ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΚΥΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΣΠΟΡΑ

13/3/2023

Άσκηση 1: Εξίσωση Klein – Gordon

Έστω η εξίσωση Klein – Gordon,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + m^2 u = 0,$$

η οποία είναι μια σχετιστική κυματική εξίσωση που χρησιμοποιείται στη θεωρία πεδίου (με m να αναπαριστά τη μάζα του μποζονίου), στη φυσική πλάσματος (με m να αναπαριστά τη συχνότητα πλάσματος), στη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε κυματοδηγούς (με m να αναπαριστά τη συχνότητα αποκοπής του κυματοδηγού), κλπ. Ζητούνται:

(α) Να βρεθεί και να σχεδιαστεί η σχέση διασποράς $\omega = \omega(k)$, και να αναγνωρισθούν οι 'ζώνες' και τα 'χάσματα', όπου επιτρέπεται, ή μη (αντίστοιχα), η διάδοση κυμάτων.

(β) Να βρεθούν οι ταχύτητες φάσης και ομάδος, v_p και v_g. Να δειχθεί ότι $v_p > c$ και $v_g < c$, και να δοθεί μια γεωμετρική ερμηνεία των αποτελεσμάτων αυτών, που βασίζεται στο γράφημα της $\omega = \omega(k)$.

(γ) Να λυθεί το ΠΑΤ για την εξίσωση Klein – Gordon:

$$\begin{aligned} &u_{tt} - c^2 u_{xx} + m^2 u = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t + \infty, \\ &u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x). \end{aligned}$$

Να δειχθεί ότι αν $u(x,0) = \delta(x)$ και $g(x) = 0$, η λύση του ΠΑΤ είναι:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(kx) \cos[\omega(k)t] dk.$$

Άσκηση 1: Εξίσωση Gross – Pitaevskii

Οιονεί μονοδιάστατα συμπυκνώματα Bose – Einstein περιγράφονται από την εξίσωση Gross – Pitaevskii (GP):

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} + g|\psi|^2\psi,$$

όπου $\hbar$ είναι η σταθερά του Planck, m η ατομική μάζα και g ο συντελεστής των αλληλεπιδράσεων, που θεωρείται $g > 0$ (για απωστικές διατομικές αλληλεπιδράσεις). Ζητούνται:

(α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση GP επιδέχεται τη λύση (θεμελιώδης κατάσταση):

$$\psi(x,t) = \sqrt{\rho_0}\exp[-i(\mu/\hbar)t],$$

όπου μ είναι το χημικό δυναμικό και ρ_0 μια σταθερά. Να δειχθεί ότι $\mu = \rho_0 g$.

(β) Να βρεθεί η σχέση διασποράς των γραμμικών κυμάτων που διαδίδονται επί της θεμελιώδους καταστάσεως.

Υπόδειξη:

- Για την εύρεση της σχέσης διασποράς, να αντικατασταθεί στην εξίσωση GP η λύση:

$$\psi(x,t) = [\rho_0 + \epsilon\rho(x,t)]\exp\left[-i(\mu/\hbar)t + \epsilon\phi(x,t)\right],$$

όπου $\rho(x,t)$ και $\phi(x,t)$ αναπαριστούν διαταραχές, με $|\rho(x,t)|,\ |\phi(x,t)| = O(1)$ και $0 < \epsilon \ll 1$ εiναι μια μικρή παράμετρος.

- Να δειχθεί ότι ο χωρισμός του φανταστικού και πραγματικού μέρους της εξίσωσης οδηγεί [σε τάξη $O(\epsilon)$] στο εξής γραμμικό σύστημα:

$$\rho_t + \frac{\hbar}{2m}\sqrt{\rho_0}\phi_{xx} = 0, \tag{1}$$

$$\hbar\sqrt{\rho_0}\phi_t + 2\mu\rho - \frac{\hbar^2}{2m}\rho_{xx} = 0. \tag{2}$$

- Να αναζητηθούν λύσεις των (1)-(2) της μορφής:

$$\rho(x,t) = \tilde{\rho}\exp[i(kx-\omega t)], \quad \phi(x,t) = \tilde{\phi}\exp[i(kx-\omega t)],$$

που οδηγεί σε ένα γραμμικό ομογενές σύστημα για τα άγνωστα σταθερά πλάτη $\tilde{\rho}$ και ϕ. Από το σύστημα αυτό, μπορεί να εξαχθεί η σχέση διασποράς (που ονομάζεται 'σχέση διασποράς Bogoliubov').

(γ) Να δειχθεί ότι η (ίδια) σχέση διασποράς Bogoliubov μπορεί να εξαχθεί από το σύστημα (1)-(2) με απαλοιφή του πεδίου ρ: με τον τρόπο αυτό, προκύπτει η ακόλουθη γραμμικοποιημένη εξίσωση Boussinesq για τη $\phi(x,t)$,

$$\phi_{tt} - c^2\phi_{xx} + \beta\phi_{xxxx} = 0, \tag{3}$$

όπου c και β είναι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν. Τότε, η σχέση διασποράς της (3) είναι η σχέση διασποράς Bogoliubov.

(δ) Με δεδομένη τη σχέση διασποράς Bogoliubov, και θεωρώντας κύματα που οδεύουν προς τα δεξιά, να δειχθεί ότι:

- Για 'μακρά κύματα' (longwaves), η σχέση διασποράς ανάγεται στη μορφή:

$$\omega = ck.$$

  Να προσδιοριστεί η παράμετρος c ('ταχύτητα του ήχου').

- Εν απουσία των αλληλεπιδράσεων ($g = 0$), η σχέση διασποράς α-νάγεται στη λεγόμενη μορφή de Broglie:

$$E = p^2/2m,$$

  όπου $E = \hbar\omega$ και $p = \hbar k$.