ΜΓΔΣ - 1η Εργασία

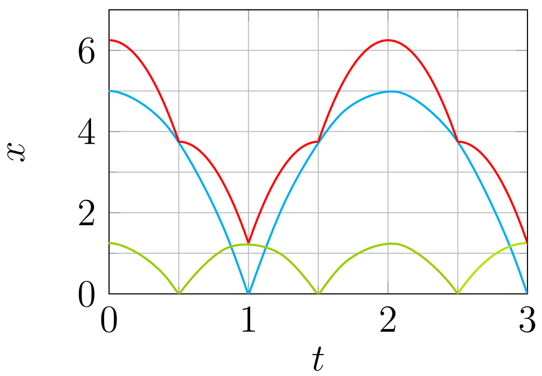
Ηλιάνα Μόσλεϋ ($\hbar$)

1. Η διάσταση του διανυσματικού χώρου των 2x2 πινάκων είναι 4 καθώς χρειάζονται ακριβώς 4 "διανύσματα" βάσης για να κατασκευαστεί κάθε 2x2 πίνακας, π.χ. $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$. Από την άλλη, ο υπόχωρος που αποτελείται από τις δυνάμεις του πίνακα A έχει διάσταση 2, αφού αρκούν τα "διανύσματα" A, I (ταυτοτικός πίνακας 2x2), για να κατασκευάσουν κάθε δύναμη του A (με γραμμικούς συνδιασμούς A και I), σύμφωνα με το θεώρημα Cayley - Hamilton.

2. $e^{\varepsilon\frac{d}{dt}}f(t) = 1 + \varepsilon\frac{df(t)}{dt} + \varepsilon^2\frac{d^2f(t)}{dt^2} + \cdots = f(t+\varepsilon)$

3. Εξίσωση ενέργειας: $\dot{x} = \sqrt{x}$ ή $\dot{x}^2 = x$, (g = 1/2)
Εξίσωση Νεύτωνα: $\ddot{x} = \frac{1}{2} \rightarrow$ με $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, προφανώς η $x(t) = 0$ δεν είναι λύση (και ούτε και οι άλλες). Αν πάμε να φτιάξουμε την εξίσωση ενέργειας απο Νεύτωνα πολλαπλασιάζουμε με $\dot{x}$ εισάγοντας έτσι τις παρείσακτες λύσεις $x(t) = 0$ στην εξίσωση ενέργειας. Γι'αυτό η μόνη φυσικά αποδεκτή λύση είναι $x(t) = \frac{1}{4}t^2$.

4. Οι λύσεις θα έχουν τη μορφή παραβολών που για $x = 0$ "ανακλώνται".



Στο διπλανό σχήμα φαίντονται με μπλε και πράσινο οι θέσεις του σωματιδίου με διαφορετικό αρχικό ύψος και με κόκκινο το άθροισμά τους. Αν το πρόβλημα ήταν γραμμικό θα έπρεπε το άθροισμα των δύο λύσεων να είναι επίσης λύση, σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης. Όμως εδώ φαίνεται οτι δεν είναι γραμμικό αφού η κόκκινη γραμμή δεν μπορεί να περιγράψει την κίνηση του σωματιδίου του προβλήματος (δεν φτανει ποτέ στο πάτωμα, αλλάζει ταχύτητα χωρίς λόγο).

Για την περίοδο:

$$x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2,\ t \leq \frac{T}{2},\ x(\frac{T}{2}) = 0 \Rightarrow h = \frac{1}{2}g\left(\frac{T}{2}\right)^2,\ E = mgh \Rightarrow \boxed{\mathrm{T} = 2\mathrm{g}\sqrt{\frac{2E}{m}}}$$

5. Η εξίσωση από νόμο Νεύτωνα θα είναι:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{k}{r^2}\hat{r} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = -\frac{k}{r^2} \\ mr^2\dot{\varphi} = L \end{cases} \Rightarrow m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{k}{r^2}$$

Θέτουμε $u = \frac{1}{r}$ και το θεωρούμε $u(\varphi)$:

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}u'\dot{\varphi} = -\frac{Lu'}{m} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{L^2u^2u''}{m^2}$$

Άρα τελικά η εξίσωση γίνεται γραμμική ως προς u: $\boxed{u'' + u = \frac{mK}{L^2}}$