ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Δεύτερο τεστ Μη Γραμμικής Δυναμικής

7/6/2023

Σύνολο μορίων 125

1. Γράψτε τη διαφορική εξίσωση μεταβολής του εμβαδού χωρίου αρχικών συνθηκών στο επίπεδο $(x, \dot{x})$ του δυναμικού συστήματος $\ddot{x} = -\omega^2 x$. **[5]**

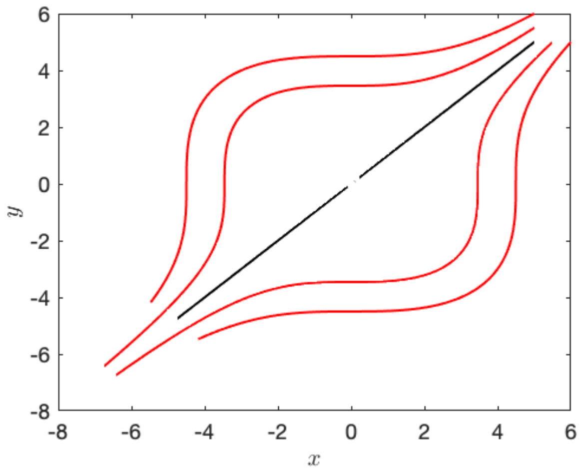
****

Για το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = y - x$, $\dot{y} = 3x - y - xz$, $\dot{z} = xy - z$.

2. Γράψτε τη διαφορική εξίσωση μεταβολής του όγκου χωρίου αρχικών συνθηκών. **[5]**

3. Γραμμικοποιήστε το δυναμικό σύστημα γύρω από το σημείο ισορροπίας $(0, 0, 0)$ και σχεδιάστε τις ασταθείς και ευσταθείς πολλαπλότητες του σημείου αυτού στη γραμμική προσέγγιση. **[5]**

4. Σχεδιάστε τη ροή του δυναμικού συστήματος $\dot{x} = -y^2$, $\dot{y} = -x^2$. Σημειώστε τις καμπύλες μηδενικής κλίσης, το σημείο ισορροπίας και το είδος ισορροπίας του. Τι αναμένεται να συμβεί σε αυτό το δυναμικό σύστημα; [**15**]



Σχήμα 1: Η ροή του δυναμικού συστήματος $\dot{x} = -y^2$, $\dot{y} = -x^2$. Το σημείο ισορροπίας είναι το $(0, 0)$ και ειναι ασταθές. Η γραμμή $x = y$ είναι αναλλοίωτη και επί αυτής της ευθείας το σημείο ισορροπίας εμφανίζει ημιευστάθεια. Οι καμπύλες μηδενικής κλίσης είναι οι άξονες $x = 0$ επί του οποίου η ροή είναι οριζόντια, $\dot{y} = 0$, όπως φαίνεται στο σχήμα, και ο άξονας $y = 0$ επί του οποίου η ροή είναι κατακόρυφη, $\dot{x} = 0$. Το πρόβλημα παρουσιάζει τη συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος της τελευταίας άσκησης 23 για μεγάλες τιμές των συντεταγμένων.

****

Οι αλλεπάλληλες χρονικές προωθήσεις κατά μία περίοδο χρονικής διάρκειας T δυναμικού συστήματος στο επίπεδο (x, y) δίνονται μέσω της απεικόνισης Poincaré:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} .$$

5. Πως μεταβάλλεται το εμβαδό ενός χωρίου καταστάσεων στη δυναμική αυτή; **[5]**

6. Σχεδιάστε την εξέλιξη του τετραγωνικού χωρίου με κορυφές $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ σε μία περίοδο. **[5]**

7. Σχεδιάστε την εξέλιξη του χωρίου στο όριο $n \to \infty$. **[10]**

****

Αν η εξέλιξη του διαταραγμένου κατά ε ταλαντωτή $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ στο επίπεδο $(x, \dot{x})$ περιγραφεί με τις μεταβλητές (r, ϕ), όπου $x = r\cos(t + \phi)$ και $\dot{x} = -r\sin(t + \phi)$, τότε για $\varepsilon << 1$ η εξέλιξη αυτή δίνεται με μεγάλη ακρίβεια από τις εξίσώσεις των χρονικά εξελισσόμενων μέσων τιμών των μεταβλητών $(\overline{r}, \overline{\phi})$ σε μία περίοδο 2π του αδιατάρακτου ταλαντωτή.

8. Γράψτε πως ορίζονται οι μέσες μεταβλητές $(\overline{r}, \overline{\phi})$. **[5]**

9. Γράψτε τις εξισώσεις αυτής της αδρομερούς δυναμικής των μέσω τιμών των $(\overline{r}, \overline{\phi})$ με χρονική μεταβλητή την $\tau = \varepsilon t$. **[10]**

10. Σχεδιάστε στο πολικό επίπεδο $(\overline{r}, \overline{\varphi})$ την εξέλιξη της δυναμικής. **[5]**

****

Έστω ότι ο πληθυσμός, $\varphi(x, t) \geq 0$, λαμβάνει φραγμένες τιμές επί της ευθείας $[-\infty, \infty]$ και ικανοποιεί την

$$\varphi_t = \varphi(1 - \varphi) + \varphi_{xx} .$$

11. Μονολεκτικά γράψτε τι περιγράφει η παραπάνω εξίσωση. **[5]**

    Οταν ο πληθυσμός είναι στο ίδιο σημείο αυξάνεται λογιστικά, αλλά τώρα διαχεεται επίσης.

12. Οι χωρικά σταθεροί πληθυσμοί, $\varphi_e(x) = 0$ και $\varphi_e(x) = 1$, είναι καταστάσεις ισορροπίας του δυναμικού συστήματος. Γράψτε τις γραμμικές εξισώσεις που διέπουν μικρές διαταραχές, $\tilde{\varphi}(x, t)$, από τις καταστάσεις ισορροπίας. **[5]**

    Περί την $\varphi_e = 0 : \tilde{\varphi}_t = \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}_{xx}$.

    Περί την $\varphi_e = 1 : \tilde{\varphi}_t = -\tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}_{xx}$.

13. Τι απαιτείται για το πρόσημο των μικρών διαταραχών $\tilde{\varphi}(x,t)$ σε κάθε περίπτωση; **[5]**

Θεωρούμε πάντα ότι $\tilde{\varphi} << 1$.

Οι διαταραχές όμως περί το $\varphi_e = 0$ πρέπει να είναι αναγκαστικά θετικές: $\tilde{\varphi} \geq 0$, ενώ περί το $\varphi_e = 1$ δεν περιορίζονται από το πρόσημο.

14. Μελετήστε την ευστάθεια των καταστάσεων ισορροπίας $\varphi_e(x) = 0$ και $\varphi_e(x) = 1$. **[5]**

Αν θεωρήσουμε, λόγω της ομογένειας σε όλο τον χώρο και όλον το χρόνο, χωρίς έλλειψη της γενικότητας διαταραχές της μορφής: $ae^{ikx+\sigma t}$, τότε επειδή κάθε αρχική διαταραχή μπορεί να αναπτυχθεί στην πλήρη βάση των συναρτήσεων $e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$, αν για κάθε k προκύψει $\sigma(k)$ με αρνητικό πραγματικό μέρος τότε η κατάσταση είναι ευσταθής, άλλως μπορεί να είναι πλήρως ασταθής ή ασταθής σε ορισμένη κλάση αρχικών διαταραχών και ευσταθής σε άλλες ή και ανάποδα.

Περί το $\varphi_e(x) = 1$ η εξίσωση διασποράς είναι $\sigma = -1 - k^2$ και $\forall k$ είναι $\sigma < 0$ και συνεπώς όλες οι διαταραχές είναι ευσταθείς.

Περί το $\varphi_e(x) = 0$ η εξίσωση διασποράς είναι $\sigma = 1 - k^2$. Για $k > 1$ είναι $\sigma < 0$, δηλαδή διαταραχές με μικρό μήκος κύματος καθίστανται ευσταθείς, ενώ για $k < 1$ είναι $\sigma > 0$ συνεπώς μεγάλος μήκους κύματος είναι ευσταθείς.

15. Υπάρχουν αρχικές διαταραχές, $\tilde{\varphi}(x,0)$, της κατάστασης ισορροπίας $\varphi_e(x) = 0$ που να είναι ευσταθείς; **[15]**

Αλλά στην περίπτωση $\varphi_e(x) = 0$ μόνο θετικές διαταραχές είναι αποδεκτές οπότε αναγκαστικά οι αποδεκτές διαταραχές πρέπει να είναι κατάλληλη υπερθεση αρμονικών $e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$, με διάφορους κυματάριθμους, ώστε να προκύπτει θετική διαταραχή σε όλους του χρόνους. Για να έχω ευστάθεια όμως πρέπει να μπορω με υπέρθεση αρμονικών με $|k| > 1$ να κατασκευάσω καταστάσεις θετικές. Αλλά αυτό είναι αδύνατο διότι κάθε θετική αρχική κατάσταση έχει θετική μέση τιμή, άρα υπάρχουν διαταραχές τουλάχιστον με $k = 0$ και συνεπώς δεν μπορώ να έχω αρχικές καταστάσεις που να είναι ευσταθείς. Π.χ. η αρχική κατάσταση $\cos(2x)$ είναι ευσταθής, αλλά μη πραγματοποιήσιμη. Η $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$ είναι πραγματοποίησιμη αλλά ασταθής διότι διεγείρει μεν τους κυματαριθμούς $k = \pm 2$ που είναι ευσταθείς αλλά και τον $k = 0$ που είναι ασταθής. Στον χρόνο t η διαταραχή είναι $\tilde{\varphi}(x,t) = e^t + e^{-3t}\cos(2x)$.

16. Επιδέχεται το δυναμικό σύστημα χωρικά μη σταθερή κατάσταση ισορροπίας, $\varphi_e(x)$, στο άπειρο διάστημα; Αν επιδέχεται σχεδιάστε την κατάσταση αυτή. Για να το διερευνήσετε αυτό γράψτε την εξίσωση που διέπει την $\varphi_e(x)$ και σχεδιάστε τις "τροχιές" που προκύπτουν στο επίπεδο (φ_e, φ_e'), όπως στα μηχανικά συστήματα, ($\varphi_e' \equiv d\varphi_e/dx$). **[10]**

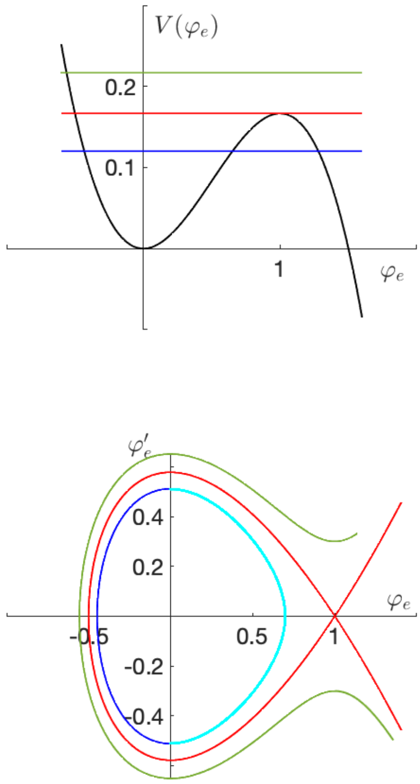
17. Επιδέχεται το δυναμικό σύστημα χωρικά μη σταθερή κατάσταση ισορροπίας, $\varphi_e(x)$, αν το διάστημα περιορισθεί στο $[-L, L]$ και ο πληθυσμός στα σύνορα του χωρίου είναι μηδενικός, $\varphi_e(\pm L) = 0$; Αν επιδέχεται σχεδιάστε την κατάσταση αυτή. **[10]**

Η κατάσταση ισορροπίας ικανοποιεί την εξίσωση

$$\varphi_e'' = -\varphi_e(1 - \varphi_e) \; , \tag{1}$$

και αντιστοιχεί σε μηχανικό σύστημα κίνησης στο δυναμικό:

$$V(\varphi_e) = \frac{\phi_e^2}{2} - \frac{\varphi_e^3}{3} \quad . \tag{2}$$



Σχήμα 2: Το ισοδύναμο δυναμικό και οι τροχιές που προκύπτουν σε κάθε ενεργειακό επίπεδο. Η μόνη τροχιά που εκτείνεται στο άπειρο διάστημα είναι η ομοκλινική τροχιά του σάγματος στο $\varphi_e = 1$. Το $\varphi_e \geq 0$ τμήμα των κλειστών τροχιών (το κυανούν τμήμα των μπλε τροχιών) μπορεί να παράξει πραγματοποιήσιμες πληθυσμιακές καταστάσεις σε κάποιο διάστημα. Οι αντιστοιχούσες καταστάσεις σχεδιάζονται στο Σχ. 3.

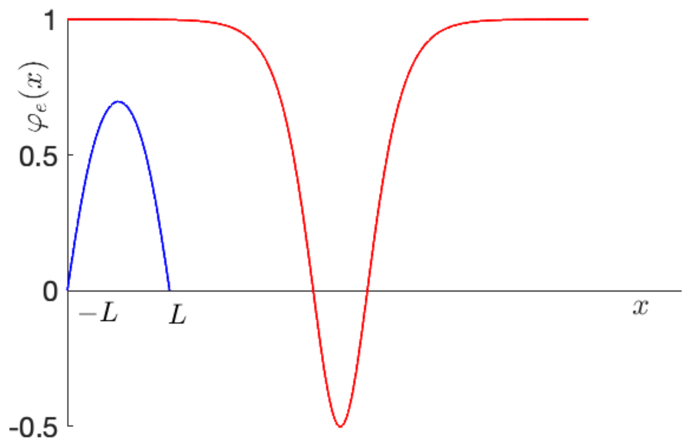
(Τα παρακάτω δεν έχουν ζητηθεί)

Οι κλειστές τροχιές ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{d\phi_e}{dx} = \pm\sqrt{2(V(\varphi_m) - V(\varphi_e))} \ , \tag{3}$$

όπου φ_m η μέγιστη τιμή του πληθυσμού στο διάστημα $[-L, L]$. Συνεπώς:

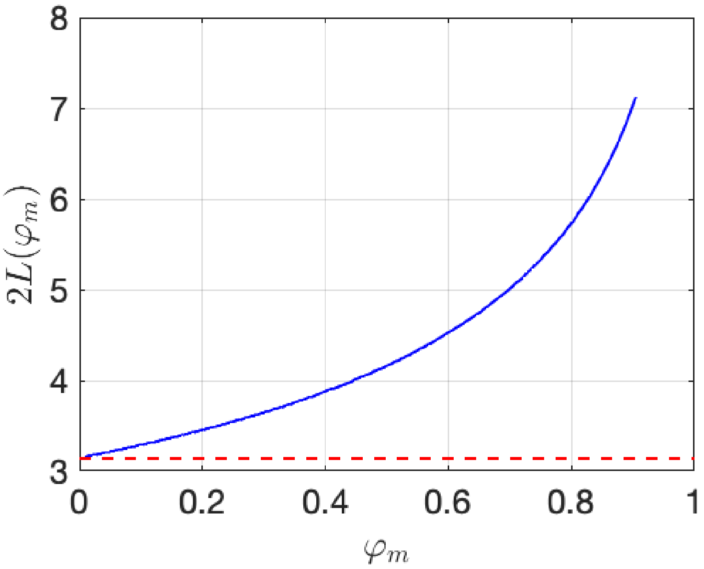
$$\begin{aligned} L &= \int_0^L dx \\ &= \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi_e}{\sqrt{2(V(\varphi_m) - V(\varphi_e))}} \end{aligned}$$



Σχήμα 3: Οι πληθυσμιακές καταστάσεις ισορροπίας που προκύπτουν από την ομοκλινική τροχιά και το κυανό τμήμα της μπλε κλειστής τροχιάς. Η κόκκινη κατάσταση που εκτείνεται στο άπειρο δεν είναι πραγματοποιήσιμη διότι λαμβάνει αρνητικές τιμές. Η μπλέ κατάσταση που εκτείνεται σε ένα πεπερασμένο διάστημα είναι δεκτή.

Από το σχήμα φαίνεται ότι όταν αυξάνει το ενεργειακό επίπεδο αυξάνει ο μέγιστος πληθυσμός, φ_m, αλλά αυξάνει και το L; Αυτό δεν είναι προφανές. (Το L αντιστοιχεί σε τμήμα της περιόδου). Πράγματι όμως αυξάνει, δηλαδή η $L(\varphi_m)$ είναι αύξουσα συνάρτηση. Γιατι συμβαίνει αυτό;

Αλλά κάτι που αμέσως μπορούμε να πούμε είναι ότι το L πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το $\pi/2$, όπως φαίνεται στο Σχ. 4. Καταλαβαίνετε τον λόγο; Συνεπώς δεν μπορεί να υπάρξει χωροεξαρτώμενος στάσιμος πληθυσμός αν το χωρίο έχει μήκος μικρότερο από π. Απομένει να δούμε αν είναι αυτή η κατάσταση ευσταθής η όχι. Τι λέτε;



Σχήμα 4: Το μήκος του χωρίου στο οποίο μπορεί να υπάρξει στάσιμος πληθυσμός πρέπει να είναι μεγαλύτερο από π και είναι αύξουσα συνάρτηση του μέγιστου πληθυσμού φ_m.