $\pm\sqrt{-\lambda}$ ,

(ii) όσο το  $\lambda$  παραμένει θετικό, υπάρχει μόνο μια τροχιά και η διεύθυνση της είναι προς τα δεξιά,

(iii) όταν, όμως,  $\lambda = 0$ , ανεξάρτητα από το κατά πόσο λίγο μεταβάλλεται το  $\lambda$ , το πλήθος των τροχιών αλλάζει: υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας για  $\lambda > 0$  και κανένα για  $\lambda < 0$ .



Σχήμα 10.2.

Για μια βαθμωτή διαφορική εξίσωση  $x' = f(x)$ , τα σημεία ισορροπίας και το πρόσημο της  $f(x)$  μεταξύ τους, προσδιορίζουν το πλήθος των τροχιών και τη διεύθυνση της ροής επί των τροχιών. Αυτό το πλήθος και η διεύθυνση συνιστούν την τροχιακή δομή της διαφορικής εξίσωσης ή ποιοτική δομή της ροής.

Η μελέτη των μεταβολών της ποιοτικής δομής της ροής μιας διαφορικής εξίσωσης καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροι, λέγεται **Θεωρία Διακλάδωσης**.

Αν για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων, η ποιοτική δομή της ροής δεν αλλάζει καθώς οι παράμετροι υφίστανται "μικρές" μεταβολές, λέμε ότι η διαφορική εξίσωση έχει **ευσταθή τροχιακή δομή**.

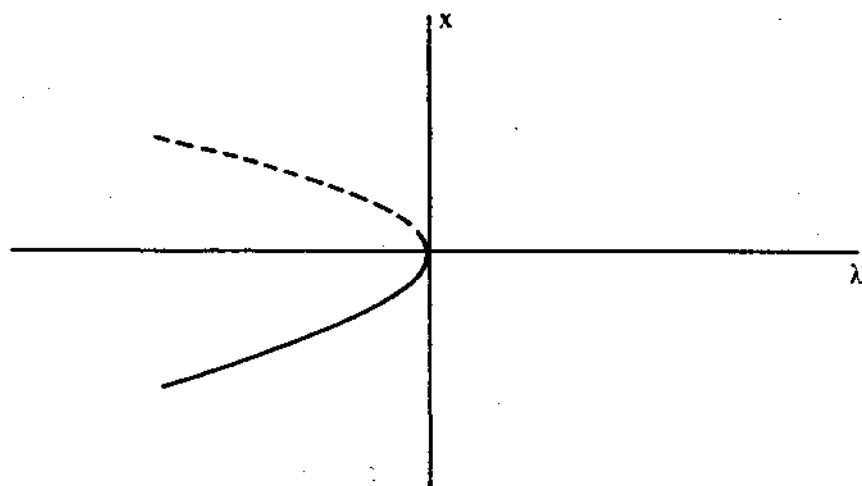
Κάθε τιμή της παραμέτρου για την οποία η ροή δεν έχει ευσταθή τροχιακή δομή λέγεται **τιμή διακλάδωσης**, και για την εξίσωση λέμε ότι βρίσκεται σε **σημείο διακλάδωσης**.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η εξίσωση (10.1) έχει ευσταθή τροχιακή δομή για κάθε τιμή του  $\lambda$ , ενώ η (10.2) έχει ευσταθή δομή για κάθε  $\lambda \neq 0$ , αλλά βρίσκεται σε σημείο διακλάδωσης για  $\lambda = 0$ . Η συγκεκριμένη συμπεριφορά διακλάδωσης της (10.2) λέγεται **διακλάδωση σάγματος-κόμβου**.

Υπάρχει μια άλλη, πολύ χρήσιμη, γραφική μέθοδος για τον προσδιορισμό ορισμένων από τα σημαντικά χαρακτηριστικά της δυναμικής συμπεριφοράς για εξισώσεις της μορφής  $x' = f(\lambda, x)$ , που εξαρτώνται από μια παράμετρο  $\lambda$ . Αυτή η μέθοδος συνίσταται στο σχεδιασμό καμπυλών στο  $(\lambda, x)$ -επίπεδο. Ένα σημείο  $(\lambda_0, x_0)$  βρίσκεται πάνω σε μια από αυτές τις καμπύλες, τότε και μόνον τότε αν  $f(\lambda_0, x_0) = 0$ .



Για την αναπαράσταση του είδους ευστάθειας, χρησιμοποιούμε διακεκομμένες γραμμές για τα ασταθή σημεία ισορροπίας, ενώ συνεχείς για τα ευσταθή. Η προκύπτουσα εικόνα λέγεται **διάγραμμα διακλάδωσης**.

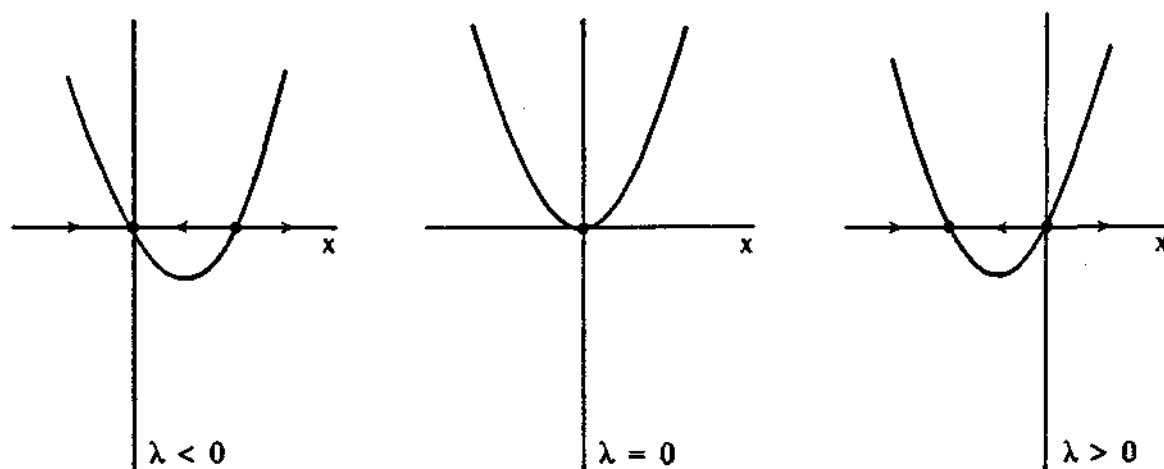


Σχήμα 10.3.

**Παράδειγμα 10.3.** Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

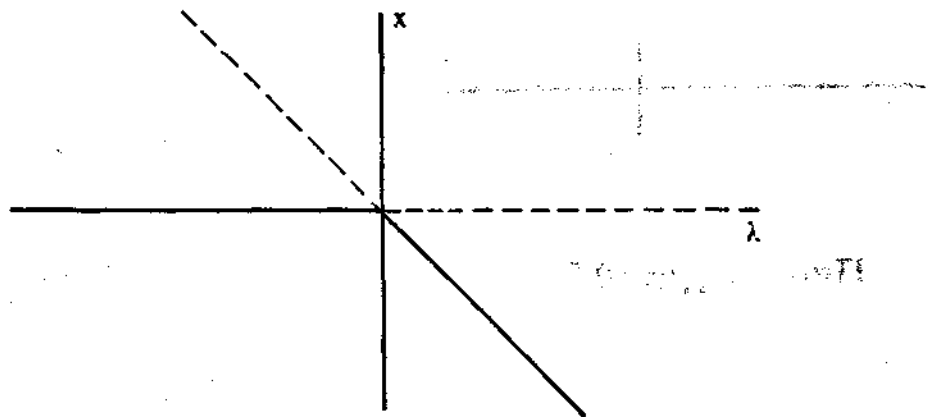
$$x' = \lambda x + x^2 := f(\lambda, x), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (10.3)$$

Ο προσδιορισμός του διαγράμματος φάσεων της (10.3) μπορεί να γίνει εύκολα από το γράφημα της  $f(\lambda, x) = \lambda x + x^2$ .



Σχήμα 10.4.

Παρατηρούμε ότι το 0 είναι σημείο ισορροπίας για κάθε  $\lambda$ . Όταν  $\lambda < 0$ , το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και υπάρχει και ένα δεύτερο σημείο ισορροπίας, το  $x = -\lambda$ , που είναι ασταθές. Η τιμή  $\lambda = 0$  είναι τιμή διακλάδωσης, για την οποία τα δύο σημεία ισορροπίας συμπίπτουν· το 0 είναι ένα (μη υπερβολικό) ασταθές σημείο ισορροπίας. Για  $\lambda > 0$ , το 0 γίνεται ασταθές, "προσφέροντας" την ευστάθεια του στο άλλο σημείο ισορροπίας  $x = -\lambda$ . Η διακλάδωση που υφίσταται η (10.3) λέγεται διακρίσιμη (transcritical). (Σχ. 10.5).



Σχήμα 10.5.

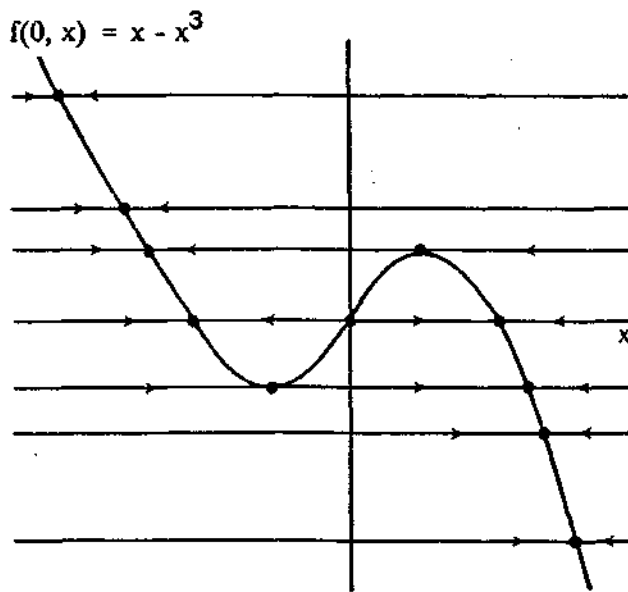
**Παράδειγμα 10.4.** Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση

$$x' = \lambda x - x^3 =: f(\lambda, x), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (10.4)$$

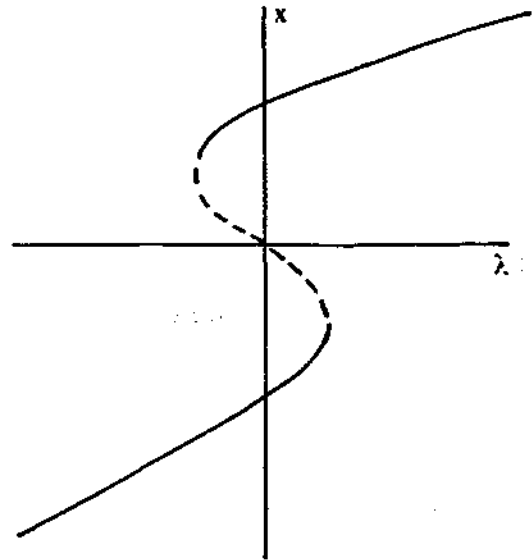
Για  $\lambda = 0$ , τα σημεία ισορροπίας είναι  $-1, 0, 1$  και οι τροχιές τα ανοιχτά διαστήματα  $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, +\infty)$  και, φυσικά, τα σημεία  $\{1\}, \{0\}, \{-1\}$ . Υπάρχει, λοιπόν, ευσταθής τροχιακή δομή. Η ροή συνεχίζει να

έχει ευσταθή τροχιακή δομή για  $\lambda \in (-\lambda_0, \lambda_0)$ , όπου  $\lambda_0 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$  είναι το

τοπικό μέγιστο και  $-\lambda_0$  το τοπικό ελάχιστο της  $f(0, x)$ . Για  $\lambda = \pm \lambda_0$  η εξίσωση (10.4) βρίσκεται σε σημείο διακλάδωσης. Για  $\lambda < -\lambda_0$  και  $\lambda > \lambda_0$ , η εξίσωση (10.4) έχει και πάλι ευσταθή τροχιακή δομή. Τα διαγράμματα φάσεων για διάφορες τιμές του  $\lambda$  και το διάγραμμα διακλάδωσης της (10.4) απεικονίζονται, αντιστοίχως, στα Σχ. 10.6 και 10.7.



Σχήμα 10.6.



Σχήμα 10.7.

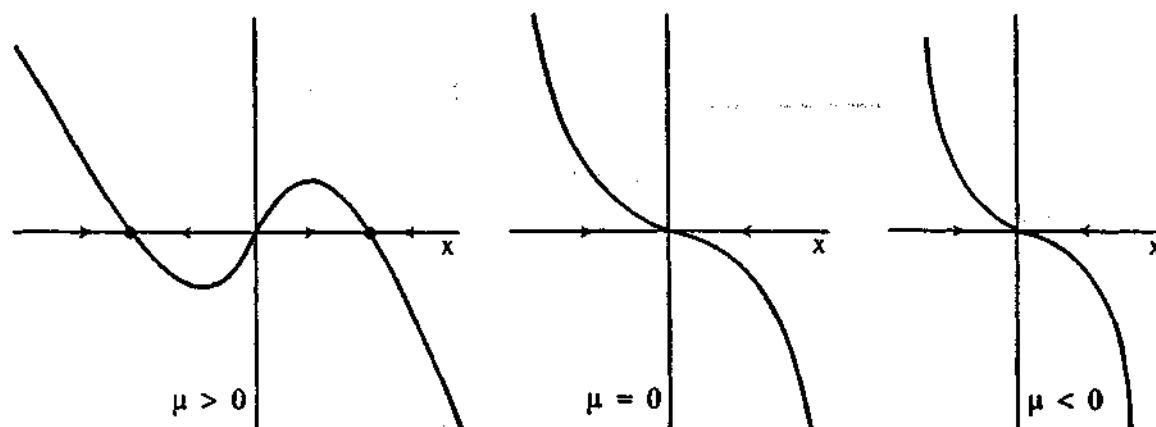
**Παράδειγμα 10.5.** Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$x' = \mu x - x^3 := f(\mu, x), \mu \in \mathbb{R} \quad (10.5)$$

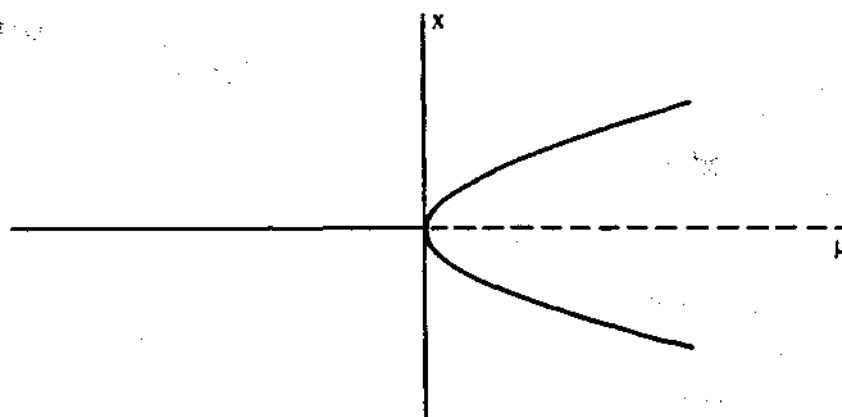
Το αποτέλεσμα της μεταβολής του  $\mu$  είναι ισοδύναμο με το να μεταβάλλουμε την κλίση της καμπύλης στο 0, κρατώντας σταθερό τον  $x$ -άξονα. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η (10.5) έχει τρία σημεία ισορροπίας, και είναι ευσταθής για κάθε  $\mu > 0$ . Στο  $\mu = 0$ , τα σημεία ισορροπίας συμπίπτουν στο  $x = 0$  και η (10.5) βρίσκεται σε σημείο διακλάδωσης. Για κάθε  $\mu < 0$ , η (10.5) έχει επίσης ευσταθή τροχιακή δομή με ένα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Το διάγραμμα διακλάδωσης της (10.5) απεικονίζεται στο Σχ. 10.9 και λόγω της προφανούς ομοιότητάς του, είναι γνωστό ως *δικρανική διακλάδωση*. Παρατηρούμε ότι το  $x = 0$  είναι πάντοτε σημείο ισορροπίας. Όμως, καθώς η παράμετρος  $\mu$  διέρχεται από την τιμή διακλάδωσης  $\mu = 0$ , το σημείο ισορροπίας στο 0 χάνει την ευστάθειά του, προσφέροντας την σε δύο νέα ευσταθή σημεία ισορροπίας που προέρχονται από το 0.

Σε αυτό το συγκεκριμένο παράδειγμα, η δικρανική διακλάδωση λέγεται *υπερ-κρίσιμη*, επειδή τα πρόσθετα σημεία ισορροπίας που εισάγονται στην τιμή διακλάδωσης προέρχονται από τις τιμές του  $\mu$  στις οποίες το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

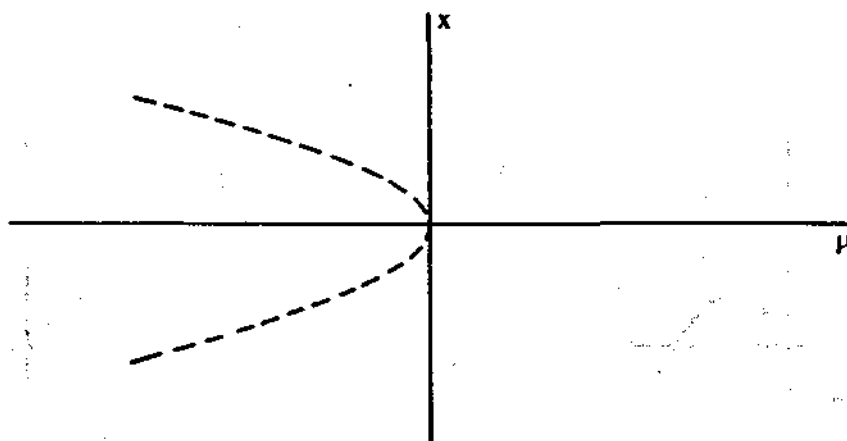


Σχήμα 10.8.



Σχήμα 10.9.

Όταν τα επιπλέον σημεία ισορροπίας προέρχονται από τις τιμές της παραμέτρου στις οποίες το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές, η διακλάδωση λέγεται υπο-κρίσιμη.



Σχήμα 10.10.

Στο Σχ. 10.10, έχουμε ένα παράδειγμα υπο-κρίσιμης δικρανικής διακλάδωσης για τη διαφορική εξίσωση

$$x' = \mu x + x^3, \mu \in \mathbb{R} \quad (10.6)$$

**Παράδειγμα 10.6.** Συνδυάζοντας τις εξισώσεις των δύο προηγούμενων παραδειγμάτων, θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$x' = \lambda + \mu x - x^3 := f(\lambda, \mu, x), \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (10.7)$$

Η  $f(\lambda, \mu, x)$  είναι η γενικότερη διαταραχή της  $-x^3$  με όρους μικρότερου βαθμού, αφού ο όρος  $x^2$  μπορεί πάντοτε -με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής- να εξαλειφθεί· πράγματι η συνάρτηση  $-x^3 + ax^2 + bx + \gamma$  μετατρέπεται στην  $-x^3 + \mu x + \lambda$  μέσω του μετασχηματισμού

$$x \rightarrow x + \frac{a}{3}.$$

Βρίσκουμε, αρχικά, τις τιμές διακλάδωσης των παραμέτρων. Όπως έχουμε δει στα προηγούμενα παραδείγματα, στα σημεία διακλάδωσης, μια διαφορική εξίσωση έχει ένα πολλαπλό σημείο ισορροπίας· θα πρέπει, δηλαδή, να ισχύει

$$f(\lambda, \mu, x) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial x} f(\lambda, \mu, x) = 0 \quad (10.8)$$

Για την (10.7) οι σχέσεις αυτές είναι

$$\lambda + \mu x^3 = 0 \quad \text{και} \quad \mu - 3x^2 = 0 \quad (10.9)$$

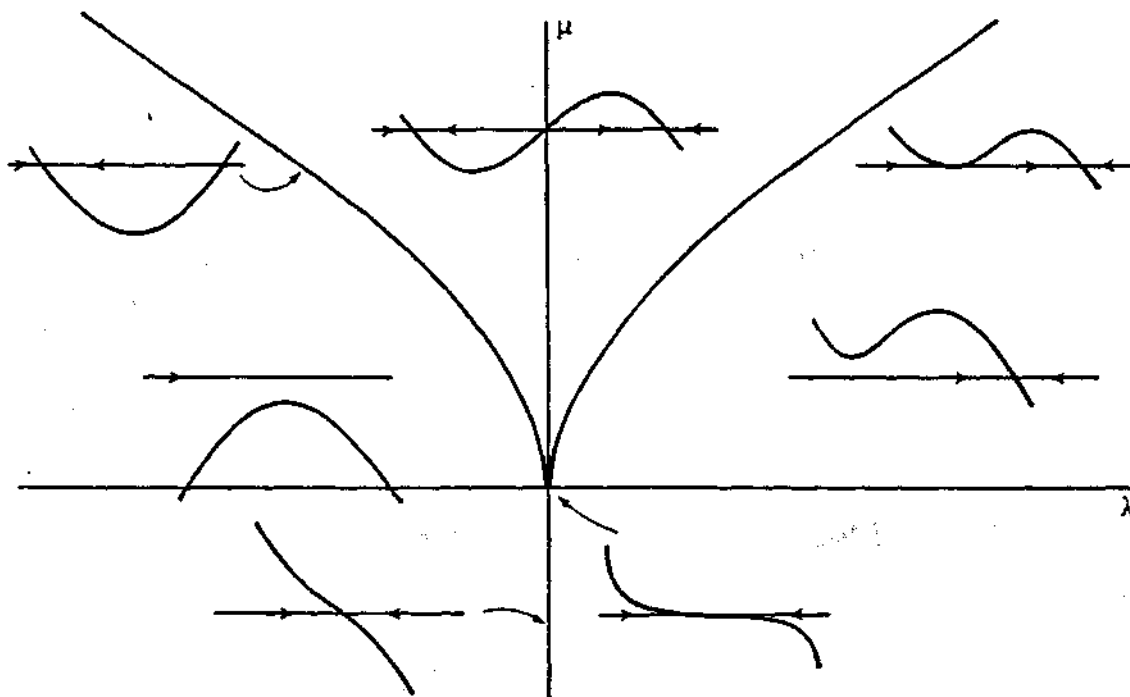
Μας ενδιαφέρουν όλες οι τιμές των  $\lambda$  και  $\mu$  για τις οποίες οι (10.9) έχουν μια κοινή λύση  $x$ . Από τις (2.9) παίρνουμε

$$\mu = 3x^2, \quad \lambda = -2x^3 \quad (10.10)$$

που μας δίνουν την εξίσωση μιας αιχμής (cusp):

$$4\mu^3 = 27\lambda^2 \quad (10.11)$$

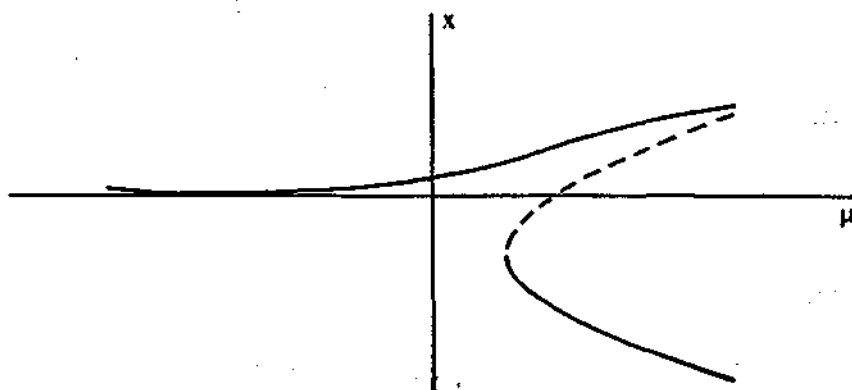
Στο Σχ. 10.11 έχει σχεδιασθεί η αιχμή στο  $(\lambda, \mu)$ -επίπεδο, καθώς και ορισμένα αντιπροσωπευτικά διαγράμματα φάσεων της (10.7).



Σχήμα 10.11.

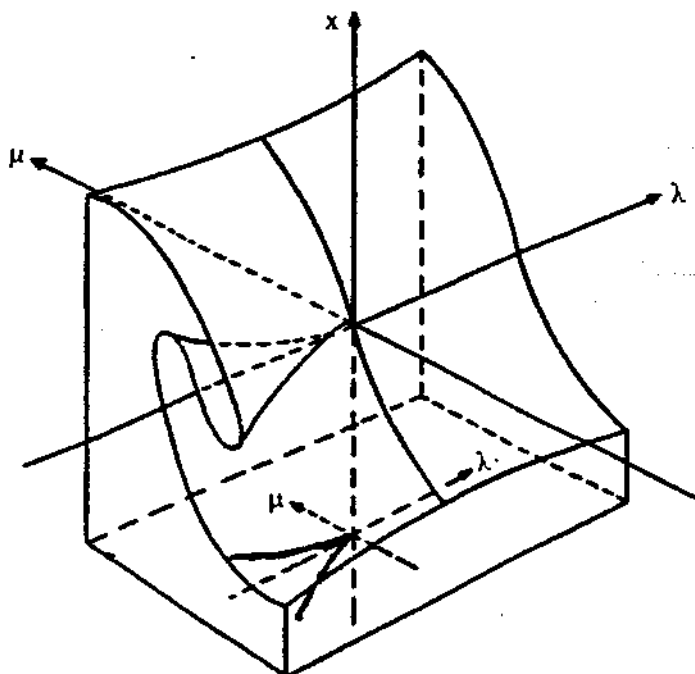
Από το Σχ. 10.11, μπορούμε με το να σταθεροποιήσουμε το  $\mu$  σε μια θετική τιμή (π.χ.  $\mu = 1$ ) να πάρουμε το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 10.7, που αναφέρεται στο Παράδειγμα 10.4. Εξάλλου, θέτοντας  $\lambda = 0$  μπορούμε να πάρουμε το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 10.9, που αναφέρεται στο Παράδειγμα 10.5.

Η εξίσωση (10.7) περιέχει και μια "κρυμμένη" υπερ-κρίσιμη διακλάδωση σάγματος-κόμβου: σταθεροποιούμε το  $\lambda \neq 0$  (π.χ.  $\lambda=1$ ) και μεταβάλλουμε το  $\mu$  (Σχ. 10.12).



Σχήμα 10.12.

Αν και είναι δύσκολο να σχεδιασθεί, το πλήρες διάγραμμα διακλάδωσης της (10.7) στον τρισδιάστατο  $(\lambda, \mu, x)$ -χώρο, μπορεί να κατασκευαστεί από την  $f(\lambda, \mu, x)=0$ . Τα Σχ. 10.7, 10.9 και 10.12 δεν είναι, βεβαίως, παρά διάφορες επίπεδες τομές του πλήρους διαγράμματος διακλάδωσης του Σχ. 10.13.



Σχήμα 10.13.

Στη συνέχεια διατυπώνουμε ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα της μαθηματικής ανάλυσης, που αποτελεί ένα ουσιωδώς απαραίτητο εργαλείο της Θεωρίας Διακλαδώσεων. Το παρουσιάζουμε σε μια απλοποιημένη εκδοχή του, κατάλληλη για τη μελέτη διακλαδώσεων των σημείων ισορροπίας βαθμωτών διαφορικών εξισώσεων.

**Θεώρημα 10.1. (Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης).** Έστω ότι η  $F: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (\lambda, x) \rightarrow F(\lambda, x)$  είναι μια  $C^1$ -συνάρτηση που ικανοποιεί τις υποθέσεις

$$F(0,0) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) \neq 0$$

Τότε υπάρχουν σταθερές  $\delta > 0$ ,  $\eta > 0$  και μια  $C^1$ -συνάρτηση  $\psi$  με  $\psi: \{\lambda \in \mathbb{R}^k: \|\lambda\| < \delta\} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοιες, ώστε

$$\psi(0) = 0 \quad \text{και} \quad F(\lambda, \psi(\lambda)) = 0 \quad \text{για} \quad \|\lambda\| < \delta.$$

Επιπλέον, αν υπάρχει κάποιο  $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $\|\lambda_0\| < \delta$ ,  $|x_0| < \eta$  και  $F(\lambda_0, x_0) = 0$ , τότε ισχύει

$$x_0 = \psi(\lambda_0)$$

**Παρατήρηση 10.1.** Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης σε κάποιες συγκεκριμένες καταστάσεις, ενδεχομένως απαιτείται να γίνει ένας μετασχηματισμός των μεταβλητών, έτσι, ώστε η αρχή των αξόνων να μηδενίζει τη συνάρτηση που εμφανίζεται. Αν, π.χ., η  $G: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (\mu, y) \rightarrow G(\mu, y)$  έχει  $G(\mu_0, y_0) = 0$ , τότε παίρνουμε ως  $F$  την  $F(\lambda, x) = G(\mu_0 + \lambda, y_0 + x)$ .

**Παρατήρηση 10.2.** Ο τρόπος με τον οποίον χρησιμοποιείται το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης για τη μελέτη διακλαδώσεων των σημείων ισορροπίας, είναι ο εξής:

Έστω  $x' = f(\lambda, x)$  μια διαφορική εξίσωση που εξαρτάται από  $k$  παραμέτρους  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ . Αν το  $x=0$  είναι ένα υπερβολικό σημείο ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης στο  $\lambda=0$ , τότε ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης. Έτσι, εξασφαλίζεται ότι η εξίσωση  $f(\lambda, x) = 0$  μπορεί να λυθεί τοπικά ως προς  $x = \psi(\lambda)$ , ως συνάρτηση των παραμέτρων  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ . Επιπλέον, για μικρό  $\lambda$ , ισχύει



$\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda, \psi(\lambda)) \neq 0$ . Κατά συνέπεια, η ποιοτική δομή της ροής δεν

αλλάζει κοντά στο  $x=0$ , πράγμα που σημαίνει ότι δεν υπάρχουν διακλαδώσεις, στην περιοχή του  $x=0$ , για μικρές τιμές των παραμέτρων.

**Παρατήρηση 10.3.** Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$x' = f(\lambda, x) \quad (10.12)$$

όπου η  $f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (\lambda, x) \rightarrow f(\lambda, x)$  είναι μια  $C^1$ -συνάρτηση, τέτοια, ώστε

$$f(0, 0) = g(x) \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = g'(0) \neq 0 \quad (10.13)$$

καθώς και τη μη-διαταραγμένη διαφορική εξίσωση

$$x' = g(x) \quad (10.14)$$

για την οποία υποθέτουμε ότι έχει σημείο ισορροπίας στο  $x=0$  (δηλ.  $g(0)=0$ ).

Με τη βοήθεια του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης, μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτό που παρατηρήσαμε για την εξίσωση (10.1) ισχύει και στη γενική παραπάνω περίπτωση, ότι, δηλαδή, η ροή κοντά σε ένα υπερβολικό σημείο ισορροπίας δεν διαφοροποιείται από μικρές διαταραχές του διανυσματικού πεδίου.

**Παρατήρηση 10.4.** Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$x' = f(\lambda, x) \quad (10.15)$$

όπου η  $f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (\lambda, x) \rightarrow f(\lambda, x)$  είναι μια  $C^2$ -συνάρτηση, τέτοια, ώστε

$$f(0, 0) = g(x) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad , \quad (10.16)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = g''(0) \neq 0$$

και, επιπλέον,  $g(0)=0$ .

Στο Παράδειγμα 10.2, είδαμε ότι η ροή της (10.2) αλλάζει, στο  $\lambda=0$ , από ροή με δύο σημεία ισορροπίας όταν  $\lambda g''(0) < 0$  σε ροή με κανένα σημείο ισορροπίας όταν  $\lambda g''(0) > 0$  (το ρόλο της  $f$  εκεί, παίζει η  $g$  εδώ). Με τη χρήση του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης, μπορεί να δειχθεί ότι η συμπεριφορά της διακλάδωσης της (10.2), διατηρείται στη γενική περίπτωση ((10.15), (10.16)).

Το πλήθος των σημείων ισορροπίας της (10.15) εξαρτάται από την ακρότατη τιμή

$$a(\lambda) := f(\lambda, \psi(\lambda)) \quad (10.17)$$

της συνάρτησης  $f$ . Ειδικότερα, όταν  $a(\lambda)g''(0) < 0$ , υπάρχουν δύο υπερβολικά σημεία ισορροπίας κοντά στην αρχή των αξόνων, αν  $a(\lambda) = 0$ , υπάρχει ένα μη υπερβολικό σημείο ισορροπίας στην αρχή των αξόνων και, τέλος, όταν  $a(\lambda)g''(0) > 0$ , δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας γύρω από την αρχή των αξόνων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν και υπεισέρχονται  $k$  παράμετροι, η συμπεριφορά διακλάδωσης της (10.15) εξαρτάται από έναν μόνο αριθμό, το  $a(\lambda)$ . Όταν συμβαίνει κάτι τέτοιο, λέμε ότι το αρχικό διανυσματικό πεδίο  $g$  είναι μια διακλάδωση συνδιάστασης 1.

**Παρατήρηση 10.5.** Θεωρούμε, τέλος, τη διαφορική εξίσωση

$$x' = f(\lambda, x) \quad (10.18)$$

όπου η  $f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (\lambda, x) \rightarrow f(\lambda, x)$  είναι μια  $C^3$ -συνάρτηση, τέτοια, ώστε

$$f(0, 0) = g(x) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) = g''(0) \neq 0 \quad (10.19)$$

Μια πλήρης ανάλυση διακλάδωσης αυτού του προβλήματος είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη. Τα πράγματα είναι απλούστερα αν θεωρήσουμε  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  τότε, με τη βοήθεια, και πάλι, του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης, μπορεί να δειχθεί ότι το Παράδειγμα 10.6 είναι

αντιπροσωπευτικό του τι μπορεί να συμβεί στη γενική περίπτωση ((10.18), (10.19)), κοντά στο σημείο ισορροπίας  $x=0$ .

Ένα άλλο παράδειγμα προβλήματος διακλάδωσης, που σε πρώτη ματιά εμφανίζεται να είναι διαφορετικής φύσης, αλλά στην πραγματικότητα είναι του ίδιου τύπου με τα προηγούμενα είναι το εξής:

**Παράδειγμα 10.7.** Να βρεθούν οι διαφορετικοί τύποι διαγράμματος φάσεων που εμφανίζονται στο μονοπαραμετρικό σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ y' &= x + \mu y - x(x^2 + y^2) \end{aligned}, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (10.20)$$

Σε πολικές συντεταγμένες το (10.20) γράφεται

$$\begin{aligned} r' &= r(\mu - r^2) \\ \Theta' &= 1 \end{aligned} \quad (10.21)$$

Για  $\mu < 0$ , ισχύει  $r=0$  όταν  $r'=0$ . διαφορετικά  $r < 0$ . Έτσι για κάθε αρνητικό  $\mu$ , τα διαγράμματα φάσεων είναι ευσταθείς εστίες (ελκυστικοί έλικες). Όταν  $\mu=0$ , ισχύει  $r'=-r^3$  και έτσι το διάγραμμα φάσεων είναι και πάλι ευσταθής εστία (όταν  $\mu=0$ , το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι κέντρο). Όταν, όμως  $\mu > 0$ , η αρχή των αξόνων είναι ασταθής αφού  $r' > 0$  για  $0 < r < \sqrt{\mu}$ .

Η  $r(t) = \sqrt{\mu}$ ,  $\Theta(t) = t$  είναι λύση του (10.21), και έτσι ο κύκλος  $r = \sqrt{\mu}$  συνιστά μια κλειστή τροχιά. Όταν  $r > \sqrt{\mu}$ , ισχύει  $r' < 0$  και έτσι η κλειστή αυτή τροχιά είναι ένας ευσταθής οριακός κύκλος. Έχουμε, λοιπόν, ότι στο  $\mu=0$  το σύστημα (10.20) υφίσταται διακλάδωση.

Παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές της γραμμικοποίησης του (10.20) στο  $(0,0)$ , είναι  $\mu \pm i$ , και στο σημείο διακλάδωσης  $\mu=0$  γίνονται γνήσια φανταστικές. Για  $\mu > 0$ , υπάρχει ένας οριακός κύκλος που, καθώς το  $\mu$  αυξάνει, αυξάνει σε μέγεθος "απομακρυνόμενος" από το σημείο ισορροπίας. Αυτό είναι ένα παράδειγμα της λεγόμενης διακλάδωσης Hopf.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει ικανές συνθήκες για την εμφάνιση ενός οριακού κύκλου κατ'αυτόν τον τρόπο.

**Θεώρημα 10.2.** (Διακλάδωση Hopf). Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2, \mu) \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2, \mu) \end{aligned}, \quad \mu \in \mathbf{R} \quad (10.22)$$

Έστω ότι το (10.22) έχει σημείο ισορροπίας στο (0,0) για κάθε  $\mu \in \mathbf{R}$ . Υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές  $\lambda_1(\mu)$  και  $\lambda_2(\mu)$  του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι γνήσια φανταστικές όταν  $\mu = \mu_0$ . Αν το πραγματικό μέρος ( $\text{Re}\lambda_1(\mu) = \text{Re}\lambda_2(\mu)$ ) των ιδιοτιμών ικανοποιεί τη σχέση

$$\left. \frac{d}{d\mu} \text{Re}\lambda_1(\mu) \right|_{\mu = \mu_0} > 0 \quad (10.23)$$

και αν το (0,0) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας όταν  $\mu = \mu_0$ , τότε:

- (i) το  $\mu = \mu_0$  είναι σημείο διακλάδωσης του (10.22)
- (ii) για  $\mu \in (\mu_1, \mu_0)$  (για κάποιο  $\mu_1 < \mu_0$ ) το (0,0) είναι ευσταθής εστία
- (iii) για  $\mu \in (\mu_0, \mu_2)$  (για κάποιο  $\mu_2 > \mu_0$ ) το (0,0) είναι ασταθής εστία που περιβάλλεται από έναν ευσταθή οριακό κύκλο, του οποίου η ακτίνα αυξάνει καθώς αυξάνει το  $\mu$ .

**Παράδειγμα 10.6.** Η διακλάδωση Hopf χαρακτηρίζεται από μεταβολή της ευστάθειας του σημείου ισορροπίας που συνοδεύεται από τη δημιουργία ενός οριακού κύκλου.

Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [Ma-McC].

**Παράδειγμα 10.8.** Να δειχθεί ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1' &= \mu x_1 - 2x_2 - 2x_1(x_1^2 + x_2^2)^2 \\ x_2' &= 2x_1 - \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)^2 \end{aligned} \quad \mu \in \mathbf{R} \quad (10.24)$$

υφίσταται μια διακλάδωση Hopf στο (0,0), όταν  $\mu = 0$ .

Το (0,0) είναι ένα σημείο ισορροπίας του (10.24) για κάθε  $\mu$ . Το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι

$$\begin{aligned}x_1' &= \mu x_1 - 2x_2 \\x_2' &= 2x_1 + \mu x_2\end{aligned}\quad (10.25)$$

που έχει ιδιοτιμές  $\lambda_{1,2}(\mu) = \mu \pm 2i$ .

Έτσι, όταν  $\mu=0$  έχουμε ότι  $\lambda_{1,2}(0) = \pm 2i$  και

$$\left. \frac{d}{d\mu} \operatorname{Re} \lambda_1(\mu) \right|_{\mu=0} = 1 > 0$$

Η συνάρτηση

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad (10.26)$$

$$\text{με } V'(x_1, x_2) = -2(2x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)^2 \quad (10.27)$$

είναι μια ισχυρή συνάρτηση Lyapunov του (10.24) με  $\mu=0$ , και κατά συνέπεια το  $(0,0)$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Ισχύουν, λοιπόν, όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 10.2.

**Παρατήρηση 10.7.** Αν δεν μπορεί να βρεθεί μια ισχυρή συνάρτηση Lyapunov, τότε είναι δύσκολο να ελεγχθεί αν το  $(0,0)$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, όταν το  $\mu$  βρίσκεται στο σημείο διακλάδωσης  $\mu_0$ . Επειδή το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι κέντρο, το Θεώρημα Γραμμικοποίησης δεν είναι δυνατό να προσδιορίσει τη φύση του μη γραμμικού σημείου ισορροπίας. Υπάρχει, παρ'όλα αυτά μια διαδικασία, που επιτρέπει τον προσδιορισμό της ευστάθειας στο  $\mu=\mu_0$ . Αυτή συνίσταται στον υπολογισμό ενός δείκτη που περιγράφεται στην επόμενη Πρόταση.

**Πρόταση 10.1.** Θεωρούμε το σύστημα

$$x_1' = f_1(x_1, x_2, \mu), \quad x_2' = f_2(x_1, x_2, \mu) \quad (10.28)$$

και έστω  $x' = Ax, \quad x = (x_1, x_2) \quad (10.29)$

η γραμμικοποίηση του (10.28) στο  $(0,0)$  όταν  $\mu=\mu_0$ .

Έστω  $M$  ένας μη ιδιάζων πίνακας, τέτοιος, ώστε

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & |\beta| \\ -|\beta| & 0 \end{pmatrix} \quad (10.30)$$

όπου  $\pm i\beta$  είναι οι ιδιοτιμές του  $A$ .

Έστω

$$y_1' = g_1(y_1, y_2), \quad y_2' = g_2(y_1, y_2) \quad (10.31)$$

το σύστημα στο οποίο μετατρέπεται το (10.28) με  $\mu = \mu_0$ , μέσω του μετασχηματισμού

$$x = My \quad (10.32)$$

Έστω, τέλος,

$$g_{jk}^i = \frac{\partial^2 g_i}{\partial y_j \partial y_k} (0, 1) \quad \text{και} \quad g_{jkl}^i = \frac{\partial^3 g_i}{\partial y_j \partial y_k \partial y_l} (0, 0) \quad (10.33)$$

και ορίζουμε

$$\begin{aligned} I = & |\beta| \{g_{111}^1 + g_{122}^1 + g_{112}^2 + g_{222}^2\} + \\ & + \{g_{11}^1 g_{11}^2 - g_{11}^1 g_{12}^1 + g_{11}^2 g_{12}^2\} + \\ & + \{g_{22}^2 g_{12}^2 - g_{22}^1 g_{12}^1 - g_{22}^1 g_{22}^2\} \end{aligned} \quad (10.34)$$

Αν  $I < 0$ , τότε το  $(0,0)$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

**Παράδειγμα 10.9.** Ναδειχθεί ότι η εξίσωση

$$x'' + (x^2 - \mu)x' + 2x + x^3 = 0 \quad (10.35)$$

έχει σημείο διακλάδωσης στο  $\mu = 0$  και ταλαντώνεται για κάποιο  $\mu > 0$ .

Το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -(x_1^2 - \mu)x_2 - 2x_1 - x_1^3 \end{aligned} \quad (10.36)$$

που έχει ένα σημείο ισορροπίας στο  $(0,0)$ .

Η γραμμικοποίηση του (10.36) είναι

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (10.37)$$

που έχει ιδιοτιμές

$$\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 8}}{2}$$

Για  $\mu=0$ , οι ιδιοτιμές αυτές είναι γνήσια φανταστικές και ισχύει

$$\left. \frac{d}{d\mu} \operatorname{Re} \lambda \right|_{\mu=0} = \frac{1}{2}$$

Ο πίνακας

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (10.38)$$

έχει την ιδιότητα

$$M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Η αλλαγή μεταβλητής

$$\mathbf{x} = M\mathbf{y} \quad (10.39)$$

μετασχηματίζει το (10.36), με  $\mu=0$ , στο σύστημα

$$y_1' = \sqrt{2} y_2$$

$$y_2' = -\sqrt{2} y_1 - y_1^2 y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} y_1^3 \quad (10.40)$$

Ο δείκτης  $I$  υπολογίζεται από την (10.34) και είναι

$$I = -2\sqrt{2}$$

Το σύστημα (10.36), λοιπόν, διακλαδώνεται σε έναν ευσταθή οριακό κύκλο, που περιβάλλει ένα ασταθές σημείο ισορροπίας στο  $(0,0)$ , καθώς το  $\mu$  αυξάνεται διερχόμενο από το 0. Το (10.36) συνιστά την αναπαράσταση της (10.35) στο επίπεδο φάσεων και η ύπαρξη μιας κλειστής τροχιάς, συνεπάγεται ότι η  $x(t)$  ταλαντώνεται για κάποιο  $\mu > 0$ .



## 11. ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΩΝ

Όταν βράζουμε νερό, παρατηρούμε ότι ξαφνικά εμφανίζονται φυσαλλίδες και ένα μέρος του υγρού μετατρέπεται σε ατμό. Κατά τη διάρκεια μιας καταιγίδας, ένας κεραυνός μπορεί να πέσει ξαφνικά. Κύτταρα που έχουν επιδείξει κανονική συμπεριφορά, ξαφνικά γίνονται καρκινικά και πολλαπλασιάζονται ραγδαία.

Τέτοιες ξαφνικές αλλαγές στην κατάσταση ενός συστήματος λέγονται καταστροφές. Ο στόχος της θεωρίας καταστροφών είναι η κατασκευή ενός μαθηματικού συστήματος που να προσφέρεται για την περιγραφή ασυνεχών μεταβολών κατάστασης σε κάθε πλαίσιο. Αυτός ο στόχος δεν έχει επιτευχθεί γενικώς, όμως η θεωρία έχει αναπτυχθεί τόσο, ώστε να καλύπτει ένα κάποιο πλήθος ενδεχομένων.

Η θεωρία καταστροφών έχει προκαλέσει έντονη επιστημονική διαμάχη. Σε αυτή την παράγραφο θα επιχειρήσουμε απλώς να δώσουμε μια "γεύση" ορισμένων ιδεών της· η αναλυτική μαθηματική επεξεργασία τους, ξεφεύγει από τα όρια και το επίπεδο που απευθύνονται αυτές οι σημειώσεις. Τέλος, θα επιχειρήσουμε και έναν σχολιασμό και μια κριτική της θεωρίας. Οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες μπορούν να ανατρέξουν στα συγγράμματα:

- R. Thom: Structural Stability and Morphogenesis, Benjamin-Cummings, 1975.
- V. I. Arnold: Catastrophe Theory, Springer, 1984.
- T. Poston-I. Stewart: Catastrophe Theory and its Applications, Pitman, 1978.
- Y. C. Lu: Singularity Theory and an introduction to Catastrophe Theory, Springer, 1976.
- I. Ekeland: Mathematics and the Unexpected, University of Chicago Press, 1988.

(Μετάφραση στα Ελληνικά είναι υπό έκδοση, εκδ. οίκος Δίαυλος).

Θεωρούμε ότι η κατάσταση ενός συστήματος μπορεί να εκφρασθεί με τη βοήθεια των μεταβλητών  $x_1, \dots, x_n$ , μια μικρή μεταβολή στις οποίες συνοδεύεται από μια μικρή αλλαγή στη μορφή του συστήματος. Εκτός από τις  $x_1, \dots, x_n$ , εμφανίζονται και παράμετροι  $a_1, \dots, a_k$  που χαρακτηρίζουν την αλληλεπίδραση των διαφόρων τμημάτων του συστήματος. Αν με μια μικρή μεταβολή στις  $a_1, \dots, a_k$ , η κατάσταση του συστήματος διαφοροποιείται δραστικά, λέμε ότι συμβαίνει μια καταστροφή, και το σύνολο των τιμών  $a_1, \dots, a_k$  για τις οποίες συμβαίνει η καταστροφή, λέγεται σύνολο

καταστροφής. Αν, αντιθέτως, μια μικρή μεταβολή στις  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , προκαλεί μια μικρή τροποποίηση της κατάστασης του συστήματος, αυτή η κατάσταση λέγεται κανονική.

Οι  $x_1, \dots, x_n$  λέγονται μεταβλητές κατάστασης, ενώ οι ποσότητες  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , που μπορεί να επηρεάζονται από εξωτερικές διαταραχές, λέγονται παράμετροι του συστήματος.

Έστω ότι υπάρχει μια συνάρτηση

$$V(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

που για σταθεροποιημένες  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  δίνει τις ενδεχόμενες καταστάσεις του συστήματος ως τιμές των  $x_1, \dots, x_n$ , για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial V}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (11.1)$$

Πολύ συχνά, η  $V$  σχετίζεται με κάποιας μορφής ενέργεια του συστήματος και έτσι η  $V$  λέγεται συνάρτηση δυναμικού. Όταν οι  $x_1, \dots, x_n$  ικανοποιούν τις (11.1), προσδιορίζουν μια κατάσταση ισορροπίας.

**Ορισμός 11.1.** Η οριζουσα

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

ονομάζεται οριζουσα Hesse της  $V$ .

Δεν είναι δύσκολο ναδειχθεί το ακόλουθο:

**Θεώρημα 11.1.** Μια κατάσταση ισορροπίας είναι καταστροφική ή κανονική, ανάλογα με το αν η οριζουσα Hesse της συνάρτησης δυναμικού μηδενίζεται ή όχι, αντιστοίχως.

Ένα άλλο ερώτημα είναι το εξής: αν το σύστημα βρίσκεται σε κανονική κατάσταση ισορροπίας και μεταβληθούν λίγο οι  $x_1, \dots, x_n$  ενώ μείνουν αμετάβλητες οι  $a_1, \dots, a_k$ , θα παραμείνει το σύστημα κοντά στη θέση ισορροπίας ή θα τείνει να απομακρυνθεί από αυτήν; Το κριτήριο που χρησιμοποιείται, σχετικά, είναι: αν για κάθε δυνατή, μικρή μεταβολή των  $x_1, \dots, x_n$  το δυναμικό  $V$  αυξάνει από την ισορροπία του, η κατάσταση ισορροπίας λέγεται *ευσταθής*. Αν, αντιθέτως, για τέτοιες μεταβολές των  $x_1, \dots, x_n$  το  $V$  δεν αυξάνει, η κατάσταση ισορροπίας λέγεται *ασταθής*.

Αν οι μεταβλητές κατάστασης επιλέγουν καταλλήλως, οι ιδιαιτερότητες που ενδεχομένως παρουσιάζει το σύστημα κοντά σε μια θέση ισορροπίας, μπορούν να αναχθούν στη μελέτη μερικών μόνο τυπικών περιπτώσεων, που είναι γνωστές ως *στοιχειώδεις καταστροφές*. Αυτές οι στοιχειώδεις καταστροφές περιλαμβάνουν μια ή δύο μεταβλητές κατάστασης, ανεξάρτητα από το πλήθος των μεταβλητών κατάστασης που υπάρχουν αρχικά.

Αν, λοιπόν, θεωρήσουμε ότι η θέση ισορροπίας είναι στην αρχή των αξόνων, τότε μπορούμε -με ακρίβεια τέταρτης τάξης- να γράψουμε

$$V = V_0 + \sum_{i,j} d_{ij} x_i x_j + \sum_{i,j,\ell} b_{ij\ell} x_i x_j x_\ell + \sum_{i,j,\ell,m} c_{ij\ell m} x_i x_j x_\ell x_m$$

Εν γένει οι συντελεστές  $d_{ij}$ ,  $b_{ij\ell}$ ,  $c_{ij\ell m}$  εξαρτώνται από τις  $a_1, \dots, a_k$ . Περιστρέφοντας τους άξονες, μπορούμε να έχουμε στο πρώτο από τα παραπάνω αθροίσματα μόνο τετραγωνικούς όρους και έτσι να πάρουμε

$$V = V_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i^2 + \sum_{i,j,\ell} B_{ij\ell} X_i X_j X_\ell + \sum_{i,j,\ell,m} C_{ij\ell m} X_i X_j X_\ell X_m$$

όπου οι  $\lambda_i$  λέγονται *ιδιοτιμές*.

Εύκολα φαίνεται ότι η ορίζουσα Hesse του Θεωρήματος 11.1 ισούται με

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i$$

στη θέση ισορροπίας. Αν, λοιπόν, δεν μηδενίζεται καμιά ιδιοτιμή καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροι του συστήματος, η κατάσταση ισορροπίας

παραμένει κανονική. Επίσης, τα χαρακτηριστικά ευστάθειας δεν μεταβάλλονται, όταν αλλάζουν οι παράμετροι. Με άλλα λόγια, δεν μπορεί να συμβεί ανταλλαγή ευστάθειας εκτός από εκεί όπου μηδενίζεται μια τουλάχιστον ιδιοτιμή· τότε τα  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  αποτελούν ένα μέλος του συνόλου καταστροφής. Αυτές οι ιδέες μας δείχνουν τη στενή σύνδεση των διακλαδώσεων με τις καταστροφές και μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

**Θεώρημα 11.2.** Αν δεν μηδενίζεται καμιά ιδιοτιμή, η κατάσταση ισορροπίας είναι κανονική και η ευστάθεια τους δεν μεταβάλλεται με τις παραμέτρους του συστήματος.

Στην περίπτωση που υφίσταται καταστροφή (αν, δηλ. μηδενίζεται μια τουλάχιστον ιδιοτιμή), ο R. Thom απέδειξε το 1975 το ακόλουθο.

**Θεώρημα 11.3.** Για συστήματα με τέσσερεις το πολύ παραμέτρους (αλλά με οποιοδήποτε πλήθος μεταβλητών κατάστασης) υπάρχουν, ουσιαστικά, επτά πιθανοί τύποι συνόλων καταστροφής.

Το θεώρημα αυτό εξειδικεύεται στον παρακάτω πίνακα· για την κατανόηση του απαιτείται η ακόλουθη ορολογία: όταν οι όροι  $m$ -τάξης της (11.3) δεν μπορούν να απαλειφούν μέσω κατάλληλης επιλογής παραμέτρων, η κατάσταση λέγεται **ισορροπία επιπέδου  $m$**  ( $m=3,4,5,6$ ).

ΟΝΟΜΑ			ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ	Πλήθος και είδος ριζών των όρων τρίτης τάξης	
Πτυχή	1	3	$c_1x+x^3$	Τρεις άνισες πραγματικές Μία μόνο πραγμ.	
Αιχμή	1	4	$c_1x+c_2x^2+x^4$		
Χελιδονοουρά	1	5	$c_1x+c_2x^2+c_3x+x^5$		
Ελλειπτική Ομφαλική	2	3	$x^3-3xy^2+\alpha(x^2+y^2)+bx+cy$		
Υπερβολική Ομφαλική	2	3	$x^3+y^3+\alpha xy+bx+cy$		
Παραβολική Ομφαλ.	2	4	$x^2y+y^4+\alpha x^2+by^2+\alpha x+dy$		Τρεις (δύο ίσες) πραγματικές
Πεταλούδα	1	6	$c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+x^6$		

**Παρατήρηση 11.1.** Η έννοια του επιρρήματος "ουσιαστικά" στη διατύπωση του Θεωρήματος 11.3 είναι η εξής: αν η  $V(x,\alpha)$  έχει σύνολο καταστροφής  $K$  και η  $U(y,b)$  έχει ως σύνολο καταστροφής το κενό, τότε

η

$$W(x,y,a,b) := V(x,a) + U(y,b)$$

έχει το ίδιο σύνολο καταστροφής με την  $V$ . Έτσι οι επιπρόσθετες μεταβλητές κατάστασης  $y$  και παράμετροι  $b$ , δεν είναι ουσιώδεις στην κατάταξη του συνόλου καταστροφής της  $W$ .

**Παρατήρηση 11.2.** Είναι δυνατόν να μελετηθεί το τι συμβαίνει όταν μπορούν να μηδενισθούν τρεις ιδιοτιμές: μπορεί να εμφανισθούν τέσσερεις ακόμα καταστροφές. Όταν, όμως, μηδενίζονται περισσότερες από τρεις ιδιοτιμές, το πλήθος των ενδεχομένων είναι απεριόριστο.

**Παρατήρηση 11.3.** Στα προηγούμενα, έχει υποτεθεί ότι οι θέσεις ισορροπίας δίνονται από εκείνες τις τιμές των μεταβλητών κατάστασης που κάνουν τη  $V$  στάσιμη. Τέτοιες θέσεις αναμένεται πως θα υπάρχουν σε εσωτερικά σημεία του πεδίου επί του οποίου μεταβάλλονται οι μεταβλητές κατάστασης. Αν, όμως, για την εμφάνιση θέσης ισορροπίας απαιτείται η  $V$  να παίρνει τη μέγιστη (ή ελάχιστη) τιμή της, τότε η θέση αυτή μπορεί να μην πραγματοποιείται σε εσωτερικό σημείο του πεδίου μεταβολής των μεταβλητών κατάστασης, αλλά στο σύνορο του. Τότε, όμως, η  $V$  δεν είναι στάσιμη εκεί και έτσι όλη η θεωρία ακυρώνεται.

**Παράδειγμα 11.1.** Να ταξινομηθεί το σύνολο καταστροφών της

$$V(x,y,a,b) = x^3 - 4xy + ax^2 + bx + 4y^2 \quad (11.2)$$

Τα κρίσιμα σημεία της  $V$  θα ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 3x^2 - 4y + 2ax + b = 0 \quad (11.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -4x + 8y = 0 \quad (11.4)$$

Η ορίζουσα Hesse της  $V$  γίνεται ίση με το μηδέν, αν

$$\begin{vmatrix} 6x + 2a & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 48x + 16(a - 1) = 0 \quad (11.5)$$

Από τις (11.3) ως (11.5) παίρνουμε ότι ένα σημείο  $(a,b)$  ανήκει στο σύνολο καταστροφών της  $V$  τότε και μόνο τότε, αν

$$b^3 = (1-a)^2 \quad (11.6)$$

Θέτοντας

$$u = x + \frac{1}{3} (a-1) \quad c_1 = a-1$$

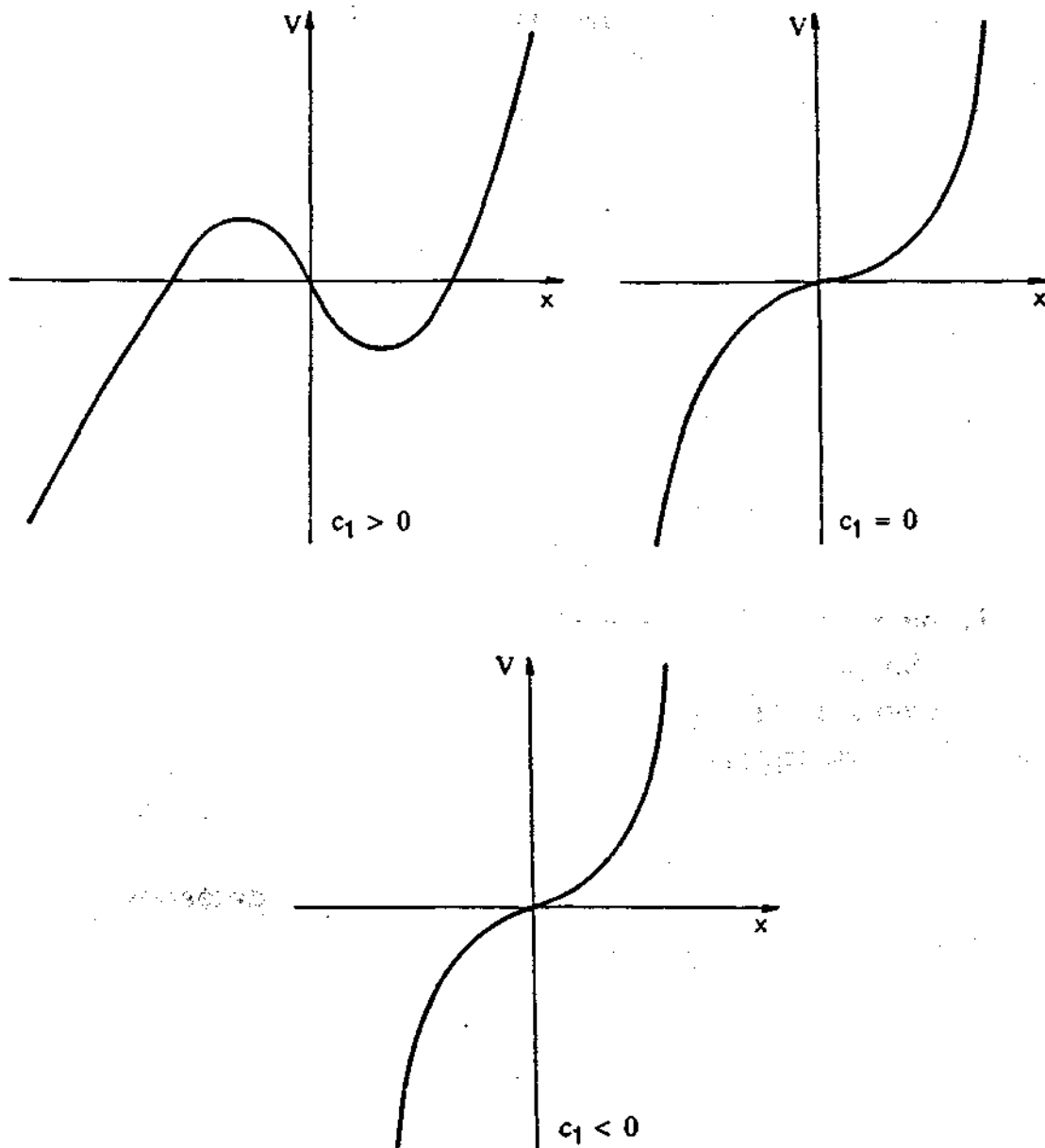
$$v = x - 2y \quad c_2 = b - \frac{1}{3} (a-1)^2 \quad (11.7)$$

παίρνουμε

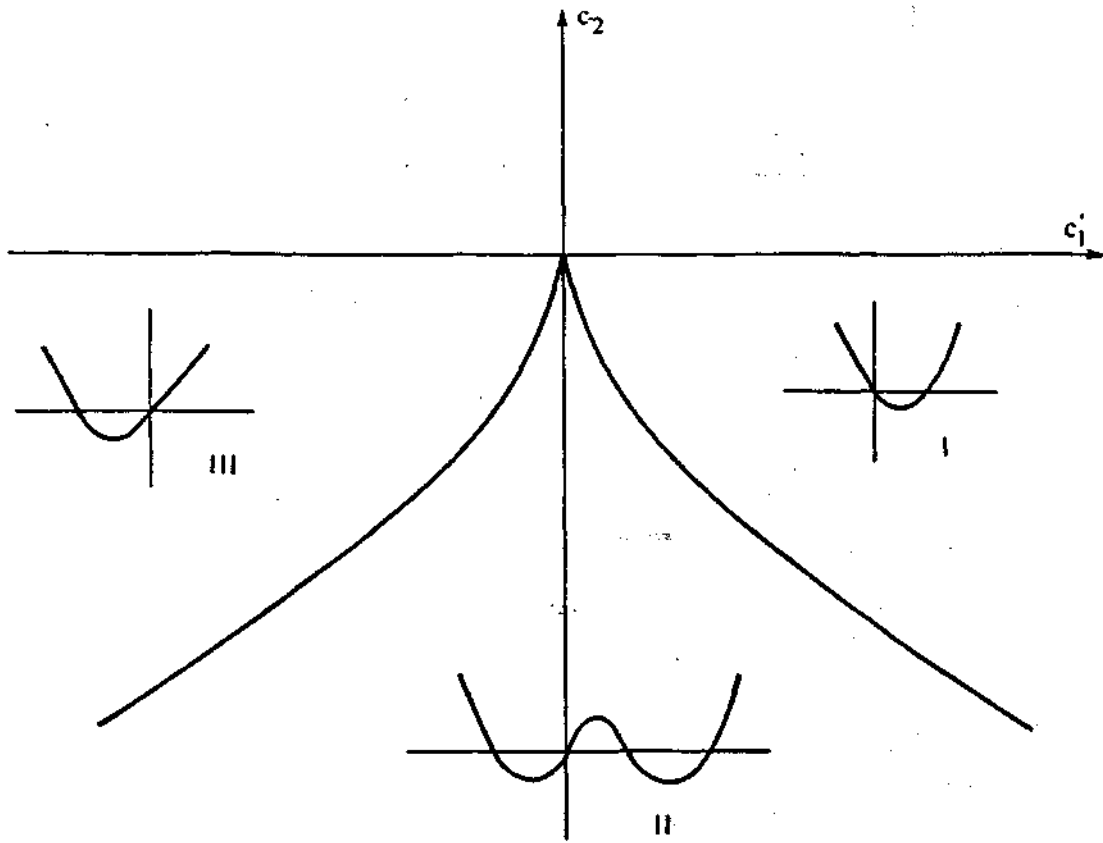
$$V(u, v, c_1, c_2) = u^3 + c_2 u + v^2 - \frac{1}{3} c_1 \left[ c_2 + \left( \frac{c_1^2}{3} \right) \right] \quad (11.8)$$

Παρατηρούμε ότι η πρόσθεση μιας σταθεράς στη συνάρτηση δυναμικού, δεν μεταβάλλει τις εξισώσεις του συστήματος και, έτσι, δεν μπορεί να έχει καμιά επίδραση επί του συνόλου καταστροφών. Συνεπώς, ο τελευταίος όρος της (11.8) μπορεί να αγνοηθεί. Εξάλλου, παρατηρούμε ότι η μεταβλητή  $v$  δεν είναι ουσιώδης για την κατάταξη του συνόλου καταστροφών, που προφανώς είναι πτυχή.

Στη συνέχεια, δίνουμε ορισμένα σχήματα που αναφέρονται στις επτά στοιχειώδεις καταστροφές.

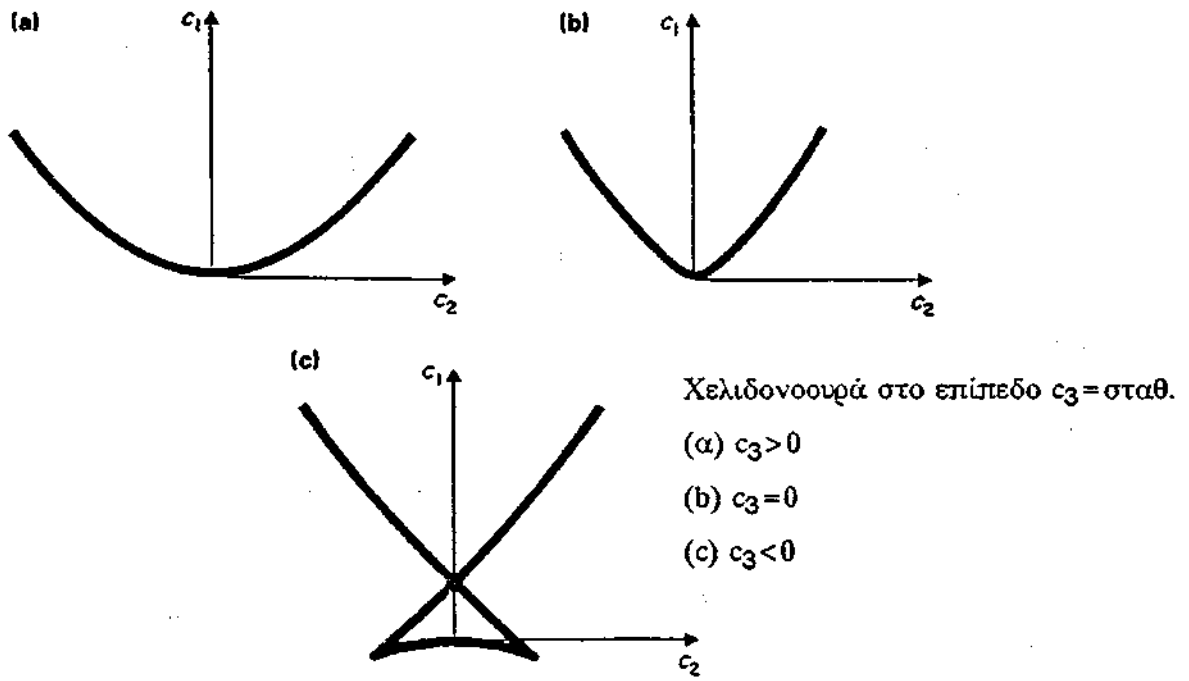


Σχήμα 11.1. Πιχτή για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $c_1$ .

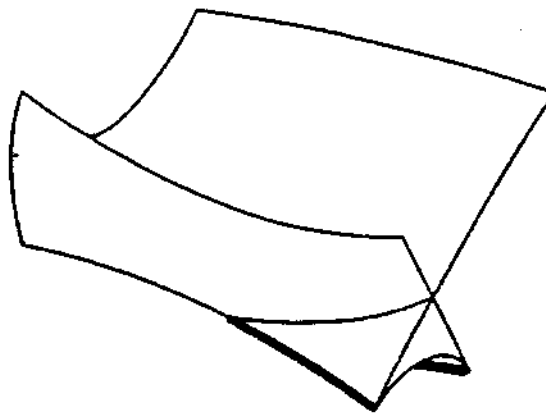


Σχήμα 11.2. Αιχμή



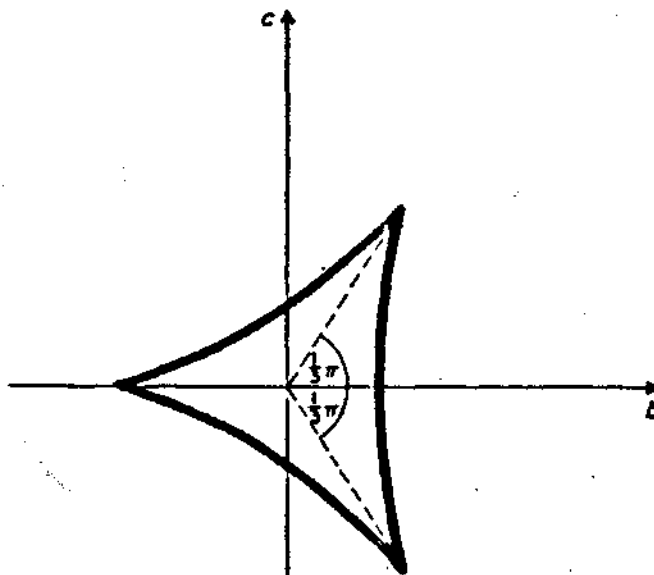


Σχήμα 11.3.

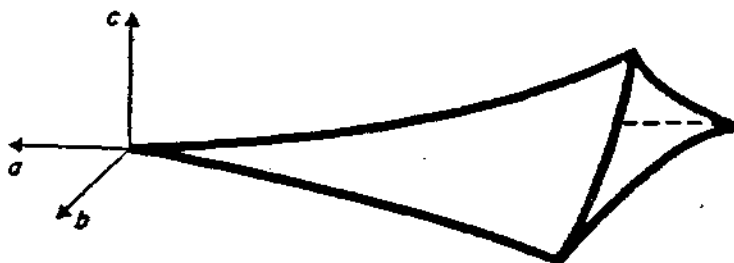


Χελιδονοουρά σε τρεις διαστάσεις

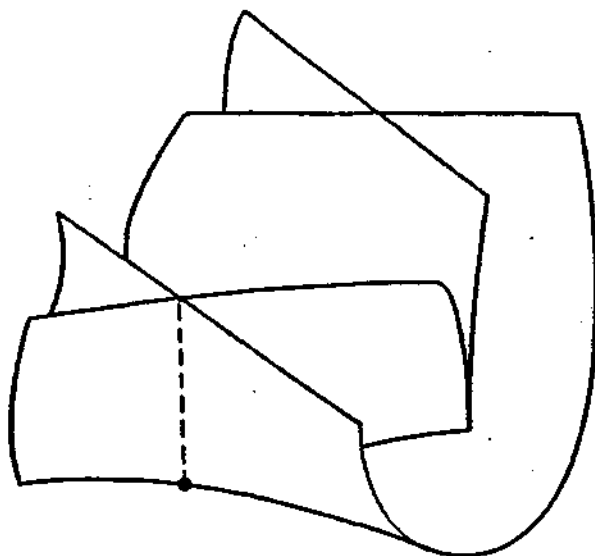
Σχήμα 11.4.



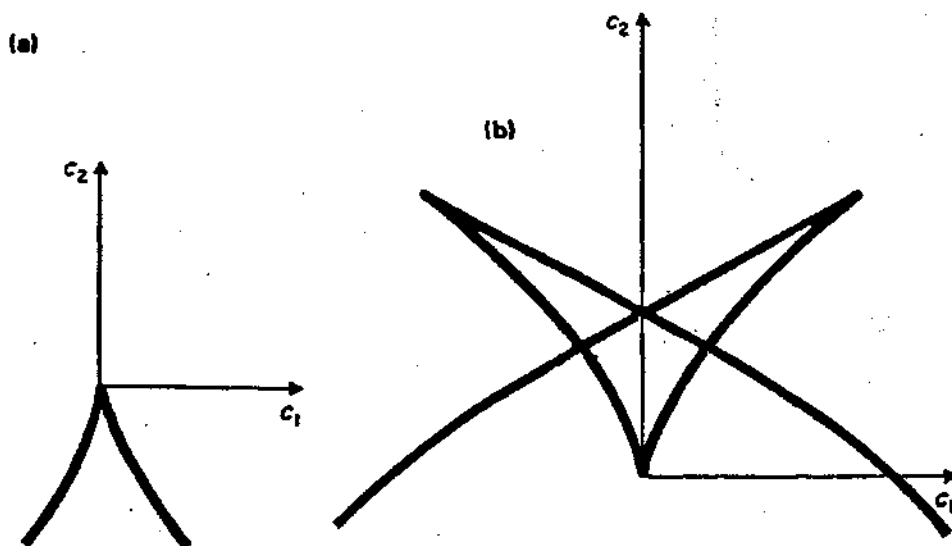
Σχήμα 11.5. Ελλειπτική Ομφαλική στο επίπεδο  $\alpha = \text{σταθ}$ .



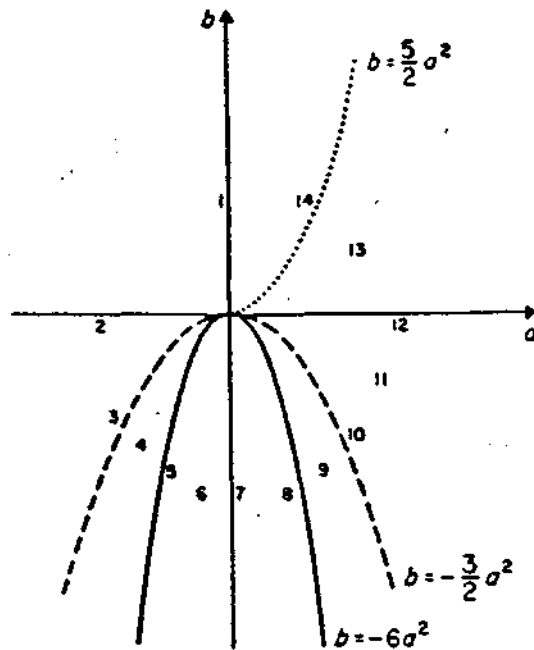
Σχήμα 11.6. Ελλειπτική Ομφαλική στον  $(\alpha, b, c)$ -χώρο, για  $\alpha < 0$ .



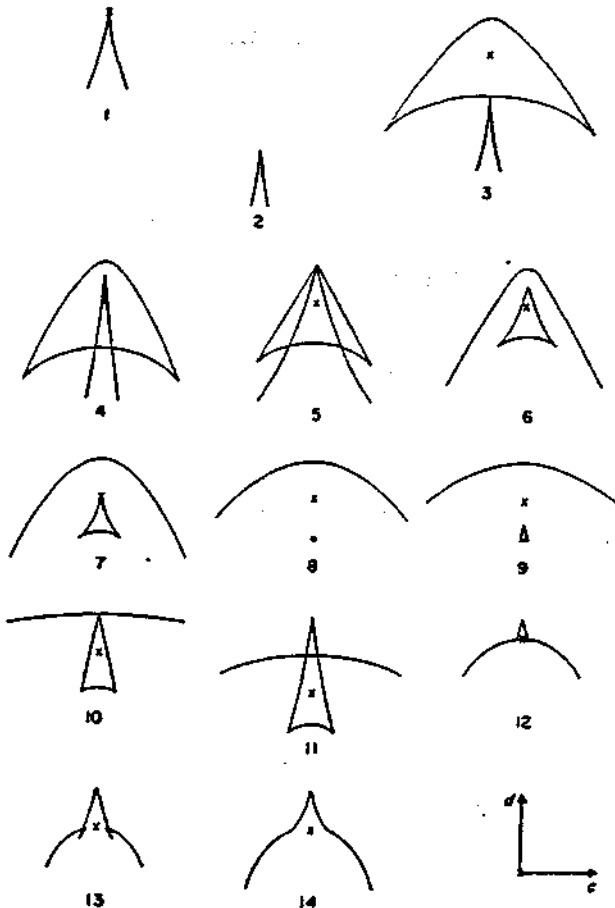
Σχήμα 11.7. Υπερβολική Ομφαλική στον  $(a,b,c)$ -χώρο.



Σχήμα 11.8. Πεταλούδα, όταν  $c_3=0$  και (α)  $c_4>0$ , (β)  $c_4<0$ .



Σχήμα 11.9. Υποδιαίρεσεις του (a,b)-επιπέδου για την Παραβολική Ομφαλική.



Σύνολο καταστροφών στο (c, d)-επίπεδο για τις αριθμημένες θέσεις του (a, b)-επιπέδου.

Η αρχή των αξόνων σημειώνεται με "x". Οι διευθύνσεις των αξόνων εμφανίζονται κάτω δεξιά.

Σχήμα 11.10.

## ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΩΝ

Η Θεωρία Καταστροφών μας πληροφορεί ότι αν επιδράσουμε σε ένα σύστημα με απόσβεση (dissipative system), μέσω δύο εξωτερικών μεταβλητών -διατηρώντας σταθερές όλες τις άλλες παραμέτρους- το σύνολο καταστροφών θα είναι μια οικογένεια αιχμών στο επίπεδο. Ενδεχομένως δεν θα υπάρχουν καθόλου αιχμές και το σύνολο καταστροφών θα αποτελείται μόνο από λείες καμπύλες (χωρίς γωνίες). Αυτό που μας λέει η Θεωρία, είναι ότι -στη διδιάστατη περίπτωση- δεν θα εμφανιστεί ποτέ ένα σχήμα πιο περίπλοκο από την αιχμή, ως σύνολο καταστροφών: θα μπορούσε κανείς να σκεφτεί ότι θα μπορούσαν να συμβαίνουν καταστροφές σε μεμονωμένα σημεία του επιπέδου, ή ότι θα υπήρχαν ολόκληρα πεδία αποτελούμενα μόνο από σημεία καταστροφών. Κάτι τέτοιο, κατά τη Θεωρία Καταστροφών- δεν συμβαίνει γενικώς. Η Θεωρία δεν ισχυρίζεται ότι οι πρότασεις της ισχύουν για όλα τα συστήματα με απόσβεση, αλλά για τα περισσότερα: αν ένα σύστημα δεν εμπίπτει σε αυτό το "γενικώς", η θεωρία λέει πως αν είχαμε τη δυνατότητα να παρέμβουμε στο σύστημα, τροποποιώντας το δυναμικό του λίγο, θα παίρναμε ένα νέο σύστημα, με σύνολο καταστροφών αποτελούμενο από λείες καμπύλες και αιχμές.

Εντελώς ανάλογα πράγματα συμβαίνουν και όταν έχουμε περισσότερες εξωτερικές μεταβλητές, μέχρι έξι: αν προσπαθήσει κανείς να επιδράσει σε ένα σύστημα μέσω επτά μεταβλητών συγχρόνως, το σύνολο καταστροφών γίνεται τόσο πολύπλοκο που δεν μπορεί να αναχθεί σε απλούστερες μορφές.

Συμπερασματικά, η Θεωρία Καταστροφών δεν μας λέει a priori τι θα συμβεί σε καμιά δεδομένη κατάσταση. Ακόμα και αν έχουμε να κάνουμε με ένα "καλό" σύστημα με απόσβεση και έχουμε τρεις εξωτερικές μεταβλητές στη διάθεσή μας, δεν υπάρχει τρόπος να προβλέψουμε αν θα παρατηρήσουμε μια χελιδονοουρά ή μια ομφαλική. Ενδέχεται να παρατηρήσουμε κάτι εντελώς διαφορετικό, πράγμα που θα σημαίνει ότι η συνάρτηση δυναμικού του συστήματος θα συνιστά μια εξαίρεση από τις συνήθεις περιπτώσεις.

Η κύρια συνεισφορά της Θεωρίας Καταστροφών έγκειται στην ιδέα της μελέτης ενός πολύπλοκου συστήματος από έξω, καταγράφοντας τις αντιδράσεις του σε ένα καλά ορισμένο σύνολο ερεθισμάτων. Έγκειται, επίσης, στο ενδιαφέρον προς τις ποιοτικές μεταβολές του συστήματος (π.χ. ξαφνικές μεταβάσεις από μια κατάσταση σε μια άλλη).

Η Θεωρία Καταστροφών ήταν ένα από τα μεγαλύτερα επιστημονικά γεγονότα της δεκαετίας του 1970. Μόλις κυκλοφόρησε το βιβλίο του Thom, και παρά τον έντονα τεχνικό του χαρακτήρα, το ενδιαφέρον για τη Θεωρία επεκτάθηκε πολύ πέρα από την επιστημονική κοινότητα, με άρθρα και συνεντεύξεις στα μέσα μαζικής επικοινωνίας. Ο C. Zeeman, ένας άγγλος μαθηματικός, αναζήτησε συστηματικά εφαρμογές σε ένα πλήθος καταστάσεων: καρδιακοί παλμοί, συμπεριφορά επίθεσης σκύλων, εξεγέρσεις σε φυλακές. Ο ίδιος ο Thom μελέτησε τη μορφογένεση (ανάπτυξη του εμβρύου από ένα μοναδικό κύτταρο) και χρησιμοποίησε τη Θεωρία στη γλωσσολογική μελέτη. Η αξία αυτών των μοντέλων αμφισβητήθηκε και η επιστημονική διαμάχη, σύντομα εξελίχθηκε σε πολεμική. Στην άλλη πλευρά, ο αργεντινός μαθηματικός H. Sussmann, επιτέθηκε στη Θεωρία Καταστροφών για το ότι δεν είχε καμιά αξιόπιστη εφαρμογή με τα δικά του λόγια: "Στα μαθηματικά οι ορισμοί είναι τζάμπα. Επιτρέπεται απολύτως να ονομάσουμε έναν αυτοσυζυγή τελεστή "ελέφαντα" και μια φασματική ανάλυση "προβοσκίδα". Μπορεί τότε να αποδειχθεί ένα θεώρημα, ότι όλοι οι ελέφαντες έχουν προβοσκίδες. Αυτό που δεν επιτρέπεται, είναι να προσποιούμαστε ότι αυτό το αποτέλεσμα έχει οποιαδήποτε σχέση με κάποια μεγάλα γκριζα ζώα".

Πολλά, βέβαια, μπορούν να ειπωθούν σχετικά. Κατ'αρχή, θα πρέπει να θυμόμαστε ότι η Θεωρία Καταστροφών δεν είναι παρά ένα υποκατάστατο μιας καλύτερης θεωρίας, που δεν γεννήθηκε ποτέ: μια τέτοια θεωρία, θα αντιμετώπιζε τη φοβερή δοκιμασία της περιγραφής όλων των δυνατών μεταβάσεων μεταξύ ευσταθών κινήσεων (ανάμεσα σε περιοδικές τροχιές ή παράξενους ελκυστές). Μια τέτοια θεωρία δεν είναι καν ορατή: το μόνο σχετικό που αντιλαμβανόμαστε καλά, είναι το πως ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας, μετατρέπεται σε ευσταθή περιοδική λύση (Διακλάδωση Hopf).

Μια τελευταία παρατήρηση είναι ότι ο χρόνος είναι απών από τη Θεωρία Καταστροφών: οι μαθηματικοί τον θεωρούμε ως μια τετάρτη εξωτερική μεταβλητή (οι τρεις άλλες είναι οι χωρικές συντεταγμένες), ενώ οι φυσικοί και οι βιολόγοι, δεν παρατηρούν απ'ευθείας τετραδιάστατες καταστροφές, αλλά μια διαδοχή, στο χρόνο, τρισδιάστατων καταστροφών.

## 12. ΧΑΟΣ

### 12.1. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ POINCARÉ

Θεωρούμε το αυτόνομο σύστημα

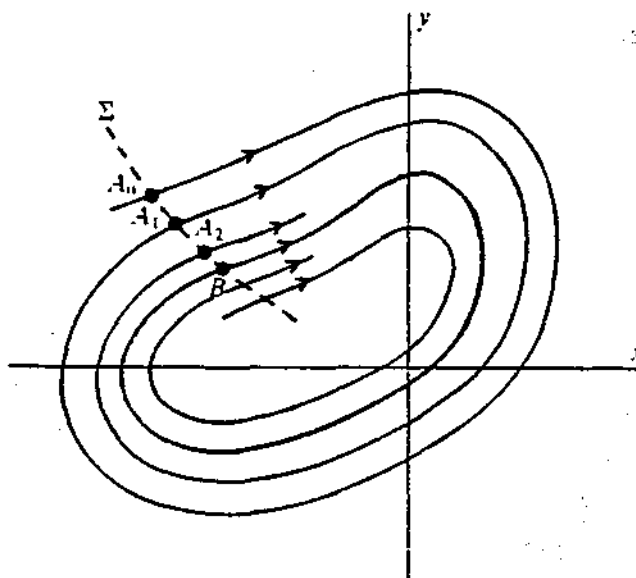
$$x' = F(x,y), y' = G(x,y)$$

και το διάγραμμα φάσεων του στο  $xy$ -επίπεδο. Η λύση του συστήματος αντιστοιχεί σε μια τροχιά, ή ροή, σε κάποιο διδιάστατο χώρο φάσεων. Υπάρχει ένα πολύ φιλόδοξο πρόγραμμα του Poincaré, που αναζητά να καθορίσει τη γενική συμπεριφορά συστημάτων, όπως το παραπάνω, τα οποία έχουν  $n$ -διάστατους χώρους φάσεων, καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Το πρόγραμμα του Poincaré είναι πλήρως λυμένο μόνο για την ειδική περίπτωση συστημάτων στο διδιάστατο χώρο φάσεων. Σε αυτή την περίπτωση, είτε οι λύσεις προσεγγίζουν έναν ευσταθή ελκυστή διάστασης μηδέν (σημείο), ή είναι περιοδικές και προσεγγίζουν έναν οριακό κύκλο διάστασης ένα (κλειστή καμπύλη). Για  $n \geq 3$ , η γενική ασυμπτωτική συμπεριφορά των αυτόνομων συστημάτων δεν είναι γνωστή. Πρόσφατες μελέτες της συμπεριφοράς τέτοιων συστημάτων σε υψηλότερες διαστάσεις, αποκάλυψαν την ύπαρξη μη κενών, πεπερασμένων περιοχών του χώρου φάσεων, οι οποίες δεν περιέχουν σημεία έλξης ή οριακούς κύκλους. Οι ροές τέτοιων αυτόνομων συστημάτων, εισέρχονται σε αυτές τις περιοχές και αποκλίνουν η μια από την άλλη, καλύπτοντας έτσι όλο τον χώρο αυτών των περιοχών, με χαοτικό τρόπο. Τέτοιες περιοχές, υποσύνολα του χώρου φάσεων, λέγοντας παράξενοι ελκυστές, αφού έλκουν κοντινές τροχιές με "παράξενο" (χαοτικό) τρόπο. Η δομή αυτών των συνόλων είναι της μορφής  $M \times C$ , όπου  $M$  μια πολλαπλότητα και  $C$  είτε το σύνολο του Cantor ή γινόμενο συνόλων Cantor. Μια στοιχειώδης απόπειρα εισαγωγής στους παράξενους ελκυστές και τη σχετική χαοτική συμπεριφορά, δίνεται στην §12.2.

Είναι προφανές ότι η πολυπλοκότητα της συμπεριφοράς ενός διδιάστατου αυτόνομου συστήματος, όπως το παραπάνω, μπορεί να ελαττωθεί με το να μελετήσουμε το σύστημα σε μια διάσταση. Μια χρήσιμη τεχνική, που επιτυγχάνει αυτήν ακριβώς τη μείωση, μετατρέποντας -ταυτοχρόνως- τις διαφορικές εξισώσεις σε εξισώσεις διαφορών, ονομάζεται απεικόνιση Poincaré.

Έστω  $\Sigma$  μια καμπύλη ή μονοδιάστατη διατομή του επιπέδου, με την ιδιότητα ότι τέμνει κάθε τροχιά εγκαρσίως, δηλ. δεν εφάπτεται πουθενά σε μια τροχιά. Θεωρούμε ένα σημείο  $A_0: (x_0, y_0)$  επί της διατομής

$\Sigma$ . Ακολουθώντας την τροχιά που διέρχεται από το  $A_0$  κατά τη διεύθυνση ροής, παρατηρούμε ότι τέμνει τη  $\Sigma$  στο σημείο  $A_1: (x_1, y_1)$ . Αυτό το σημείο λέγεται πρώτη επαναφορά ή απεικόνιση Poïncaré του σημείου  $A_0$ . Ένα τέτοιο σημείο δεν υπάρχει κατ'ανάγκη. Συνεχίζοντας επί της τροχιάς, η δεύτερη επαναφορά του  $A_0$  (ή, αλλιώς, η πρώτη επαναφορά του  $A_1$ ), είναι το  $A_2: (x_2, y_2)$ .



Σχήμα 12.1.

Αυτή η διακριτή ακολουθία τομών της τροχιάς με τη  $\Sigma$ , δίνει μία εξίσωση διαφορών που περιγράφει την απεικόνιση της  $\Sigma$  στον εαυτό της. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε την απεικόνιση με έναν τελεστή  $P_\Sigma$ , που για τη συγκεκριμένη διατομή  $\Sigma$  και για κάθε  $(x, y) \in \Sigma$ , είναι

$$(\bar{x}, \bar{y}) := P_\Sigma(x, y)$$

όπου  $(\bar{x}, \bar{y})$  το σημείο πρώτης επαναφοράς της τροχιάς από το  $(x, y)$ . Για τις διαδοχικές επαναφορές που ξεκινούν από το  $(x_0, y_0)$ , έχουμε το συμβολισμό

$$(x_2, y_2) = P_\Sigma(P_\Sigma(x_0, y_0)) = P_\Sigma^2(x_0, y_0)$$

$$(x_n, y_n) = P_\Sigma^n(x_0, y_0)$$



Η χρονική στιγμή έναρξης μιας ακολουθίας δεν είναι σημαντική, αφού το σύστημα είναι αυτόνομο. Γενικώς, η απεικόνιση  $P_{\Sigma}(x,y)$  εκφράζει το χρόνο που χρειάζεται το σημείο  $(x,y)$  για να φθάσει την πρώτη του επαναφορά, ακολουθώντας τη ροή. Εξάλλου, το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών επαναφορών δεν είναι σταθερό.

Το Σχ. 12.1 δείχνει επίσης έναν ευσταθή οριακό κύκλο και σ'αυτήν την περίπτωση οι πρώτες επαναφορές προσεγγίζουν τον οριακό κύκλο. Από το σημείο B του οριακού κύκλου, οι πρώτες επαναφορές απεικονίζονται επί των εαυτών τους. Το σημείο B είναι, δηλαδή, ένα σταθερό σημείο του τελεστή  $P_{\Sigma}$  και η ακολουθία  $A_0, A_1, A_2, \dots$  προσεγγίζει το σταθερό σημείο. Το ίδιο ισχύει για μια ακολουθία πρώτων επαναφορών από το εσωτερικό του οριακού κύκλου. Είναι αναμενόμενο, ότι η τέτοια συμπεριφορά των πρώτων επαναφορών θα εξασφαλίζει ευστάθεια του οριακού κύκλου.

Οι απεικονίσεις Poincaré μπορούν να αποκαλύψουν σημαντικά χαρακτηριστικά ενός συστήματος. Όπως ήδη είδαμε, υπάρχουν περιοδικές λύσεις για αυτόνομα συστήματα, όταν εμφανίζονται σταθερά σημεία. Έτσι, αν -στο Σχ. 12.1- αγνοηθούν οι τροχιές, και ληφθούν υπ'όψη μόνο οι τέλειες της απεικόνισης Poincaré, μπορούμε να πάρουμε χρήσιμες πληροφορίες· αν, π.χ., το αυτόνομο σύστημα παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά, αυτό θα αντικατοπτρίζεται στην ιδιομορφή συμπεριφορά της αντίστοιχης απεικόνισης Poincaré. Στην περίπτωση που αναζητούμε την ύπαρξη κάποιας περιοδικότητας για ένα μη αυτόνομο σύστημα, εργαζόμαστε ως εξής· έστω το (μη αυτόνομο) σύστημα

$$\begin{aligned}x' &= F(x,y,t) \\ y' &= G(x,y,t)\end{aligned}$$

όπου οι  $F$  και  $G$  είναι  $2\pi$ -περιοδικές ως προς  $t$ . Αυτό το σύστημα είναι ισοδύναμο με το αυτόνομο σύστημα

$$\begin{aligned}x' &= F(x,y,z) & y' &= G(x,y,z) \\ z' &= 1 & z(0) &= 0\end{aligned}$$

όπου οι  $F, G$  είναι  $2\pi$ -περιοδικές ως προς  $z^*$ . Σε έναν "τοροειδή" χώρο, για τον οποίο το επίπεδο  $z=2\pi$  έχει καμφθεί ώστε να συμπίπτει με το

---

\* Η κυκλική μεταβλητή  $z(z \in S^1)$  μεταβάλλει το χώρο φάσεων, από  $\mathbb{R}^2$  σε  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ .

$z=0$ , έχουμε εποπτεία και αυτή η κατασκευή μπορεί να παίξει το ρόλο της διατομής για μια απεικόνιση Poincaré. Έτσι, η διατομή  $\Sigma$ , σε αυτή την περίπτωση, μπορεί να γραφεί ως

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 : z=z_0\}$$

για κάποιο  $z_0$ . Είναι έτσι κατανοητό ότι όλες οι λύσεις (τροχιές) τέμνουν τη  $\Sigma$  εγκαρσίως, όπως φαίνεται από τον περιορισμό  $z' = 1$ .

Για περισσότερα σχετικά στοιχεία και παραδείγματα, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [Jor-Smi], που έχει αποτελέσει και τη βάση για την ανάπτυξη όλου αυτού του κεφαλαίου 12.

## 12.2. ΧΑΟΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΞΕΝΟΙ ΕΛΚΥΣΤΕΣ

Προσφάτως, οι αριθμητικές επιλύσεις μη αυτόνομων διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης και αυτόνομων συστημάτων τρίτης τάξης, αποκάλυψαν, απροσδόκητα, ιδιαίτερα περίπλοκες δομές λύσεων σε σχέση με εκείνες που θα περίμενε κανείς από φαινομενικά απλές μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= a(y-x) \\ y' &= bx-y-xy \quad a,b,c: \text{σταθερές} \\ z' &= xy-cz \end{aligned} \quad (12.1)$$

μελετήθηκε από τον Lorenz το 1963, σε σχέση με ένα πρόβλημα κίνησης αερίων μαζών στην ατμόσφαιρα. Οι λύσεις, που υπολογίζονται με τη βοήθεια υπολογιστή, παρουσιάζουν ιδιαίτερα πολύπλοκη συμπεριφορά για ένα ευρύ πεδίο τιμών των παραμέτρων. Με τον όρο "πολύπλοκη συμπεριφορά" εννοούμε τυχαία ή χαοτική έξοδο μέσω του συστήματος, παρ'όλο που οι λύσεις παραμένουν αιτιοκρατικές (ντετερμινιστικές) σε σχέση με τις αρχικές τιμές τους και δεν υπάρχει τυχαία είσοδος.

Μια εξίσωση που δείχνει από τα ενδιαφέροντα αυτά χαρακτηριστικά είναι η εξίσωση Duffing.

$$x'' + kx' - x + x^3 = \Gamma \sin \omega t \quad (12.2)$$

Το αντίστοιχο ( $\Gamma=0$ ) αυτόνομο σύστημα έχει σημεία ισορροπίας στο  $x=0$  (σαγματικό σημείο) και στο  $x=\pm 1$  (ευσταθείς εστίες όταν  $k \in (0, 2\sqrt{2})$ ).

Αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$x = c(t) + a(t)\sigma\omega t + b(t)\eta\mu\omega t \quad (12.3)$$

όπου για τις  $a(t)$  και  $b(t)$  υποτίθεται ότι οι παράγωγοι της δεύτερης τάξης μπορούν να αγνοηθούν. Έτσι, παίρνουμε

$$c'' + kc' = -c(c^2 - 1 + 3/2 r^2) \quad (12.4)$$

$$ka' + 2\omega b' = -a(-1 - \omega^2 + 3c^2 + 3/4 r^2) - k\omega b + \Gamma \quad (12.5)$$

$$-2\omega a' + kb' = -b(-1 - \omega^2 + 3c^2 + 3/4 r^2) + k\omega a \quad (12.6)$$

όπου  $r^2 = a^2 + b^2 \quad (12.7)$

Θέτοντας  $c' = d \quad (12.8)$

μπορούμε να εργασθούμε στον  $(a, b, c, d)$ -χώρο, όπου οι τροχιές ορίζονται από τις (12.5), (12.6), (12.8) και τη νέα γραφή της (12.4)

$$d' = -c(c^2 - 1 + 3/2 r^2) - kd \quad (12.9)$$

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος, που αντιστοιχούν σε σταθερές ταλαντώσεις, βρίσκονται με το να εξισώσουμε τα δεξιά μέλη των (12.5), (12.6), (12.8), (12.9) με το μηδέν.

Από τις έτσι προκύπτουσες σχέσεις, παίρνουμε

$$r^2[(-1 - \omega^2 + 3c^2 + 3/4 r^2) + k^2\omega^2] = \Gamma^2 \quad (12.10)$$

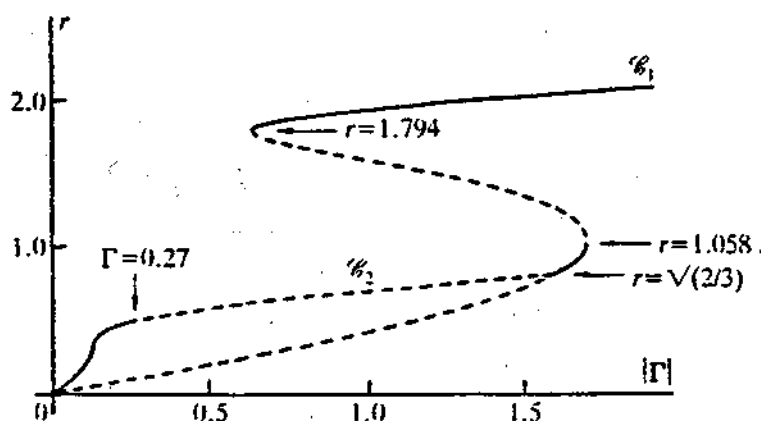
Υπάρχουν δύο σύνολα λύσεων της (12.10)

ΤΥΠΟΣ I:  $c=0$ ,  $r^2[(-1 - \omega^2 + 3/4 r^2) + k^2\omega^2] = \Gamma^2 \quad (12.11)$

ΤΥΠΟΣ II: μόνο για  $r \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$  :

$$c^2 = 1 - 3/2 r^2, \quad r^2[(2 - \omega^2 - 15/4 r^2)^2 + k^2\omega^2] = \Gamma^2 \quad (12.12)$$

Το Σχ. 12.2 δείχνει γραφικές παραστάσεις του  $r$  ως προς  $|\Gamma|$ , με τη χρήση της (12.11): η καμπύλη  $\mathcal{C}_1$ , και της (12.12): η καμπύλη  $\mathcal{C}_2$ . Τα αποτελέσματα έχουν σχεδιαστεί για  $k=0.3$ ,  $\omega=1.2$ . Η επιλογή των τιμών αυτών έγινε για να επιδειχθούν ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες ιδιότητες των λύσεων.



Σχήμα 12.2.

Η συνεχής γραμμή δείχνει πειραματικώς ευσταθείς  $2\pi/\omega$ -περιοδικές λύσεις, ενώ η διακεκομμένη την απουσία τους. Η τιμή  $\Gamma=0.27$  έχει βρεθεί με αριθμητική αναζήτηση.

Μας ενδιαφέρει ποιές από τις λύσεις των (12.10)-(12.12) είναι ευσταθείς. Επανερχόμενοι στη μορφή που δεν περιέχει το  $d$ , θέτοντας  $a=a_0$ ,  $b=b_0$ ,  $c=0$  για τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (12.4), (12.5), (12.6), εισάγοντας τοπικές συντεταγμένες  $a-a_0$  και  $b-b_0$ , και γραμμικοποιώντας, παίρνουμε ότι οι συνθήκες

$$r_0^2 > \frac{2}{3} (1 - \omega^2) \quad (12.13)$$

και

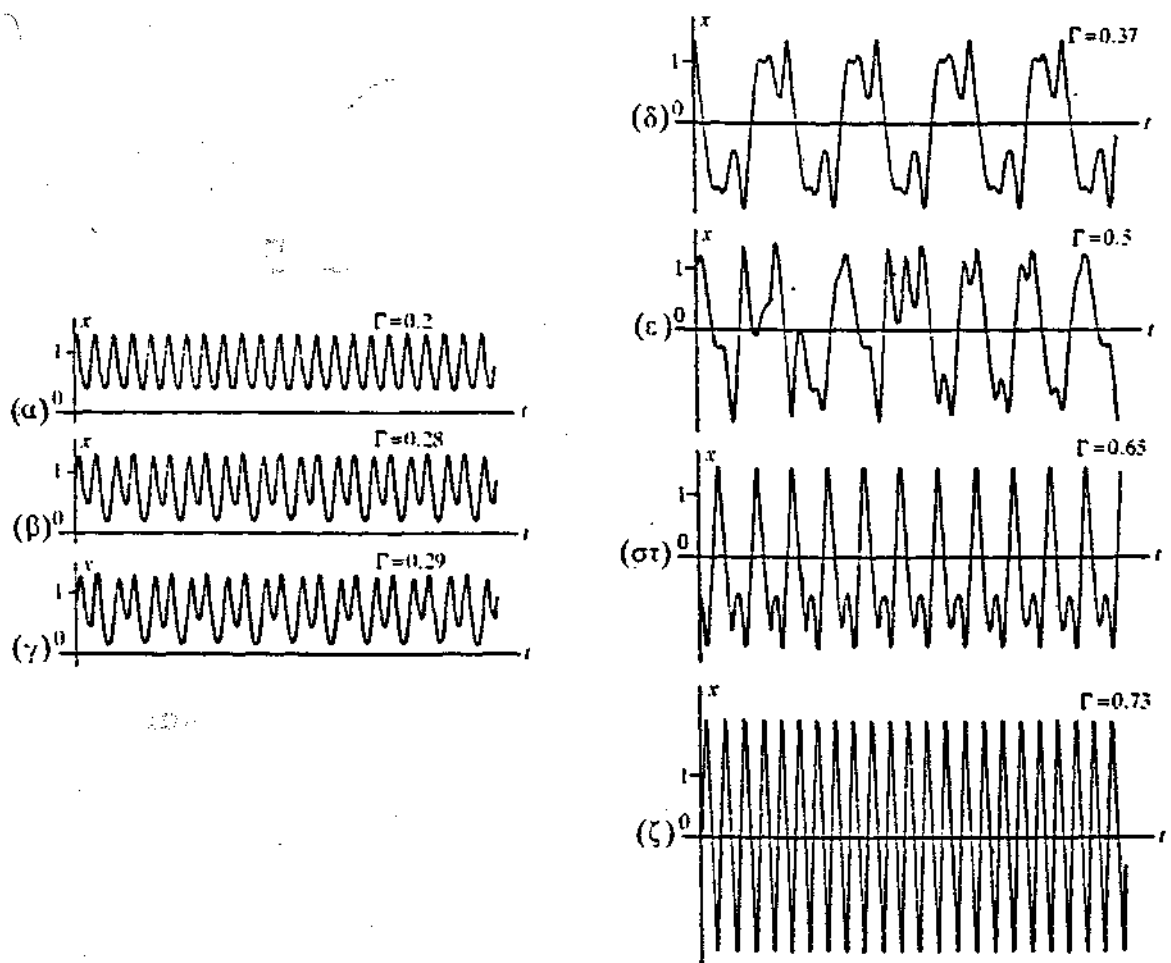
$$27r_0^4 - 48(1 + \omega^2)r_0^2 + 16(1 + \omega^2)^2 + 16k^2\omega^2 > 0 \quad (12.14)$$

είναι ικανές και αναγκαίες για ασυμπτωτική ευστάθεια, για λύσεις Τύπου I.

Για την περίπτωση του Σχ. 12.2 ( $k=0.3$ ,  $\omega=1.2$ ) οι (12.13), (12.14) ικανοποιούνται τότε και μόνον τότε αν

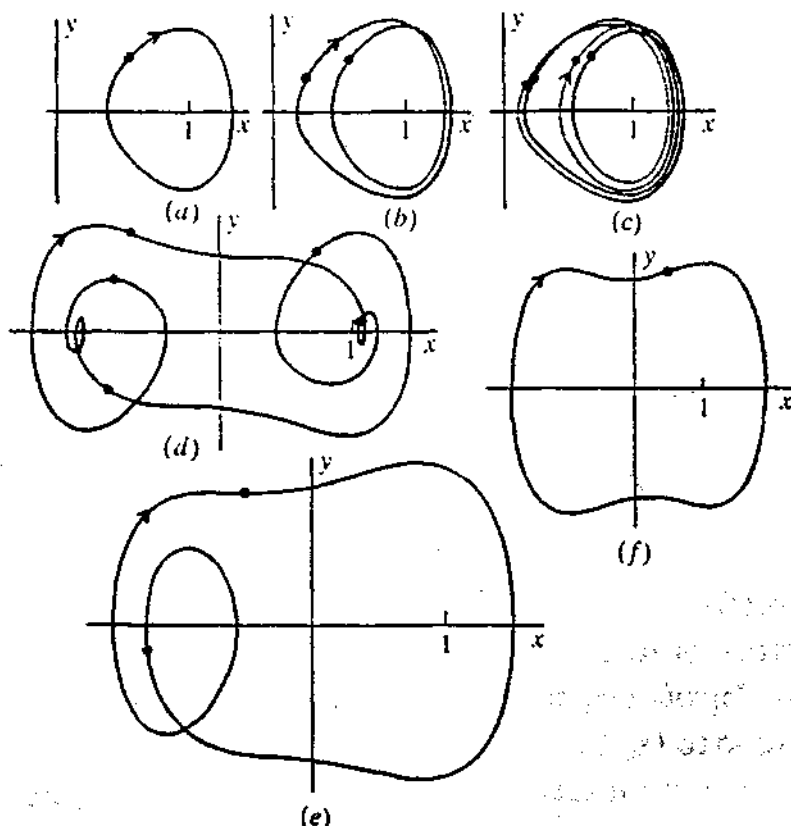
$$r_0 > 1.794 \text{ ή } 0.816 < r_0 < 1.058$$

Οι ακραίες τιμές έχουν σημειωθεί στο Σχ. 12.2. Αυτές οι τιμές εμφανίζονται εκεί που αναστρέφεται η  $(\Gamma, r_0)$ -καμπύλη και αντιστοιχούν σε θέσεις καταστροφών.



Σχήμα 12.3.

Λύσεις της (12.2) με  $k=0.3$ ,  $\omega=1.2$  στις περιπτώσεις (α)  $\Gamma=0.2$  (περίοδος 1), (β)  $\Gamma=0.28$  (περίοδος 2), (γ)  $\Gamma=0.29$  (περίοδος 4), (δ)  $\Gamma=0.37$  (περίοδος 5), (ε)  $\Gamma=0.5$  (χαοτική ανταπόκριση), (στ)  $\Gamma=0.65$  (περίοδος 2), (ζ)  $\Gamma=0.73$  (περίοδος 1).



Σχήμα 12.4.

Μερικές τυπικές περιοδικές λύσεις της (12.2) για  $k=0.3$  και  $\omega=1.2$  έχουν προβληθεί στο  $(x,y)$ -επίπεδο: (α)  $\Gamma=0.2$ , (β)  $\Gamma=0.28$  (περίοδος 2), (γ)  $\Gamma=0.29$  (περίοδος 4), (δ)  $\Gamma=0.37$  (περίοδος 5), (ε)  $\Gamma=0.65$  (περίοδος 2), (ς)  $\Gamma=0.73$  (έχει σχεδιασθεί, με σμίκρυνση, στο μισό μέγεθος).

Για τις λύσεις Τύπου II, μπορεί κανείς να προβλέψει ότι όλες οι λύσεις που αντιστοιχούν στην  $\mathbb{S}_2$  είναι ευσταθείς για τις δεδομένες τιμές των  $k$  και  $\omega$ . Η πραγματική συμπεριφορά είναι, εντούτοις, πολύ πιο πολύπλοκη. Με αριθμητικό υπολογισμό των λύσεων απ'ευθείας από την (12.2) για  $k=0.3$ ,  $\omega=1.2$  και για  $\Gamma$  που κυμαίνεται σε ένα πεδίο τιμών, μπορούμε να δούμε αυτές τις περιπλοκές. Θα ασχοληθούμε με λύσεις που ξεκινούν από το σημείο ισορροπίας  $x=1$ .

Για  $\Gamma \in [0, 0.27)$ , βρίσκουμε  $2\pi/\omega$ -περιοδικές, ευσταθείς, αρμονικές λύσεις όπως προβλέπεται από τη θεωρία.

Όταν, όμως,  $\Gamma > 0.27$ , τα πράγματα διαφοροποιούνται ριζικά. Για  $\Gamma=0.28$ , η λύση είναι ακόμα περιοδική, αλλά έχει γίνει μια ταλάντωση περιόδου 2 (με νέα περίοδο  $4\pi/\omega$ , διπλάσια της αρχικής). Περίπου στο

$\Gamma=0.29$  έχουμε ένα νέο διπλασιασμό περιόδου, που δίνει ταλάντωση περιόδου 4. Αυτός ο διπλασιασμός περιόδου συνεχίζεται για τιμές του  $\Gamma$  μέχρι περίπου το 0.3 (δεν φαίνονται στα σχήματα).

Όταν  $\Gamma \in (0.3, 0.36)$  δεν παρατηρείται καμιά κανονικότητα: λέμε ότι οι λύσεις παρουσιάζουν **χαοτική συμπεριφορά**.

Κοντά στο  $\Gamma=0.37$ , όμως, εμφανίζονται λύσεις περιόδου 5 (αυτές έχουν ως "κέντρο" το  $x=0$ ).

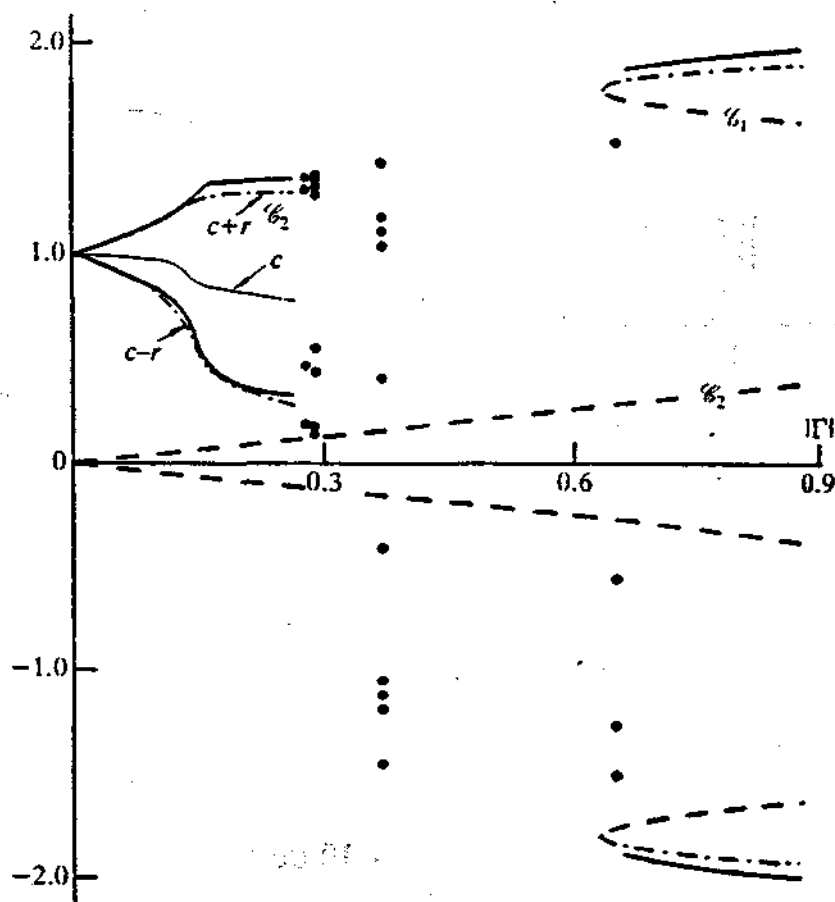
Για  $\Gamma \in (0.37, 0.65)$  εμφανίζεται μια νέα χαοτική περιοχή.

Σε ένα διάστημα δεξιά του  $\Gamma=0.65$  εμφανίζονται και άλλες λύσεις περιόδου 2.

Για  $\Gamma=0.66$ , περίπου, εμφανίζονται ευσταθείς ταλαντώσεις Τύπου I.

Τέλος, το Σχήμα 12.5 μας δίνει μια άλλη οπτική για τις προηγούμενες παρατηρήσεις, αφού σε αυτό εμφανίζονται και οι διακλαδώσεις του πλάτους.

Η αναζήτηση περιοδικής συμπεριφοράς μπορεί να βοηθηθεί με το να σχεδιαστούν οι απεικονίσεις Poincaré που είναι κατάλληλες για την εκάστοτε αναζητούμενη περίοδο. Οι  $2\pi/\omega$ -περιοδικές λύσεις, οδηγούν σε απεικονίσεις -στο  $(x,y)$ -επίπεδο- που έχουν ένα μόνο σταθερό σημείο, οι  $4\pi/\omega$ -περιοδικές σε απεικονίσεις με δύο σταθερά σημεία, κ.ο.κ. (πρβλ. Σχ. 12.4). Αν εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία και στην περίπτωση χαοτικής συμπεριφοράς, έστω  $\Gamma=0.5$ , παρατηρούμε ότι υπάρχει τελικώς κάποια υποκείμενη δομή. Το Σχ. 12.6 δείχνει μια απεικόνιση Poincaré για αυτή την περίπτωση. Η διατομή που παρουσιάζεται είναι γαι  $t=2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Σε αυτήν την χαοτική περιοχή δεν εμφανίζονται σταθερά σημεία· αντιθέτως, ολόκληρο το εμφανιζόμενο σύνολο παίζει έναν τέτοιο ρόλο: έχει την ιδιότητα αν κάποιο σημείο βρεθεί μια φορά εντός του συνόλου, τότε παράγει μια ακολουθία πρώτων επαναφορών που βρίσκεται ολόκληρη εντός του συνόλου. Ένα τέτοιο σύνολο χαρακτηρίζεται ως παράξενος ελκυστής. Αφού η απεικόνιση Poincaré δίνει το χρόνο μεταξύ διαδοχικών επαναφορών, παρατηρούμε ότι αν ένα σημείο εισέλθει στον παράξενο ελκυστή, τότε θα παραμείνει εκεί για άπειρο χρόνο (δεν θα εξέλθει ποτέ).



Σχήμα 12.5.

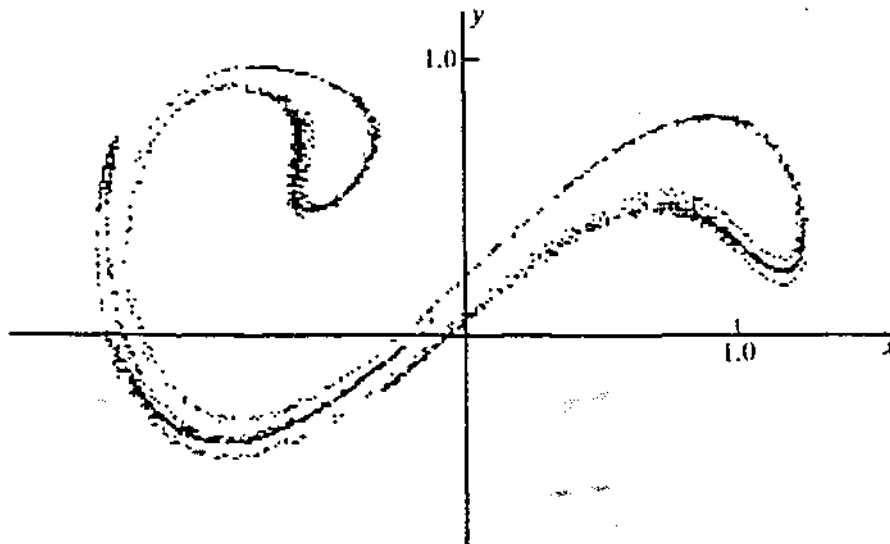
Η  $\mathcal{G}_1$  αντιστοιχεί σε λύσεις Τύπου I και η  $\mathcal{G}_2$  σε λύσεις Τύπου II.

- - - : προβλεπόμενο ευσταθές πλάτος | — : απευθείας υπολογισμένο πλάτος  
 - · - · : προβλεπόμενο ασταθές πλάτος | ● : τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα

Το σχήμα του παράξενου ελκυστή εξαρτάται από την επιλογή της διατομής: οι πρώτες επαναφορές για τη διατομή  $t = (2n+1)\pi$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , π.χ., δίνουν ένα διαφορετικό σχήμα στο επίπεδο. Όσο για τις λύσεις στον  $(x,y,t)$ -χώρο, αυτές παραμένουν σε έναν περιοδικώς επαναλαμβανόμενο σωλήνα, που η διατομή του, για  $t=0$ , έχει το σχήμα του Σχ. 12.6.

Έχουν αναπτυχθεί διάφορες θεωρίες, προσφάτως, για την ερμηνεία της εμφάνισης παράξενων ελκυστών. Στο παράδειγμα μας, οφείλεται στην "εισβολή" της ευσταθούς περιοδικής λύσης στην περιοχή ασταθών ταλαντώσεων. Περισσότερα θα δούμε στην ενότητα που ακολουθεί.





Σχήμα 12.6.

### 12.3. ΟΜΟΚΛΙΝΗΣ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗ

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση

$$x'' + x' - 2x = 10 \text{ συν} t \quad (12.15)$$

Οι  $2\pi$ -πρώτες επαναφορές επί της διατομής  $\Sigma: t=0$ , για τυχούσα αρχική κατάσταση μπορούν να βρεθούν (πρβλ. σελ. 136) με το να γραφεί η (12.15) ως

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= 2x - y + 10 \text{ συν} z \\ z' &= 1, \quad z(0) = 0 \end{aligned} \quad (12.16)$$

και έτσι οι ακολουθίες των πρώτων επαναφορών, εμφανίζονται ως ακολουθίες σημείων στο επίπεδο  $z=0$ . Αν  $x(0)=x_0$ ,  $y(0)=y_0$ , τότε οι πρώτες επαναφορές από το  $(x_0, y_0)$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
 x_n &= \frac{1}{3} (2x_0 + y_0 + 5)e^{2n\pi} + \frac{1}{3} (x_0 - y_0 + 4)e^{-4n\pi} - 3 \\
 y_n &= \frac{1}{3} (2x_0 + y_0 + 5)e^{2n\pi} - \frac{2}{3} (x_0 - y_0 + 4)e^{-4n\pi} + 1
 \end{aligned}
 \tag{12.17}$$

και, ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (-3, 1)$$

Το (3-1) είναι σταθερό σημείο· χαρακτηρίζεται ως ασταθές, αφού υπάρχουν σημεία σε μια περιοχή του, από τα οποία το σύνολο των διαδοχικών επαναφορών δεν τείνει προς το σταθερό σημείο.

Με το σταθερό σημείο συσχετίζουμε δύο σύνολα: το πρώτο, είναι το σύνολο εκείνο που έχει την ιδιότητα ότι οι πρώτες επαναφορές όλων των σημείων του τείνουν στο σταθερό σημείο καθώς  $t \rightarrow \infty$ . αυτό το σύνολο λέγεται ευσταθής πολλαπλότητα και στο παράδειγμα μας συνίσταται στην ευθεία γραμμή

$$2x_0 + y_0 + 5 = 0$$

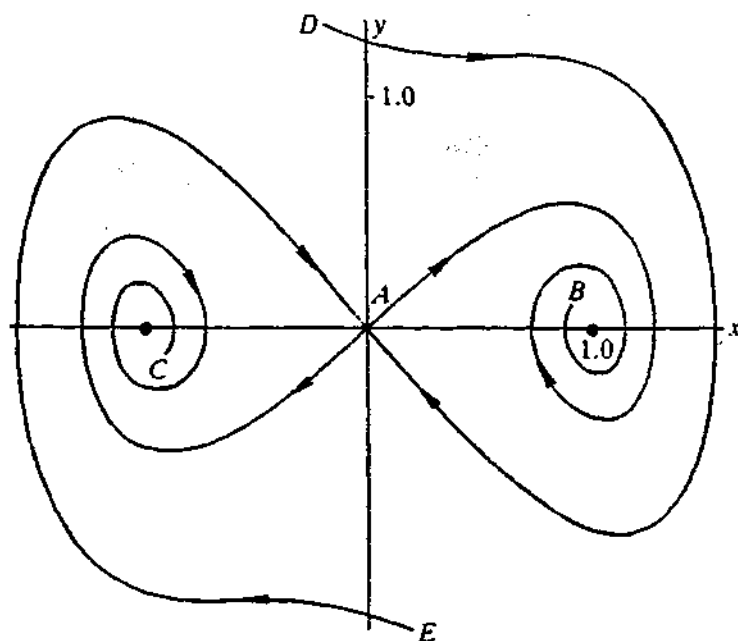
Το δεύτερο σύνολο ορίζεται όπως προηγουμένως με τη διαφορά ότι θεωρούμε  $t \rightarrow -\infty$ , λέγεται ασταθής πολλαπλότητα και στο παράδειγμα μας δίνεται από την

$$x_0 - y_0 + 4 = 0$$

Αυτές οι καμπύλες είναι ανάλογες με τις διαχωρίζουσες ενός σαγματικού σημείου στο επίπεδο για ένα αυτόνομο σύστημα.

Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε τις αντίστοιχες πολλαπλότητες για το ασταθές σταθερό σημείο της εξίσωσης Duffing (12.2).

Για μικρό  $\Gamma$  αναμένουμε την ύπαρξη και ευσταθούς και ασταθούς πολλαπλότητας, αφού, όταν  $\Gamma=0$ , αυτές οι καμπύλες ανάγονται στις διαχωρίζουσες του σαγματικού σημείου στο διάγραμμα φάσεων. Στο Σχ. 12.7 έχουν σχεδιαστεί για την περίπτωση  $\Gamma=0$ ,  $k=0.3$ ,  $\omega=1.2$ : το A είναι το σταθερό σημείο, οι DA και EA είναι οι ευσταθείς πολλαπλότητες, ενώ οι AB και AC οι ασταθείς πολλαπλότητες.



Σχήμα 12.7.

Οι αντίστοιχες πολλαπλότητες έχουν επίσης σχεδιασθεί για τις περιπτώσεις  $\Gamma=0.2$ ,  $k=0.3$ ,  $\omega=1.2$  (Σχ. 12.8 (α)),  $\Gamma=0.28$ ,  $k=0.3$ ,  $\omega=1.2$  (Σχ. 12.8 (β)) και  $\Gamma=0.5$ ,  $k=0.3$ ,  $\omega=1.2$  (Σχ. 12.8 (γ)).

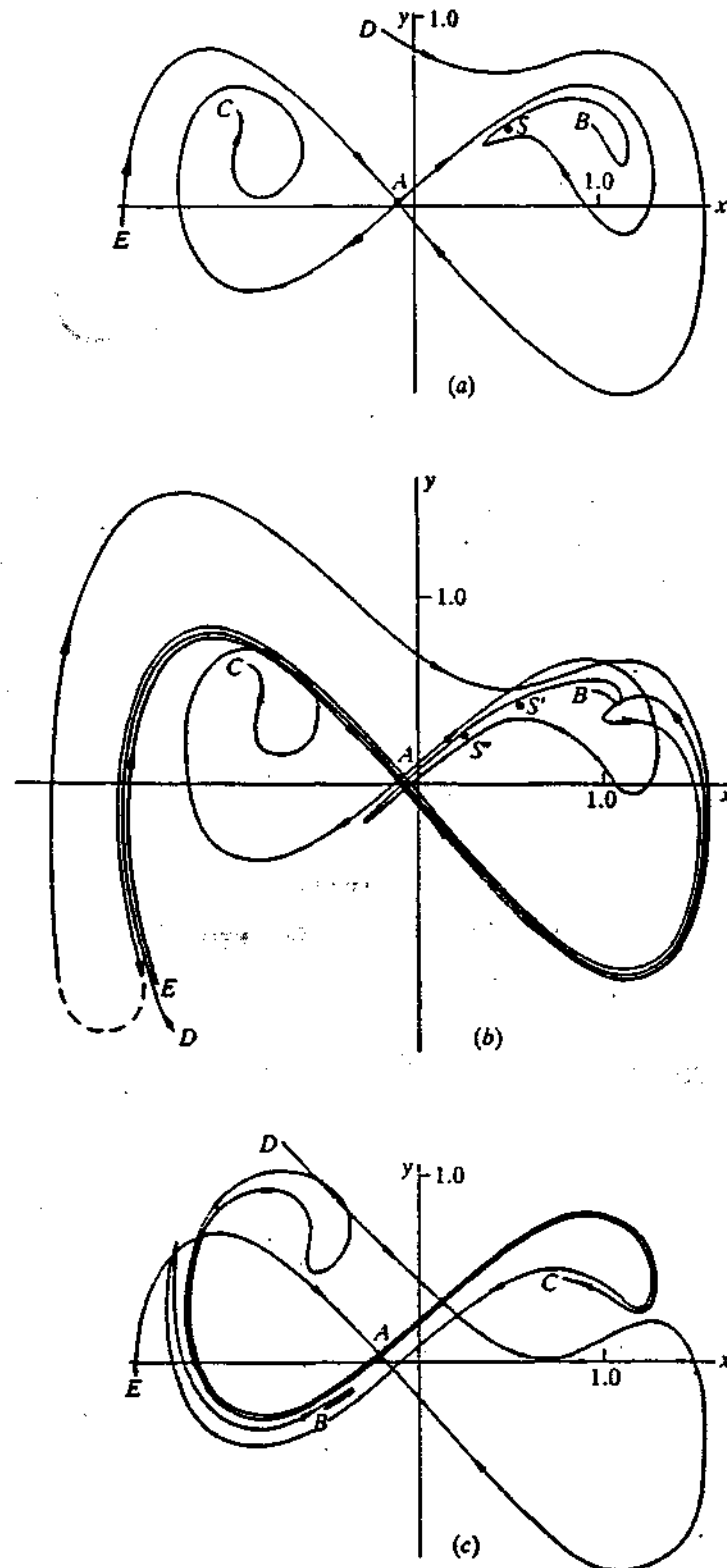
Στην περίπτωση που  $\Gamma=0$  (Σχ. 12.7) οι ασταθείς πολλαπλότητες προσεγγίζουν σημεία ισορροπίας. Στην περίπτωση που  $\Gamma=0.2$  (Σχ. 12.8 (α)), οι ασταθείς πολλαπλότητες AB και AC προσεγγίζουν σταθερά σημεία επί των ευσταθών περιοδικών λύσεων: το σταθερό σημείο S αντιστοιχεί στην ταλάντωση του Σχ. 12.4 (α).

Στην περίπτωση του  $\Gamma=0.28$ , οι ασταθείς πολλαπλότητες προσεγγίζουν την ευσταθή υφαρμονική που παριστάνεται με τα  $S'$ ,  $S''$  και που αντιστοιχεί στην ταλάντωση του Σχ. 12.4 (β).

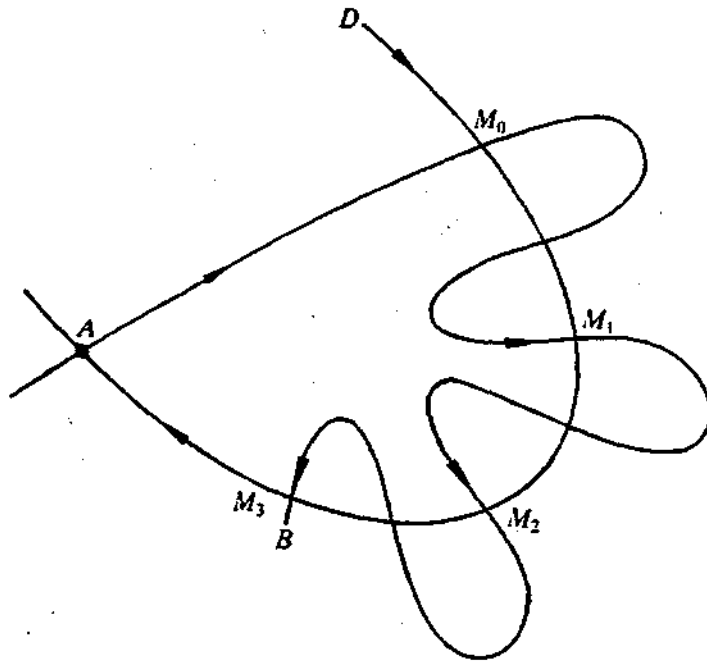
Οι ασταθείς πολλαπλότητες σχεδιάζονται ως εξής: εντοπίζουμε αρχικά το σταθερό σημείο A και τις διευθύνσεις των ασταθών πολλαπλοτήτων στο A και στη συνέχεια θεωρούμε διαδοχικές πρώτες επαναφορές από διαδοχικές αρχικές τιμές επί ενός μικρού διαστήματος των ασταθών πολλαπλοτήτων κοντά στο A. Οι ευσταθείς πολλαπλότητες ευρίσκονται παρομοίως, με το να "αντιστρέψουμε" το χρόνο.

Πολλαπλότητες που προέρχονται από το ίδιο σταθερό σημείο λέγονται ομοκλινείς. Όταν  $\Gamma=0.2$  (Σχ. 12.8 (α)), οι ομοκλινείς πολλαπλότητες δεν τέμνονται. Για  $\Gamma=0.28$  (Σχ. 12.8(β)) οι AB και DA,

καθώς και οι AC και EA τέμνονται. Αυτές οι ομοκλινείς τομές έχουν σημαντικές συνέπειες για τις λύσεις της εξίσωσης Duffing.



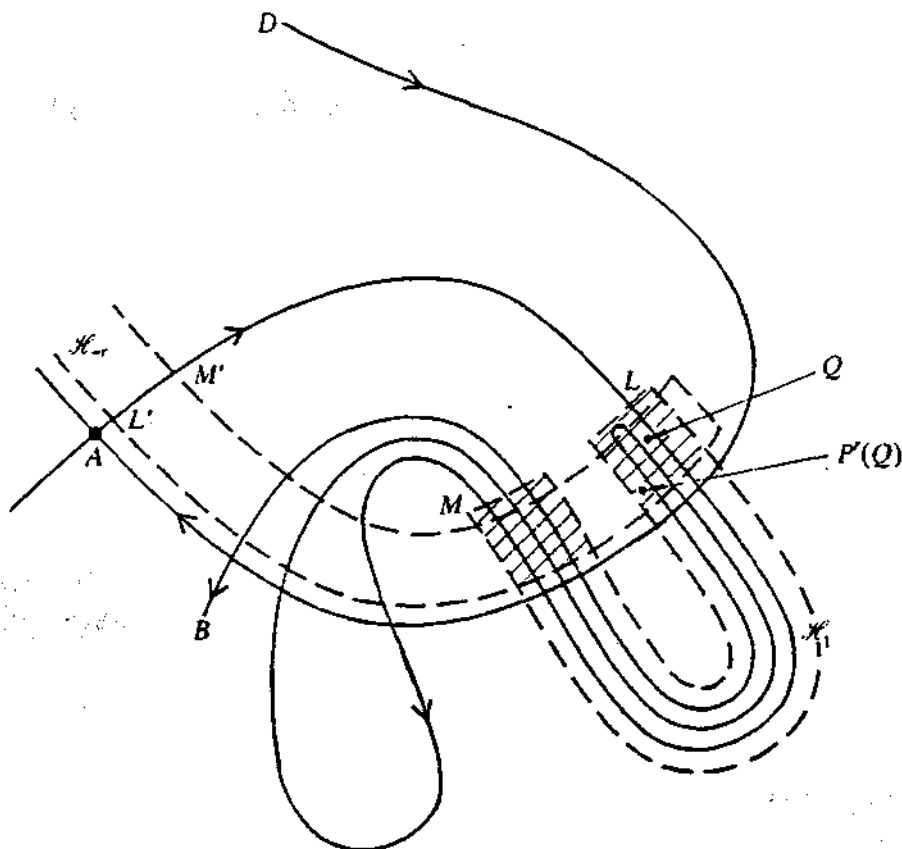
Σχήμα 12.8.



Σχήμα 12.9.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση ομόκλινους τομής που αναπαριστάται στο Σχ. 12.9. Έστω ότι η πρώτη τομή συμβαίνει στο  $M_0$  και έστω  $M_1$  η πρώτη επαναφορά του  $M_0$  επί της  $AD$ . Λόγω του μονοσήμαντου των λύσεων η πρώτη επαναφορά του  $M_0$  επί της  $AB$  θα είναι επίσης το  $M_1$ . Αυτές οι τομές διατηρούν τον προσανατολισμό, υπό την έννοια ότι η  $AB$  τέμνει την  $DA$  υπό την ίδια διεύθυνση στο  $M_0$  και στο  $M_1$ . Ως εκ τούτου, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ακόμα σημείο τομής, μεταξύ  $M_0$  και  $M_1$  και κατ'επέκταση, οι πολλαπλότητες θα τέμνονται στις πρώτες επαναφορές  $M_2, M_3, \dots$ . Αφού το σταθερό σημείο προσεγγίζεται ασυμπτωτικά, θα υπάρχει μια απειρία τόμων της  $AB$  με την  $DA$  και καθώς η ασταθής πολλαπλότητα θα τέμνει συνεχώς την ευσταθή πολλαπλότητα, δεν θα μπορεί να προσεγγίσει κανένα άλλο σταθερό σημείο: έτσι, θα πρέπει να παρουσιαστεί μια διακλάδωση για κάποια τιμή του  $\Gamma$ . Αυτή η διακλάδωση λέγεται ομοκλινής, και συμβαίνει εκεί όπου πρωτοεφάπτονται ομοκλινώς οι πολλαπλότητες· περίπου για  $\Gamma=0.26$ . Κάθε επαφή μεταξύ των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων, εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας λύσης της διαφορικής εξίσωσης που διέρχεται από αυτό το σημείο επαφής (ή τομής) και που τείνει στην ασταθή περιοδική λύση όταν  $t \rightarrow \infty$  καθώς και όταν  $t \rightarrow -\infty$ .

Στο Σχ. 12.8 (c) έχουν σχεδιαστεί οι πολλαπλότητες όταν  $\Gamma=0.5$ . Σε αυτή την περίπτωση η πολυπλοκότητα αυξάνει προφανώς αφού η AC τέμνει και την DA και την EA. Μια ιδέα για το τι συμβαίνει μπορεί να δοθεί περιγραφικά ως εξής:



Σχήμα 12.10.

Θεωρούμε ένα τμήμα μεταξύ των σημείων L και M επί της ασταθούς πολλαπλότητας AB. Τα L και M έχουν έτσι επιλεγεί, ώστε να βρίσκονται στην ίδια πλευρά της AD. Έστω  $\mathfrak{R}_0$  ένα σύνολο αρχικών σημείων που βρίσκονται κοντά στο LM, όπως φαίνεται στο Σχ. 12.10, υπό τη μορφή ενός πετάλου, που τέμνεται δύο φορές από την ευσταθή πολλαπλότητα AD. Θεωρούμε τώρα απεικονίσεις του πετάλου μέσω της P:

$$P(\mathfrak{R}_0) = \mathfrak{R}_1, P^2(\mathfrak{R}_0) = \mathfrak{R}_2, P^3(\mathfrak{R}_0) = \mathfrak{R}_3, \dots$$

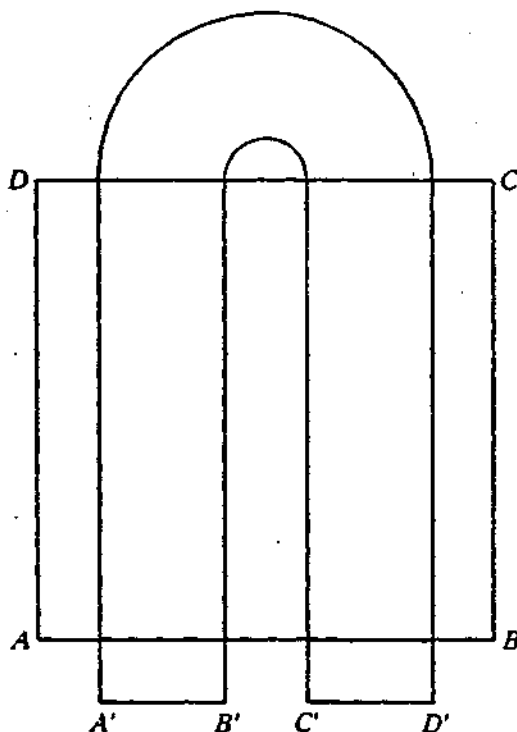
$$P^{-1}(\mathfrak{R}_0) = \mathfrak{R}_{-1}, P^{-2}(\mathfrak{R}_0) = \mathfrak{R}_{-2}, \dots$$

Από το σαγματικό χαρακτήρα του σταθερού σημείου  $A$ , έπεται ότι για κάποια τιμή  $r$ , το σύνολο  $\mathfrak{X}_r$  θα αποτελείται από σημεία που θα βρίσκονται σε μια στενή λωρίδα που τέμνει το πέταλο όπως στο Σχ. 12.10· οι τομές έχουν γραμμοσκιασθεί. Έστω  $Q \in \mathfrak{X}_r \cap \mathfrak{X}_0$ , τυχόν σημείο. Τότε  $P^r(Q) \in \mathfrak{X}_r \cap \mathfrak{X}_0$ . Το  $\mathfrak{X}_0$  και  $\mathfrak{X}_r$  τέμνονται, πράγμα που σημαίνει ότι έχουμε μια παραμόρφωση του πεταλοειδούς σχήματος. Ο βρόχος της ασταθούς πολλαπλότητας που περιέχεται στο  $\mathfrak{X}_r$  μεταφέρεται μαζί της σε μια περιοχή του  $LM$ : το είδος της αναμενόμενης εικόνας, έχει σχεδιαστεί για  $r=1$  στο Σχ. 12.10. Αν, επιπλέον,  $P^r(Q) \in \mathfrak{X}_r$ , τότε  $P^{2r}(Q) \in \mathfrak{X}_0$  και έτσι εμφανίζεται ένας ακόμα βρόχος. Δεν αποκλείεται ακόμα, να συμβεί  $P^r(Q) = Q$ , πράγμα που θα σημαίνει ότι υπάρχουν  $r$ -περιοδικές λύσεις.

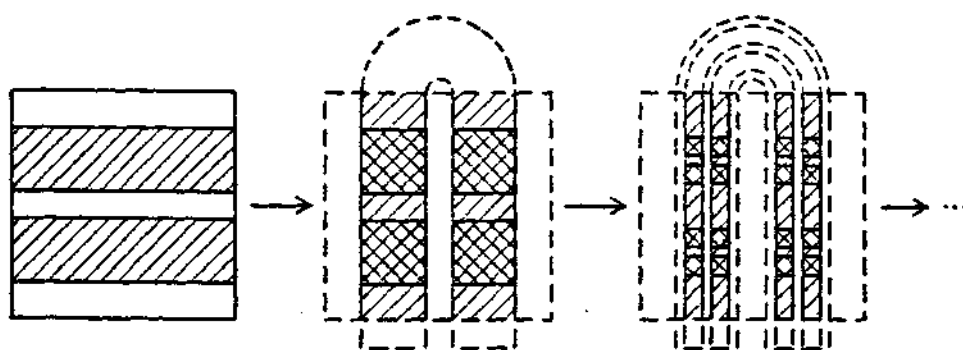
Καθώς το  $\Gamma$  αυξάνεται πέρα από την τιμή 0.28, τα σταθερά σημεία των λύσεων διπλασιασμού περιόδου είναι οριακά σημεία για αρχικές τιμές που δεν βρίσκονται ούτε επί των ασταθών, ούτε επί των ευσταθών πολλαπλοτήτων. Η αυξανόμενη πολυπλοκότητα και των δύο κλάδων της ασταθούς πολλαπλότητας, σημαίνει ότι οι πρώτες επαναφορές λύσεων της διαφορικής εξίσωσης "παγιδεύονται" ταχέως από τις συστροφές της ασταθούς πολλαπλότητας και στη συνέχεια προσεγγίζουν ένα οριακό σύνολο που βρίσκεται επί της ασταθούς πολλαπλότητας του  $A$  (πρβλ. Σχ. 12.6 για  $\Gamma=0.5$ ). Αυτή είναι η κατάσταση σε κάθε χαοτική περιοχή, όπου το οριακό σύνολο είναι ένας παράξενος ελκυστής.

Υπάρχουν ακόμα διαστήματα τιμών του  $\Gamma$ , όπου -μέσα στη χαοτική περιοχή- μοιάζει να επανεμφανίζεται τάξη (πρβλ. Σχ. 12.4 (d)). Οι λεπτομέρειες του μηχανισμού που δημιουργεί τον παράξενο ελκυστή για την εξίσωση Duffing είναι δύσκολο να περιγραφούν. Όμως ένα ανάλογο φαινόμενο παρουσιάζεται σε πολλές καταστάσεις και η ουσία του μπορεί να περιγραφεί με την ανάλυση των συνεπειών της επαναληπτικής διαδικασίας επί του πετάλου και να αποδειχθεί ότι υπάρχει, πράγματι, ένα σύνολο σημείων με την ιδιότητα της έλξης: υποθέτουμε για λόγους απλότητας, ότι η ομοκλής διακλάδωση προκαλεί την απεικόνιση ενός τετραγώνου  $ABCD$  (Σχ. 12.11) σε ένα πέταλο  $A'B'C'D'$ , μέσω του τελεστή  $P$  των πρώτων επαναφορών (θεωρούμε ότι  $\Gamma=1$ ). Η διαδικασία είναι η εξής: το τετράγωνο τεντώνεται στην διεύθυνση  $AB$ , συμπιέζεται στην διεύθυνση  $A'B'$ , στρέφεται κατά  $180^\circ$  και επανατοποθετείται επί του τετραγώνου.

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για εκείνα τα σημεία που βρίσκονται εντός του τετραγώνου: στο Σχ. 12.12 έχουν σχεδιαστεί οι δύο πρώτες επαναλήψεις. Οι οριζόντιες γραμμοσκιασμένες λωρίδες έχουν



Σχήμα 12.11.



Σχήμα 12.12.

έτσι επιλεγεί ώστε να απεικονίζονται επί των κατακόρυφων τμημάτων του πετάλου. Αυτές οι δύο κατακόρυφες λωρίδες, απεικονίζονται επί του ζεύγους των λεπτότερων πετάλων. Σε κάθε βήμα, ενδιαφερόμαστε για εκείνα τα τμήματα των απεικονιζόμενων τμημάτων που είναι κοινά για τα τμήματα από τα οποία έχει γίνει η απεικόνιση: τα δύο πρώτα βήματα με την χιαστί γραμμοσκίαση, έχουν σχεδιαστεί στο Σχ. 12.12. Μετά τις δύο πρώτες επαναλήψεις έχουν απομείνει σημεία σε 16 τετράγωνα, μετά από τρεις σε 64 κ.ο.κ.



Το οριακό σύνολο, που καθώς το πλήθος των επαναλήψεων τείνει στο άπειρο, είναι ένα μη αριθμήσιμο σύνολο με δομή πολύ ανάλογη, αλλά 2-διάστατη, με εκείνη του γνωστού Συνόλου Cantor.

Μια εκτενής μελέτη ομοκλινών διακλαδώσεων και απεικονίσεων πετάλου μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο:

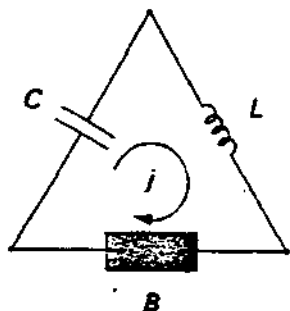
- I. Guckenheimer - P. Holmes: *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, Springer, 1983.

## 13. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

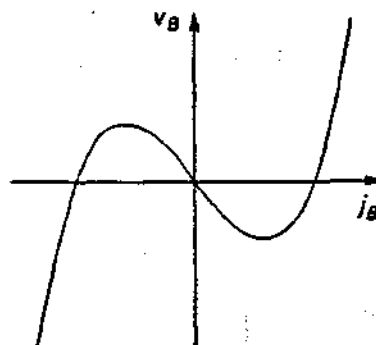
### 13.1. Ο ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ VAN DER POL

Ας θεωρήσουμε το κύκλωμα του Σχ. 13.1, που αποτελείται από έναν πυκνωτή χωρητικότητας  $C$ , ένα πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής  $L$  και ένα "μαύρο κουτί"  $B$  που είναι ένα στοιχείο (ή ένα σύνολο στοιχείων) του κυκλώματος με σχέση ρεύματος-δυναμικού όπως αυτή του Σχ. 13.2. Το μαύρο αυτό κουτί λέγεται μη γραμμική αντίσταση με κυβική χαρακτηριστική

$$v_B = f(i_B) = j_B \left( \frac{1}{3} j_B^2 - 1 \right) \quad (13.1)$$



Σχήμα 13.1.



Σχήμα 13.2.

Έστω  $v_L$ ,  $v_B$  και  $-v_C$  οι διαφορές δυναμικού κατά μήκος των στοιχείων του κυκλώματος κατά τη διεύθυνση του ρεύματος  $j$ . Από το δεύτερο νόμο του Kirchhoff (το αλγεβρικό άθροισμα των ηλεκτρεγερτικών δυνάμεων σε ένα κλειστό κύκλωμα ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των γινομένων  $jR$  στο κύκλωμα) έχουμε

$$v_L + v_B - v_C = 0$$

που μας δίνει τις δυναμικές εξισώσεις

$$L \frac{dj}{dt} = v_C - f(j), \quad C \frac{dv_C}{dt} = -j \quad (13.2)$$

αφού

$$v_L = \frac{dj}{dt}, \quad v_B = f(j) \quad \text{και} \quad v_C = -\frac{Q}{C}, \quad j = \frac{dQ}{dt}$$

Κάνοντας το μετασχηματισμό

$$\frac{t}{L} \rightarrow t \quad j \rightarrow x_1 \quad v_C \rightarrow x_2 \quad \frac{L}{C} \rightarrow \eta$$

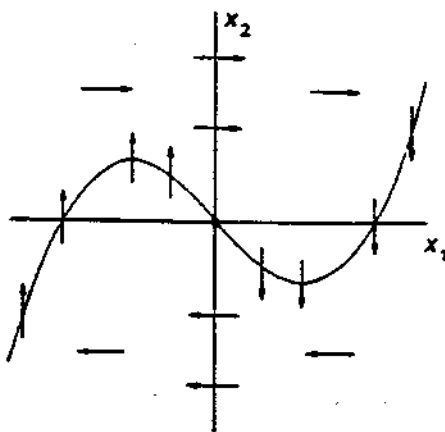
παίρνουμε το σύστημα

$$x_1' = x_2 - f(x_1)$$

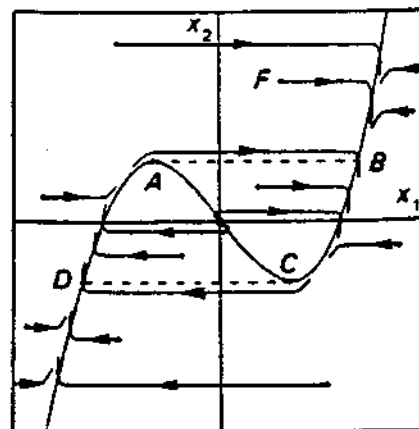
$$x_2' = -\eta x_2 \quad (13.3)$$

που έχει σημείο ισορροπίας για  $x_1 = x_2 = 0$ .

Οι ισοκλινείς του συστήματος έχουν σχεδιασθεί στο Σχ. 13.3.



Σχήμα 13.3.



Σχήμα 13.4.

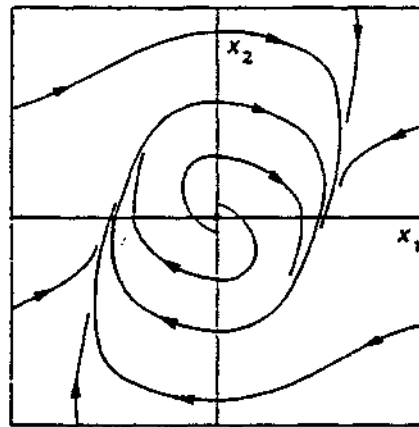
Έστω ότι το  $L$  συγκρινόμενο με το  $C$  (δηλ. το  $\eta$ ) είναι τόσο μικρό, ώστε η  $x_2$  μπορεί να αγνοηθεί σε σχέση με την  $x_1'$  σε όλα τα

σημεία του επιπέδου φάσεων που δεν βρίσκονται σε μια μικρή περιοχή της ισοκλινούς  $x_1' = 0$ . Αυτό σημαίνει ότι το διανυσματικό πεδίο  $(x_2 - f(x_1), -\eta x_1)$  έχει ουσιαστικά την οριζόντια διεύθυνση στο Σχ. 13.3, εκτός από τα σημεία που βρίσκονται κοντά στην καμπύλη

$$x_2 = f(x_1) = \frac{x_1^3}{3} - x_1 \quad (13.4)$$

Το διάγραμμα φάσεων θα πρέπει, λοιπόν, να είναι όπως στο Σχ. 13.4, με έναν οριακό κύκλο ABCD.

Το σύστημα (4.3) δεν έχει οριακό κύκλο μόνο όταν  $\eta \rightarrow 0$ . Για παράδειγμα, όταν  $\eta = 1$ , το (4.3) είναι μια ειδική περίπτωση της εξίσωσης Van der Pol (9.14) σελ. 100, με  $\varepsilon = 1$ . Ως γνωστό η εξίσωση Van der Pol έχει έναν ακριβώς ευσταθή οριακό κύκλο για κάθε  $\varepsilon$ . Όταν  $\varepsilon \rightarrow \infty$  αυτός ο οριακός κύκλος παίρνει τη μορφή του Σχ. 13.4. Όταν  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ο οριακός κύκλος γίνεται σχεδόν κύκλος με ακτίνα ίση με 2. Καθώς το  $\varepsilon$  αυξάνει από το 0, ο οριακός κύκλος μετασχηματίζεται κατά λείο τρόπο από τη μια αυτή ακραία μορφή στην άλλη: Σχ. 13.5.



Σχήμα 13.5.

## 13.2. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ VOLTERRA-LOTKA

Αυτό είναι απλό μοντέλο ενός προβλήματος "θηράματος-θηρευτή": ας υποθέσουμε ότι ο ανθρώπινος πληθυσμός ενός νησιού τρέφεται μόνο με ψάρια και ότι δεν αναπτύσσονται νέες μέθοδοι αλιείας καθώς μεταβάλλεται ο ιχθυοπληθυσμός. Έστω  $x(t)$ ,  $y(t)$  ο ιχθυοπληθυσμός και ο ανθρώπινος πληθυσμός, αντιστοίχως, στο χρόνο  $t$ . Υποθέτουμε ότι -αν

αφεθούν ανενόχλητα- τα ψάρια αυξάνονται με εκθετικό τρόπο, και ότι -υπό την απουσία ψαριών- ο ρυθμός λιμοκτονίας του ανθρώπινου πληθυσμού είναι μεγαλύτερος από το ρυθμό γεννήσεων και έτσι ο πληθυσμός φθίνει εκθετικά. Το πλήθος των ψαριών που καταναλώνονται, εξαρτάται από τη συχνότητα συνάντησης τους με τους ανθρώπους· αν υποθέσουμε πως, όταν συναντώνται, υπάρχει μια σταθερή πιθανότητα ότι οι άνθρωποι θα πιάσουν ένα ψάρι και ότι ο χρόνος που απαιτείται για να φαγωθεί το ψάρι είναι αμελητέος, τότε έχουμε

$$x' = \alpha x - \beta xy \quad (13.5)$$

$$y' = -\gamma y + \delta xy \quad (13.6)$$

όπου  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  είναι θετικές σταθερές. Μας ενδιαφέρουν μόνο λύσεις με  $x \geq 0, y \geq 0$ . Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος είναι

$$x = 0, y = 0 \quad \text{και} \quad x = \frac{\gamma}{\delta}, y = \frac{\alpha}{\beta}$$

Γραμμικοποίηση περί το  $(0,0)$  οδηγεί στο σύστημα

$$\begin{aligned} \xi' &= \alpha \xi \\ \eta' &= -\gamma \eta \end{aligned} \quad (13.7)$$

που δείχνει ότι το  $(0,0)$  είναι σαγματικό σημείο. Αντίστοιχα, γραμμικο-

ποίηση περί το  $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$  οδηγεί στο σύστημα

$$\xi' = -\beta \frac{\gamma}{\delta} \eta$$

$$\eta' = \frac{\delta \alpha}{\beta} \xi$$

δειχνοντας ότι το  $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$  είναι κέντρο.

Όταν, εξάλλου,  $x = \frac{\gamma}{\delta}$ , η (13.5) μας λέει ότι η  $x'$  είναι θετική

και η  $x$  είναι αύξουσα για  $y < \frac{\alpha}{\beta}$ . Οι τροχιές, συνεπώς, έχουν τη δομή του Σχ. 13.6.

Οι ακριβείς εξισώσεις των τροχιών προκύπτουν με το να παρατηρήσουμε ότι

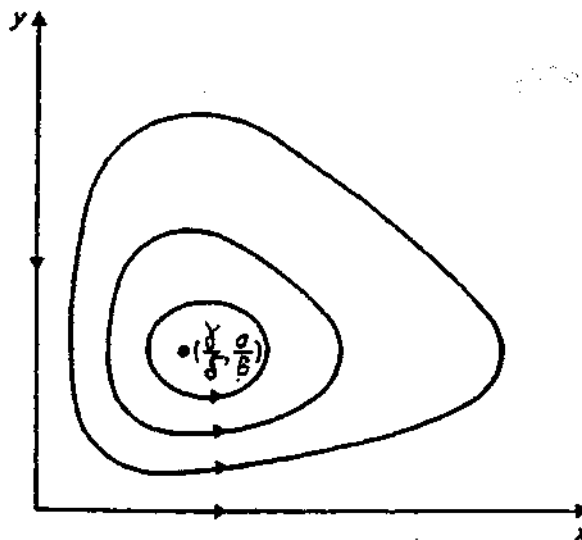
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\delta x - \gamma)y}{(\alpha - \beta y)x} \quad (13.9)$$

που είναι μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, χωριζομένων μεταβλητών, με λύση

$$\alpha \ln y - \beta y + \gamma \ln x - \delta x = \sigma, \text{ σισταθ.} \quad (13.10)$$

Το αριστερό μέλος της (13.10) έχει ελάχιστο στο  $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$  και

έτσι οι καμπύλες (13.10) πρέπει να είναι κλειστές καμπύλες στην περιοχή αυτού του σημείου, πράγμα που συμφωνεί με το ότι το σημείο είναι κέντρο και με το Σχ. 13.6.



Σχήμα 13.6.

Αφού μια τυπική τροχιά είναι κλειστή καμπύλη, η μεταβολή των  $x$  και  $y$  ως προς το  $t$  θα πρέπει να είναι περιοδική, εκτός και αν αρχικά είτε  $x=0$  ή  $y=0$ , πράγμα που αποκλείεται. Από το Σχ. 13.6 είναι φανερό, ότι η  $y$  έχει μέγιστο (ελάχιστο), περίπου μετά χρόνο ίσο με το ένα τέταρτο της περιόδου, από τότε που η  $x$  έχει μέγιστο (ελάχιστο). Μια ερμηνεία είναι ότι όταν ο ανθρώπινος πληθυσμός είναι σε μέγιστη τιμή, ο ιχθυοπληθυσμός βρίσκεται σε μείωση, που με τη σειρά της προκαλεί μείωση στον ανθρώπινο πληθυσμό, και αντιστρόφως. Μια περιβαλλοντική αλλαγή μπορεί να οδηγήσει το σύστημα σε μετάπτωση από μια τροχιά σε μιαν άλλη, αλλά η περιοδική διακύμανση συνεχίζεται, χωρίς τάση να βρεθεί σε κατάσταση ισορροπίας.

Αν, αντί της εκθετικής αύξησης του ιχθυοπληθυσμού όταν δεν υπάρχουν θηρευτές, υποθεθεί λογιστική αύξηση, τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= ax - gx^2 - \beta xy \\ y' &= -\gamma y + \delta xy \end{aligned} \quad , \quad g \in \mathbb{R}^+ \quad (13.11)$$

που περιλαμβάνει το σύστημα  $\{(13.5), (13.6)\}$  ως ειδική περίπτωση όταν  $g=0$ . Το σύστημα (13.11) λέγεται μοντέλο **Volterra-Lotka** για το πρόβλημα θηράματος-θηρευτή. Μπορεί να μελετηθεί στο επίπεδο φάσεων κατ'ανάλογο τρόπο με εκείνον της περίπτωσης που  $g=0$ .

Έχουν μελετηθεί διάφορες εκδοχές του μοντέλου **Volterra-Lotka**. αν, π.χ.,  $x_0$  ψάρια μπορούν να βρουν καταφύγιο ώστε να είναι αδύνατο να αλιευθούν, το (13.11) γίνεται

$$\begin{aligned} x' &= ax - gx^2 - \beta y(x - x_0) \\ y' &= -\gamma y + \delta y(x - x_0) \end{aligned} \quad (13.12)$$

και μπορεί να μελετηθεί ανάλογα, επίσης.

### 13.3. ΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΥ

Υποθέτουμε ότι έχουμε ανταγωνισμό μεταξύ ατόμων του ίδιου είδους που ανταποκρίνονται στην αντιμετώπιση του αντιπάλου με μια μόνο από πεπερασμένου πλήθους στρατηγικές, κατά τον επόμενο πίνακα.

Δείκτης (i)	Χαρακτηρισμός Στρατηγικής	Αρχική Τακτική	Τακτική όταν αυτή του αντιπάλου είναι Κλιμάκωση
1	Γερακιού (Γ)	Κλιμάκωση	Κλιμάκωση
2	Περιστεράς (Π)	Επίδειξη	Άτακτη Φυγή
3	Λεονταρισμός (Λ)	Κλιμάκωση	Άτακτη Φυγή

Ένα άτομο που "παίζει" τη στρατηγική  $i$  εναντίον ενός ατόμου που παίζει την  $j$ , έχει "απόδοση"  $a_{ij}$ , που σχετίζεται με την αναπαραγωγική ικανότητα των ατόμων. Υποθέτουμε ότι κάθε άτομο παίζει πάντοτε την ίδια στρατηγική και ότι οι γόννοι παίζουν την ίδια στρατηγική με τους γονείς τους.

Έστω  $x_i$  η αναλογία του πληθυσμού που παίζει την στρατηγική  $i$ . Τότε

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 1 \quad (13.13)$$

και

$$x_i \geq 0, \quad i=1,2,3 \quad (13.14)$$

Η απόδοση ενός ατόμου που παίζει την στρατηγική  $i$  εναντίον του υπολοίπου πληθυσμού, είναι

$$\sum_j a_{ij} x_j = (Ax)_i \quad (13.15)$$

όπου  $A$  ο λεγόμενος πίνακας απόδοσης.

Η μέση απόδοση ενός ατόμου είναι

$$\sum_j x_i (Ax)_i = x^T Ax \quad (13.16)$$

και κατά συνέπεια το "πλεονέκτημα" του να παιχθεί η στρατηγική  $i$  είναι

---

$x^T$  συμβολίζει το ανάστροφο του διανύσματος  $x$ .

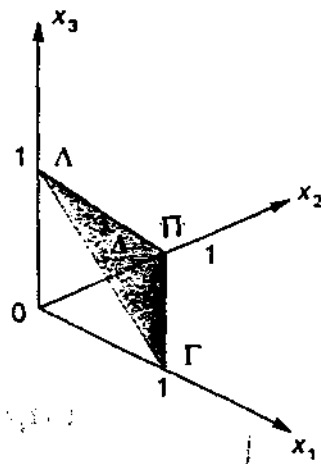


$$(Ax)_i - x^T Ax \quad (13.17)$$

Ο κατά κεφαλή ρυθμός ανάπτυξης του τμήματος εκείνου του πληθυσμού που παίζει τη στρατηγική  $i$ , θεωρείται ανάλογος αυτού του πλεονεκτήματος· έτσι με καταλληλή επιλογή της μονάδας χρόνου, παίρνουμε

$$x_i' = x_i [(Ax)_i - x^T Ax] \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (13.18)$$

Οι εξισώσεις αυτές αναπαριστούν την κατάσταση μόνο του πληθυσμού για σημεία του  $\mathbb{R}^3$  που ικανοποιούν τις (13.13), (13.14), δηλ. της περιοχής  $\Delta$  του Σχ. 13.7.



Σχήμα 13.7.

Η επίπεδη τριγωνική επιφάνεια  $\Lambda\Pi\Gamma$  συμβολίζεται με  $\Delta$  και είναι το σύνολο

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \quad , \quad x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \right\}$$

Τον πίνακα απόδοσης μπορούμε να τον βρούμε βαθμολογώντας κάθε "εμπλοκή" των αντιπάλων, ως εξής:

Νίκη:6, Ήττα:0, Τραυματισμός:-10, Χαμένος χρόνος:-1

Οι πραγματικές τιμές δεν είναι σημαντικές· εκείνα που είναι σημαντικά είναι τα πρόσσημα και η τάξη μεγέθους των τιμών. Αν ένα άτομο στρατηγικής Γ συναντήσει ένα άτομο στρατηγικής Π ή Λ το νικά, και έτσι  $a_{12}=a_{13}=6$ . Αν δύο άτομα στρατηγικής Γ συναντηθούν, μάχονται μέχρι να τραυματισθεί το ένα· κάθε τέτοιο άτομο έχει την ίδια πιθανότητα νίκης και έτσι  $a_{11}=1/2(6-10)=-2$ . Ένα άτομο στρατηγικής Π που συναντά ένα άτομο στρατηγικής Γ ή Λ ηττάται, και έτσι  $a_{21}=a_{23}=0$ . Όταν δύο άτομα στρατηγικής Π συναντηθούν, επιδεικνύονται το ένα στο άλλο για κάποιο χρονικό διάστημα, μέχρι που το ένα εγκαταλείπει· έτσι  $a_{22}=1/2(6+0)-1=2$ . Τέλος, ένα άτομο στρατηγικής Λ ηττάται από ένα άτομο στρατηγικής Γ, νικά ένα άτομο στρατηγικής Π και έχει 50% πιθανότητα να νικήσει ένα άλλο άτομο στρατηγικής Λ, οπότε  $a_{31}=0$ ,  $a_{32}=6$ ,  $a_{33}=1/2(6+0)=3$ . Συνεπώς

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Αξιζει να παρατηρήσουμε ότι το πλεονέκτημα μιας στρατηγικής δεν μεταβάλλεται αν προσθέσουμε μια σταθερά σε μια στήλη του A και έτσι ο A μπορεί να απλοποιηθεί στον

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.20)$$

και έτσι θα μελετήσουμε το σύστημα  $\{(13.18), (13.20)\}$ .

Είναι εύκολο (υπολογιστικά) να διαπιστώσουμε ότι το σημείο  $(x_1, x_2, x_3) = (3/5, 0, 2/5)$  είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος  $\{(13.18), (13.20)\}$ . Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση

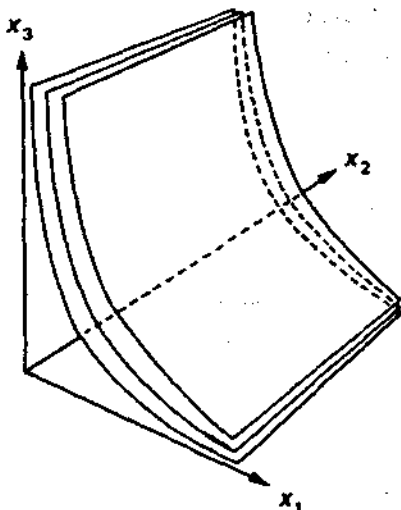
$$V(x) = \sqrt[5]{x_1^3 x_3^2}$$

για να δείξουμε ότι το Q:  $(3/5, 0, 2/5)$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, με πεδίο έλξης

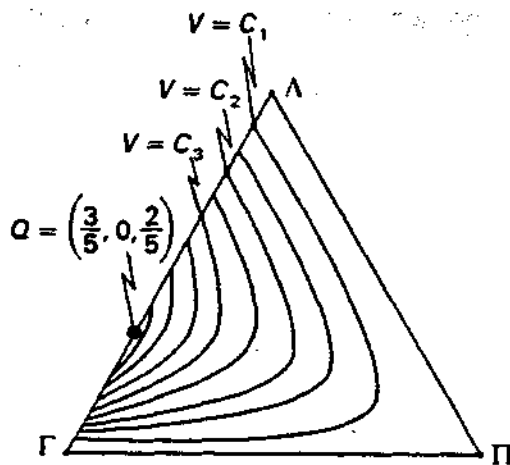
$$\Delta = \{x_1, x_2, x_3\} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1 : x_1, x_2, x_3 > 0\}$$

Όπως φαίνεται στο Σχ. 13.8, οι επίπεδες επιφάνειες

$V(x_1, x_2, x_3)$  τέμνουν το επίπεδο  $x_2=0$  κατά υπερβολές και είναι αναλλοίωτες από παράλληλες προς τον  $x_2$ -άξονα μεταφορές. Η τριγωνική επιφάνεια  $\Delta$ , τέμνει αυτές τις επίπεδες-επιφάνειες κατά ένα σύστημα καμπύλων, όπως φαίνεται στο Σχ. 13.9.



Σχήμα 13.8.



Σχήμα 13.9.

Επί της  $\text{int}\Delta$ , η παράγωγος της  $V$  κατά μήκος των τροχιών της (13.18) είναι

$$\begin{aligned} V'(x) &= V(x) \left[ \frac{3x_1'}{5x_1} + \frac{2x_3'}{5x_3} \right] = V(x) \left[ \left( \frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5} \right) Ax - x^T Ax \right] \\ &= V(x) \left[ (1 - x_1 - x_3) \left( \frac{11}{5} - x_1 - x_3 \right) + 5 \left( x_1 - \frac{3}{5} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (13.21)$$

και συνεπώς η  $V'(x)$  είναι θετική για  $x \in \text{int}\Delta$  και η  $V$  αυξάνει επί των τροχιών της (13.18) καθώς αυξάνει το  $t$ .

Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.1 (σελ. 64), συμπεραίνουμε ότι επί οποιασδήποτε τροχιάς εντός της  $\text{int}\Delta$ , η  $V$  αυξάνει μέχρι τη μέγιστη τιμή της που λαμβάνεται στο  $Q$ . Έτσι, όλες οι τροχιές εντός της  $\text{int}\Delta$ , τείνουν προς το  $Q$  καθώς αυξάνει το  $t$ . Επιπλέον, η  $\text{int}\Delta$  είναι υποσύνολο του πεδίου έλξης του  $Q$  και έτσι δεν περιέχει

σημεία ισορροπίας. Κατά συνέπεια, όλα τα σημεία ισορροπίας της (13.18), εμφανίζονται επί του  $\partial\Delta$ . Επί της  $\Gamma\Lambda$  ( $x_2=0$ ) έχουμε

$$x_1' = x_1(3x_3 - 5x_1x_3) = 0$$

$$x_3' = x_3(2x_1 - 5x_1x_3) = 0$$

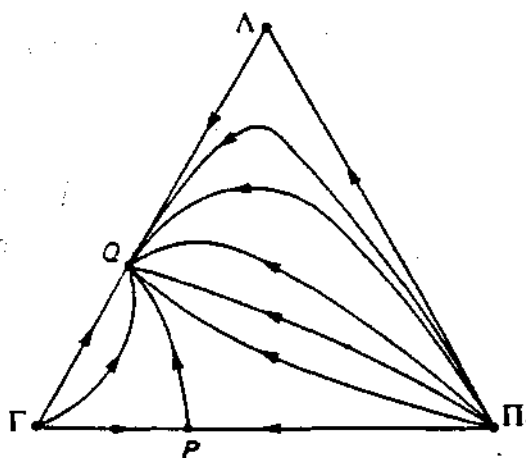
και έτσι, εκτός του  $Q$ , έχουμε σημεία ισορροπίας στο  $\Gamma:(1,0,0)$  και στο  $\Lambda:(0,0,1)$ . Ομοίως, επί του  $\Lambda\Pi$  ( $x_1=0$ ) και  $\Gamma\Pi$  ( $x_3=0$ ), βρίσκουμε ότι έχουμε σημεία ισορροπίας στα  $\Pi:(0,1,0)$  και  $P:(2/3, 1/3, 0)$ . Δεν υπάρχουν άλλα σημεία ισορροπίας στην  $\Delta$ .

Παρατηρώντας, τέλος, ότι

(i) επί της  $\Gamma\Lambda$  ισχύει  $x_1' > 0$  όταν  $x_1 < 3/5$  και  $x_1' < 0$  όταν  $x_1 > 3/5$ .

(ii) επί της  $\Lambda\Pi$  ισχύει  $x_3' > 0$ .

(iii) επί της  $\Gamma\Pi$  ισχύει  $x_2' > 0$  όταν  $x_2 < 1/3$  και  $x_2' < 0$  όταν  $x_2 > 1/3$ , μπορούμε να δούμε τη συμπεριφορά των τροχιών επί του  $\partial\Delta$  και να πάρουμε το ακόλουθο διάγραμμα φάσεων.

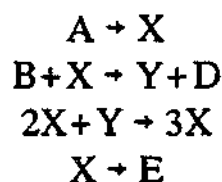


Σχήμα 13.10.

Έστω ότι ένα μεταλλαγμένο άτομο στρατηγικής  $\Lambda$  εμφανίζεται σε έναν πληθυσμό που αποτελείται αρχικά μόνο από άτομα στρατηγικής  $\Gamma$  και άτομα στρατηγικής  $\Pi$ . Ο αναμεμειγμένος πληθυσμός αναπαρίσταται από ένα σημείο εντός της  $\Delta$ , κοντά στον  $\Gamma\Pi$ . Αφού όλες οι τροχιές εντός της  $\Delta$  τείνουν στο  $Q$  καθώς αυξάνει το  $t$ , συμπεραίνουμε ότι αυτή η πληθυσμιακή καταστροφή τείνει στο  $(3/5, 0, 2/5)$ , όπου τα άτομα στρατηγικής  $\Pi$  εξαφανίζονται.

### 13.4. ΕΝΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΣΕ ΧΗΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Θεωρούμε τις χημικές αντιδράσεις



και υποθέτουμε ότι οι αντίστροφες αντιδράσεις μπορούν να αγνοηθούν και ότι οι αρχικές και τελικές συγκεντρώσεις προϊόντων A,B,D,E είναι σταθερές.

Οι προκύπτουσες εξισώσεις χημικής κινητικής είναι

$$\begin{aligned} X' &= \alpha - (b+1)X + X^2Y \\ Y' &= bX - X^2Y \end{aligned} \quad (13.22)$$

για θετικές παραμέτρους  $\alpha$  και  $b$ . Το σύστημα έχει ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας  $P$  στη θέση  $(\alpha, b/\alpha)$ . Η γραμμικοποίηση του (13.22) στο  $P$  έχει πίνακα συντελεστών

$$\begin{bmatrix} 2XY - b - 1 & X^2 \\ b - 2XY & -X^2 \end{bmatrix}_{\left(\alpha, \frac{b}{\alpha}\right)} = \begin{bmatrix} b - 1 & \alpha^2 \\ -b & -\alpha^2 \end{bmatrix} \quad (13.23)$$

Η οριζουσα αυτού του πίνακα είναι  $\alpha^2$  και έτσι η ευστάθεια του  $P$  προσδιορίζεται από το ίχνος του πίνακα. Το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές όταν  $\alpha^2 + 1 > b$  και ασταθές όταν  $\alpha^2 + 1 < b$ .

Εισάγοντας τοπικές συντεταγμένες

$$x_1 = X - \alpha$$

$$x_2 = Y - \frac{b}{\alpha}$$

παίρνουμε

$$x_1' = (b-1)x_1 + \alpha^2 x_2 + 2\alpha x_1 x_2 + \frac{b}{\alpha} x_1^2 + x_1^2 x_2$$

$$x_2' = -bx_1 - \alpha^2 x_2 - 2\alpha x_1 x_2 - \frac{b}{\alpha} x_1^2 - x_1^2 x_2 \quad (13.24)$$

Θεωρώντας το (13.24) ως ένα σύστημα με παράμετρο  $b$ , όπου το  $\alpha$  παραμένει σταθερό, έχουμε ότι για  $b \in ((\alpha-1)^2, (\alpha+1)^2)$  το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών είναι  $1/2 (b-\alpha^2-1)$ . Έτσι

$$\frac{d}{db} \left[ \frac{1}{2} (b - \alpha^2 - 1) \right] = \frac{1}{2}$$

στην τιμή διακλάδωσης  $b = \alpha^2 + 1$ .

Ο πίνακας

$$M = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ -\alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$M^{-1} \begin{bmatrix} b-1 & \alpha^2 \\ -b & -\alpha^2 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

και ο μετασχηματισμός

$$x = My$$

μετατρέπει το σύστημα (13.24), στο

$$y_1' = \alpha y_2 + (1 - \alpha^2) \alpha y_1^2 + 2\alpha^2 y_1 y_2 - \alpha^4 y_1^3 + \alpha^3 y_1^2 y_2 \quad (13.25)$$

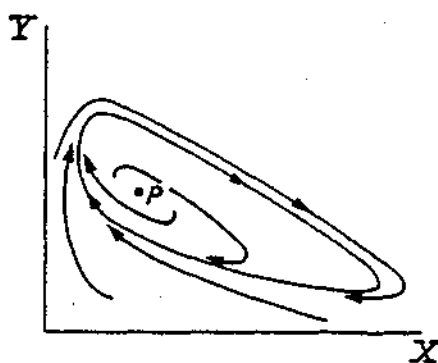
$$y_2' = -\alpha y_1$$

Ο δείκτης ευστάθειας  $I$  που δίνεται από τη σχέση (10.34) της σελ. 117, μπορεί να υπολογισθεί, και αφού μόνο οι όροι  $g_{11}^1$  και  $g_{11}^1 g_{12}^1$  είναι μη μηδενικοί, έχουμε

$$I = -2a^5 - 4a^3$$

Έπεται ότι το σύστημα (13.22) διακλαδώνεται σε έναν ελκυστικό οριακό κύκλο που περιβάλλει το  $P$  καθώς το  $b$  αυξάνει διερχόμενο από την κρίσιμη τιμή  $1+a^2$ .

Ένα παράδειγμα τυπικού διαγράμματος φάσεων, για  $a=1$ ,  $b=3$ , δίνεται στο επόμενο σχήμα



Σχήμα 13.11.

## 14. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ο πρώτος από τους δύο αριθμούς που προτάσσονται κάθε άσκησης αναφέρεται στην αντίστοιχη παράγραφο των σημειώσεων.

2.1. Ναδειχθεί ότι κάθε (μη τετριμμένη) λύση της  $x' = x$  είναι μη φραγμένη και ασταθής, ενώ κάθε λύση της  $x' = 1$  είναι μη φραγμένη και ευσταθής.

2.2. Λύνοντας τις εξισώσεις

$$x' = -y(x^2 + y^2) \quad , \quad y' = x(x^2 + y^2)$$

δείξτε ότι η μηδενική λύση είναι ευσταθής και όλες οι άλλες ασταθείς.

Αντικαταστήστε τις συντεταγμένες  $x, y$  με  $r, \phi$ , αντιστοίχως, όπου

$$x = r \cos(r^2 t + \phi) \quad , \quad y = r \sin(r^2 t + \phi)$$

και δείξτε ότι το σύστημα γράφεται

$$r' = 0 \quad , \quad \phi' = 0$$

Τέλος, δείχνοντας ότι όλες οι λύσεις του τελευταίου συστήματος είναι ευσταθείς, αποδείξτε ότι η αλλαγή συντεταγμένων μπορεί να επιδράσει επί της ευστάθειας ενός συστήματος.

2.3. Να εξετασθεί η ευστάθεια των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων

$$(i) \quad x' = x^2 \quad (ii) \quad x' = 2x - 3x^2$$

3.1. Να εξετασθούν ως προς την ευστάθεια οι λύσεις των:

$$(i) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t$$

$$(ii) \quad x'' + e^{-t} x' + x = e^t$$



$$(iii) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta \mu t \\ \sigma \nu \nu t \\ \ln(t^2 + 1) \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} (iv) x' = \lambda x + \mu y, y' = x + \lambda y \\ (v) x' = (\lambda^2 - \mu)x + (1 + \mu)y, y' = -\mu^2 x + \mu^2 y \\ (vi) x' = \lambda x - y, y' = \lambda y - z, z' = \lambda z - x \end{array} \right\} \text{για τις διάφορες τιμές των} \\ \text{παραμέτρων } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

4.1. Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan  $J$  και ένας πίνακας  $M$  με την ιδιότητα  $J = M^{-1}AM$  για κάθε έναν από τους ακόλουθους πίνακες  $A$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 41 & -29 \\ 58 & -41 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$$

4.2. Προσδιορίστε τον τύπο και την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας  $(0,0)$  για κάθε ένα από τα ακόλουθα συστήματα:

- (i)  $x' = 2x, y' = 3y$
- (ii)  $x' = -x - 2y, y' = 4x - 5y$
- (iii)  $x' = -3x + 4y, y' = -2x + 3y$
- (iv)  $x' = 5x + 2y, y' = -17x - 5y$
- (v)  $x' = -4x - y, y' = x - 2y$
- (vi)  $x' = 4x - 3y, y' = 8x - 6y$
- (vii)  $x' = 4x - 2y, y' = 5x + 2y$

4.3. Αποδείξτε ότι το επίπεδο φάσεων του συστήματος

$$x' = ax + by, y' = cx + dy, a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

με  $ad = bc$ , είναι ένα από τα:

- (i) μια ευθεία σημείων ισορροπίας με ευθειακές τροχιές που είτε την πλησιάζουν, είτε απομακρύνονται από αυτήν,
- (ii) μια ευθεία σημείων ισορροπίας με ευθειακές τροχιές παράλληλες προς αυτήν,
- (iii) όλο το επίπεδο και αποτελείται από σημεία ισορροπίας.

4.4. Να βρεθεί, αν υπάρχει, μια αλλαγή μεταβλητών που να μετατρέπει κάθε ένα από τα επόμενα σε ομογενές γραμμικό σύστημα:

- (i)  $x' = x + y + 2, y' = x + 2y + 3$
- (ii)  $x' = 2x - 3y + 1, y' = 6x - 9y$
- (iii)  $x' = 2x + y + 1, y' = x + z, z' = y + z + 2$

$$(iv) \quad x' = x+y+z+1, \quad y' = -y, \quad z' = x+z+1$$

4.5. Έστω  $x(t)$  μια τροχιά του γραμμικού συστήματος  $x' = Ax$  τέτοια, ώστε  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ . Έστω  $N$  ένας μη ιδιάζων πίνακας και  $y = Nx$ . Δείξτε ότι η τροχιά  $y(t) = Nx(t)$  του συστήματος  $y' = NAN^{-1}y$ , έχει επίσης την ιδιότητα  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ . Έτσι, δείξτε ότι αν το  $x' = Ax$  έχει

ένα σημείο ισορροπίας που είναι ευσταθής κόμβος, νόθος κόμβος ή εστία, το ίδιο συμβαίνει και για το σύστημα  $y' = NAN^{-1}y$ .

4.6. Διατυπώστε και αποδείξτε ένα ανάλογο αποτέλεσμα με αυτό της προηγούμενης άσκησης, για την περίπτωση που μια τροχιά  $x(t)$  του συστήματος  $x' = Ax$ , έχει την ιδιότητα  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$ . Χρησιμοποιώ-

ντας αυτό και το προηγούμενο συμπέρασμα, δείξτε ότι αν το  $x' = Ax$  έχει σαγματικό σημείο στο  $0$ , τότε το ίδιο ισχύει και για το σύστημα  $y' = NAN^{-1}y$ .

4.7. Δείξτε ότι υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση της οικογένειας καμπυλών  $y = c_1 x^{m_1}$  επί της οικογένειας καμπυλών  $y = c_2 x^{m_2}$  ( $c_1, c_2, m_1, m_2$ : σταθερές) τότε και μόνον τότε αν  $m_1 = m_2$  ή  $m_1 = m_2^{-1}$ . Έτσι, δείξτε ότι υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση των τροχιών του συστήματος

$$x' = \lambda_1 x, \quad y' = \lambda_2 y, \quad \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$$

επί του διαγράμματος φάσεων του συστήματος

$$x' = \mu_1 x, \quad y' = \mu_2 y$$

τότε και μόνον τότε αν  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$  ή  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ .

4.8. Δείξτε ότι υπάρχει  $k \in \mathbb{R}^+$  τέτοιο, ώστε η συνεχής,  $1-1$  και επί απεικόνιση

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = \begin{cases} y^k & , \quad y \geq 0 \\ -(-y)^k & , \quad y < 0 \end{cases}$$

απεικονίζει τις τροχιές του κόμβου  $x' = \lambda_1 x, y' = \lambda_2 y$  επί των τροχιών του αστεροειδούς κόμβου  $x' = \varepsilon x, y' = \varepsilon y$ ,  $\varepsilon = +1$  ή  $\varepsilon = -1$ , διατηρώντας τον προσανατολισμό.

**4.9.** Δείξτε ότι τα αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να βρεθεί μια απεικόνιση που απεικονίζει τις τροχιές τυχόντος σαγματικού σημείου επί των τροχιών του σαγματικού σημείου του  $x' = x, y' = -y$ .

**5.1.** Κατατάξτε, με τη βοήθεια του Θεωρήματος Γραμμικοποίησης, όπου αυτό είναι δυνατό, τα σημεία ισορροπίας των συστημάτων:

(i)  $x_1' = x^2 - 3x_1 + 2, x_2' = x_1^2 - x_2^2$

(ii)  $x_1' = x_2, x_2' = -x_1 + x_1^3$

(iii)  $x_1' = \eta\mu(x_1 + x_2), x_2' = x_2$

(iv)  $x_1' = x_1 - x_2 - e^{x_1}, x_2' = x_1 - x_2 - 1$

(v)  $x_1' = -x_2 + x_1 + x_1 x_2, x_2' = x_1 - x_2 - x_2^2$

(vi)  $x_1' = x_2, x_2' = -(1 + x^2 + x^4)x_2 - x_1$

(viii)  $x_1' = -3x_2 + x_1 x_2 - 4, x_2' = x_2^2 - x_1^2$

**5.2.** Δείξτε ότι το  $(0,0)$  είναι εστία για το σύστημα

$$x_1' = -x_2 - x_1 \Gamma, \quad x_2' = x_1 - x_2 \Gamma, \quad \Gamma = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

ενώ είναι κέντρο για το γραμμικοποιημένο σύστημα.

**5.3.** Μελετήστε τα συστήματα (13.11) και (13.12) της σελ. 158, κατά τρόπο ανάλογο με της μελέτης του συστήματος  $\{(13.5), (13.6)\}$  της σελ. 156.

**6.1.** Δείξτε ότι η αλλαγή συντεταγμένων

$$y_1 = x_1 + x_2^3, \quad y_2 = x_2 + x_2^2$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Κιβωτίου Ροής για το σύστημα

$$x_1' = -\frac{3x_2^2}{1+2x_2}, \quad x_2' = \frac{1}{1+2x_2}$$

στην περιοχή οποιουδήποτε σημείου  $(x_1, x_2)$  με  $x_2 \neq -1/2$ .

7.1. Δείξτε ότι η  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  είναι ισχυρή συνάρτηση Lyapunov στο  $(0,0)$  για κάθε ένα από τα συστήματα:

(i)  $x_1' = -x_2 - x_1^3, \quad x_2' = x_1 - x_2^3$

(ii)  $x_1' = -x_1^3 - x_2 \eta \mu x_1, \quad x_2' = -x_2 - x_1^2 x_2 - x_1 \eta \mu x_1$

(iii)  $x_1' = -x_1 - 2x_2^2, \quad x_2' = -2x_1 x_2 - x_2^3$

(iv)  $x_1' = -x_1 \eta \mu^2 x_1, \quad x_2' = -x_2 - x_2^5$

(v)  $x_1' = -(1-x_2)x_1, \quad x_2' = -(1-x_1)x_2$

Στη συνέχεια βρείτε πεδία έλξης στο  $(0,0)$  για τα συστήματα αυτά.

7.2. Δείξτε ότι η  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  είναι ασθενής συνάρτηση Lyapunov στο  $(0,0)$  για κάθε ένα από τα συστήματα:

(i)  $x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_1 - x_2^3(1-x_1^2)^2$

(ii)  $x_1' = -x_1 + x_2^2, \quad x_2' = -x_1 x_2 - x_1^2$

(iii)  $x_1' = -x_1^3, \quad x_2' = -x_1^2 x_2$

(iv)  $x_1' = -x_1 + 2x_1 x_2^2, \quad x_2' = -x_1^2 x_2^3$

Ποιά από αυτά τα συστήματα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές;

7.3. Αν  $V$  είναι μια ισχυρή συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα  $x' = -f(x)$  σε μια περιοχή του  $0$ , δείξτε ότι το σύστημα  $x' = f(x)$  έχει ένα

ασταθές σημείο ισορροπίας στο 0. Δείξτε, στη συνέχεια, ότι τα συστήματα

$$(i) \quad x_1' = x_1^3, \quad x_2' = x_2^3$$

$$(ii) \quad x_1' = \eta \mu x_1, \quad x_2' = \eta \mu x_2$$

$$(iii) \quad x_1' = -x_1^3 + 2x_1^2 \eta \mu x_1, \quad x_2' = x_2 \eta \mu^2 x_2$$

είναι ασταθή στο (0,0).

7.4. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.1, δείξτε ότι το σύστημα

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_1 - x_2 - (x_1 + 2x_2)(x_2^2 - 1)$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθές στο (0,0), θεωρώντας την περιοχή  $|x_2| < 1$ . Στη συνέχεια βρείτε ένα πεδίο έλξης.

7.5. Με τη χρήση της συνάρτησης

$$V(x_1, x_2) = \left( \frac{x_1}{a} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{b} \right)^2$$

δείξτε ότι το σύστημα

$$x_1' = x_1(x_1 - a), \quad x_2' = x_2(x_2 - b), \quad a, b > 0$$

έχει το (0,0) ως ασυμπτωτικά ευσταθές. Δείξτε, επιπλέον, ότι όλες οι τροχιές τείνουν στο (0,0) καθώς  $t \rightarrow \infty$ , στην περιοχή

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} < 1$$

7.6. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση

$$V(x_1, x_2) = 3x_1x_2^2 - x_1^3$$

δειξτε ότι το  $(0,0)$  είναι ασταθές για το σύστημα

$$x_1' = x_2^2 - x_1^2, \quad x_2' = 2x_1x_2$$

7.7. Βρείτε πεδία έλξης για τα επόμενα συστήματα, χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις Lyapunov:

$$(i) \quad x_1' = x_2 - x_1g(x_1, x_2), \quad x_2' = -x_1 - x_2g(x_1, x_2),$$

$$g(x_1, x_2) = (1 - x_1^2 - x_2^2)(1 + x_1^2 + x_2^2)$$

$$(ii) \quad x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_2 + x_2^3 - x_1^5$$

7.8. Δείξτε ότι αν το σύστημα

$$x' = f(x,y), \quad y' = g(x,y)$$

έχει σημείο ισορροπίας στο  $(0,0)$ , τότε η μηδενική λύση είναι ασταθής αν υπάρχουν σταθερές  $\alpha$  και  $\beta$ , τέτοιες ώστε σε μια περιοχή του  $(0,0)$  που δεν περιέχει το  $(0,0)$ , να ισχύει

$$\alpha f(x,y) + \beta g(x,y) > 0$$

7.9. Θεωρούμε το σύστημα

$$x' = -\alpha x + \beta f(y), \quad y' = \gamma x - \delta f(y), \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$$

με  $\beta\gamma - \alpha\delta > 0$  και  $f(0)=0, yf(y) > 0 (y \neq 0)$ . Δείξτε ότι για κατάλληλες τιμές των  $A, B$  η

$$V = \frac{1}{2} Ax^2 + B \int_0^y f(u) du$$

είναι ισχυρή συνάρτηση Lyapunov για τις μηδενικές λύσεις.

7.10. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$V(x,y) = (\delta x - \beta y)^2 + 2\delta \int_0^x f(u)du - \beta\gamma x^2$$

είναι μια ισχυρή συνάρτηση Lyapunov για τη μηδενική λύση του συστήματος

$$x' = f(x) + \beta y, \quad y' = \gamma x + \delta y, \quad f(0) = 0$$

όταν σε μια περιοχή του  $(0,0)$  ισχύουν οι σχέσεις

$$\delta \frac{f(x)}{x} - \beta\gamma > 0, \quad \frac{f(x)}{x} + \delta < 0 \quad (x \neq 0)$$

Στη συνέχεια αποδείξτε ότι για αρχικές συνθήκες εντός του κύκλου  $x^2 + y^2 < 1$ , οι λύσεις του συστήματος

$$x' = -x^3 + x^4 + y, \quad y' = -x$$

τείνουν στο  $(0,0)$ .

7.11. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 7.5, σελ. 77, για να δείξετε ότι για  $\alpha > 0$ , κάθε λύση του συστήματος

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_1 - \alpha x_2$$

τείνει στο  $(0,0)$  καθώς  $t \rightarrow +\infty$ .

8.1. Να βρεθούν πρώτα ολοκληρώματα και τα πεδία ορισμού τους, για τα ακόλουθα συστήματα:

(i)  $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_1^2 + 1$

(ii)  $x_1' = x_1(x_2 + 1), \quad x_2' = -x_2(x_1 + 1)$

$$(iii) \quad x_1' = \tan x_1, \quad x_2' = -x_2^2, \quad |x_1| < \frac{\pi}{2}$$

$$(iv) \quad x_1' = x_1(x_1 e^{x_2} - \sin x_2), \quad x_2' = \eta \mu x_2 - 2x_1 e^{x_2}$$

8.2. Να βρεθεί ένα πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος

$$x_1' = x_1 x_2 - 3x_1^3, \quad x_2' = -6x_1^2 x_2 + x_1^4 + x_2^2$$

με τη χρήση της αντικατάστασης  $x_2 = ux_1^2$ . Να σχεδιασθεί το διάγραμμα φάσεων.

8.3. Να βρεθούν πρώτα ολοκληρώματα για τα γραμμικά συστήματα  $x' = Jx$ , όπου  $J \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ο πίνακας Jordan για κόμβο, κέντρο και εστία, αντιστοίχως. Να βρεθούν μέγιστες περιοχές ύπαρξης αυτών των πρώτων ολοκληρωμάτων. Είναι δυνατό να είναι συντηρητικό ένα σύστημα που έχει ένα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας;

9.1. Να βρεθούν κλειστές τροχιές των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων:

$$(i) \quad x'' + (2(x')^2 + x^4 - 1)x' + x^3 = 0$$

$$(ii) \quad x'' + ((x')^2 + x^2 - 4)x = 0$$

$$(iii) \quad x'' + (2(x')^2 + x^4 - 1)x^3 = 0$$

9.2. Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x^3 = 0$$

έχει μια ακριβώς περιοδική λύση.



9.3. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση

$$x'' + (|x| + |x'| - 1)x' + x|x| = 0$$

έχει μια τουλάχιστον περιοδική λύση.

9.4. Ναδειχθεί ότι η αρχή των αξόνων είναι κέντρο για την εξίσωση

$$x'' + (kx' + 1)\eta\mu x = 0$$

9.5. Ναδειχθεί ότι υπάρχει μια περιοχή  $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1 + x_2 \leq r^2\}$  τέτοια, ώστε όλες οι τροχιές του συστήματος

$$x_1' = -\sigma x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad x_2' = \sigma x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) - \omega$$

όπου  $\sigma, \omega$ : σταθερές, εισέρχονται τελικώς εντός της  $R$ . Ναδειχθεί ότι το σύστημα έχει έναν οριακό κύκλο όταν  $\omega = 0$ .

9.6. Να αποδειχθεί ότι το σύστημα

$$x_1' = 1 - x_1 x_2, \quad x_2' = x_1$$

δεν έχει οριακούς κύκλους.

9.7. Θεωρούμε το σύστημα

$$x_1' = -\sigma x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) - x_2(x_1^2 + x_2^2),$$

$$x_2' = \sigma x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_1(x_1^2 + x_2^2) - \omega$$

όπου  $\sigma, \omega$ : σταθερές: Ναδειχθεί ότι το σύστημα έχει έναν οριακό κύκλο τέτοιο, ώστε όλα τα σημεία του να βρίσκονται σε απόσταση μεγαλύτερη από  $\sqrt{2}/2$  από το  $(0,0)$ , τότε ο οριακός κύκλος περιβάλλει το  $(0,0)$ .

9.8. Θεωρούμε το σύστημα

$$x_1' = f_1(x_1, x_2), \quad x_2' = f_2(x_1, x_2)$$

και υποθέτουμε ότι το σύνολο  $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} : x_1 > 0, x_2 > 0\}$  είναι θετικά αναλλοίωτο και ότι

$$\begin{aligned} x_1' \geq 0 & \text{ όταν } x_2 \leq -x_1^2 + 3x_1 + 1 \\ x_2' \geq 0 & \text{ όταν } x_2 \leq x_1 \end{aligned}, \text{ αντιστοίχως}$$

Αν υποθέσουμε, επιπλέον, ότι δεν υπάρχουν κλειστές τροχιές μέσα στο  $R$ , να δειχθεί ότι το μοναδικό σημείο ισορροπίας εντός του  $R$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

10.1. Έστω ότι ένας πληθυσμός αυξάνεται σύμφωνα με το λογιστικό μοντέλο και υφίσταται συγκομιδή υπό σταθερό ρυθμό. Η πυκνότητα ενός τέτοιου πληθυσμού δίνεται από την εξίσωση

$$x' = kx - \lambda x^2 - \mu, \quad k, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$$

και ενδιαφερόμαστε για λύσεις με  $x \geq 0$ . Λέμε ότι ο πληθυσμός εξαφανίζεται για μια θετική αρχική πυκνότητα  $x_0$ , αν υπάρχει πεπερασμένη τιμή του  $t$ , ώστε  $\phi(t, x_0) = 0$ .

Χωρίς να λυθεί η εξίσωση να δειχθεί ότι:

$$(i) \text{ αν } \mu \in \left[0, \frac{k^2}{4\lambda}\right), \text{ τότε υπάρχει μια τιμή του αρχικού μεγέθους}$$

του πληθυσμού, τέτοια ώστε αν το αρχικό μέγεθος είναι μικρότερο από αυτή την τιμή, τότε ο πληθυσμός εξαφανίζεται· αν, αντιθέτως, το αρχικό μέγεθος υπερβαίνει αυτήν την τιμή, τότε ο πληθυσμός τείνει σε ένα σημείο ισορροπίας.

$$(ii) \text{ αν } \mu > \frac{k^2}{4\lambda}, \text{ τότε ο πληθυσμός εξαφανίζεται ανεξαρτήτως}$$

του αρχικού του μεγέθους.

10.2. Αν, αντί της εξίσωσης της προηγούμενης άσκησης, η πυκνότητα του πληθυσμού ικανοποιεί την

$$x' = kx - \lambda x^2 - \mu x, \quad k, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$$

δειξτε ότι αν  $k < \mu$ , τότε ανεξαρτήτως της αρχικής πυκνότητας  $x_0 > 0$ , ο πληθυσμός τείνει να εξαφανισθεί καθώς  $t \rightarrow +\infty$ , αλλά δεν εξαφανίζεται σε πεπερασμένο χρόνο. Μελετήστε το μοντέλο στις περιπτώσεις  $k = \mu$  και  $k > \mu$ .

10.3. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση  $\psi(\lambda)$  της οποίας η ύπαρξη εξασφαλίζεται από το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης για την  $F(\lambda, x) = \lambda + (1 + \lambda)x + x^2$ .

10.4. Να δειχθεί με τη χρήση του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης ότι η εξίσωση

$$\mu + (1 - \mu)y + y^3 = 0$$

έχει μια ακριβώς λύση κοντά στο  $(\mu, y) = (1, -1)$ .

10.5. Να δειχθεί ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης για τις συναρτήσεις:

(i)  $\lambda + \eta \mu x$

(ii)  $\frac{1}{2} + \lambda - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

(iii)  $\eta \mu \lambda + \epsilon \phi x$

10.6. Με τη χρήση του δείκτη ευστάθειας της σελ. 117, δείξτε ότι τα ακόλουθα συστήματα είναι ασυμπτωτικά ευσταθή στο  $(0, 0)$ :

(i)  $x_1' = x_2 - x_1^3 + x_1 x_2$ ,  $x_2' = -x_1 - x_1 x_2^2$

(ii)  $x_1' = x_2 - x_1^2 \eta \mu x_1$ ,  $x_2' = -x_1 + x_1 x_2 + 2x_1^2$

(iii)  $x_1' = x_2 - x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2$ ,  $x_2' = -x_1 + x_1 x_2 + x_2^2$

10.7. Δείξτε ότι τα παρακάτω συστήματα υφίστανται διακλάδωση Hopf στο  $\mu = 0$  κατά τέτοιο τρόπο ώστε ένας ευσταθής οριακός κύκλος περιβάλλει το  $(0, 0)$  όταν  $\mu > 0$ :

(i)  $x_1' = x_2 - x_1^3$ ,  $x_2' = -x_1 + \mu x_2 - x_1^2 x_2$

$$(ii) \quad x_1' = \mu x_1 + x_2 - x_1^3 \sigma \nu x_1, \quad x_2' = -x_1 + \mu x_2$$

$$(iii) \quad x_1' = \mu x_1 + x_2 + \mu x_1^2 - x_1^2 - x_1 x_2^2, \quad x_2' = -x_1 + x_2^2$$

## BIBLIOΓΡΑΦΙΑ

- [Αθ-Κα-Στρατ] Χ. Αθανασιάδης-Γ. Καλογερόπουλος-Ι. Στρατής: Μαθήματα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, Αθήνα 1990. 515.55 ΑθΚΑ Σ 1990
- [Ar-P] D. K. Arrowsmith-C.M. Place: Ordinary Differential Equations, Chapman and Hall, 1982.
- [Γε] Π. Γεωργίου: Μαθήματα Διαφορικών Εξισώσεων, Αθήνα, 1981. 515 Γε Π Γ
- [Γκ] Ε. Γκρέκας: Σημειώσεις για το Μάθημα Διαφορικές Εξισώσεις II, Αθήνα, 1987.
- ✓ [C-Ha] S.N. Chow-J.K. Hale: Methods of Bifurcation Theory, Springer, 1982. 515.55 C H 1982
- [G] R. Grimshaw: Nonlinear Ordinary Differential Equations, Blackwell Scientific Publications, 1990. (Libr Επιστήμη) 515.352
- ✓ [Ha] J.K. Hale: Ordinary Differential Equations, Wiley, 1969. 515.35 Hal J 1969
- [Ha-Ko] J.K. Hale-H. Kocak: Differential Equations, Springer (υπό έκδοση). (3) Dynamics and Bifurcation, 515.35 Hal J d 1991
- ✓ [Hi-Sma] M.W. Hirsch-S.Smale: Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, 1974. 515.35 Hi S 1974
- ✓ [Hu] W. Hurewicz: Lectures on Ordinary Differential Equations, MIT Press, 1958. 515.35 Hu W I 1958 [515.35 Hu W I 1964]
- [Jon-Sl] D.S. Jones-B.D. Sleeman: Differential Equations and Mathematical Biology, George Allen & Unwin, 1983.
- [Jor-Smi] D.W. Jordan-P.Smith: Nonlinear Ordinary Differential Equations, 2nd, ed., Oxford U.P., 1987. 515.352 J S 1987
- [Ma-McC] J.E. Marsden-M. McCracken: The Hopf Bifurcation and its Applications, Springer, 1976.
- [Sa] D.A. Sanchez: Ordinary Differential Equations and Stability Theory: an introduction, Dover, 1979. 515.35 San D 1979 [515.35 San D d 1981]
- [Si] G.F. Simmons: Differential Equations with Applications and Historical Notes, Tata-McGraw Hill, 1974. 515.35 Sim G d 1974
- [Στα] Ν. Σταυρακάκης: Συμπληρωματικές Σημειώσεις Διαφορικών Εξισώσεων, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1989.
- [Στραν] Χ. Στράντζαλος: Διαφορικές Εξισώσεις, Δυναμικά Συστήματα και Διαφορικά Διανυσματικά Πεδία, Αθήνα, 1982. 514.2 Σ Τ ρ Π