Παρασκευή 8 Μαρτίου

$\dot{x} = v(x)$ $\qquad x \in \mathbb{R}$.

$x(0) = x_0$

Peano εάν $v(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση της x τότε υπάρχει μία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $x(0)=x_0$

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v(x)}$$

$$\boxed{\dot{x} = v(x)}$$

$v(x) \neq 0$

x_e $\quad v(x_e) = 0$, $\quad x(t) = x_e \ \forall t$

αν $\quad x(0) = x_e$

$$\int_{x_0}^{x_e} \frac{dx}{v(x)} < \infty \qquad t = \int_{x_0}^{x_e} \frac{dx}{v(x)}$$

αν ο χρόνος αυτός $\int_{x_0}^{x_e} \frac{dx}{v(x)}$ είναι

άπειρος τότε εκε

μοναδικότητα λύσεων

Εάν $v(x)$ είναι Lipschitz όχι $\int_{x}^{x_0} \frac{dx}{v(x)}$ είναι άπειρο

και την μοναδικότητα λύσης $x_e = 0$

Διότι $|v(x)| < K|x|$

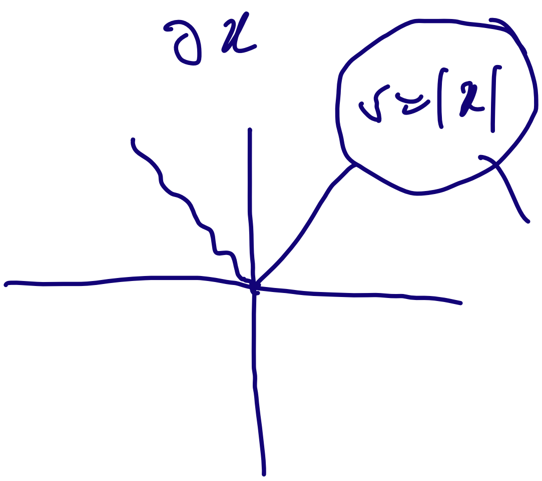
$$\int_{x_0}^{0} \frac{dx}{K|x|} = \infty \Rightarrow \int \frac{dx}{v(x)} = \infty$$

$$|v(x) - v(y)| < K|x - y|$$

$\sim$

να υπάρχει η $\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow$ Lipschitz

αλλά όχι αντίστροφα



είναι Lipschitz αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$

$\dot{x} = v(x, \lambda)$

Lipschitz και είναι συνεχής συνάρτηση του λ

τότε $X(x_0, t, \lambda)$ συνεχής συνάρτηση των x_0, t, λ.

Εάν $v(x, \lambda)$ είναι παρα $\partial_x v$, $\partial_\lambda v$ τότε $x(x_0, t, \lambda)$ είναι παραγωγίσιμη ως x_0, t, λ.

$\rightarrow \dot{x} = v(x) \qquad x(0) = x_0$

$\rightarrow x(t) = x_0 + \int_0^t v(x(s))\, ds$

$$x_{n+1} = x_0 + \int_0^t v(x_n(s))\, ds$$

$X_1 = x_0$

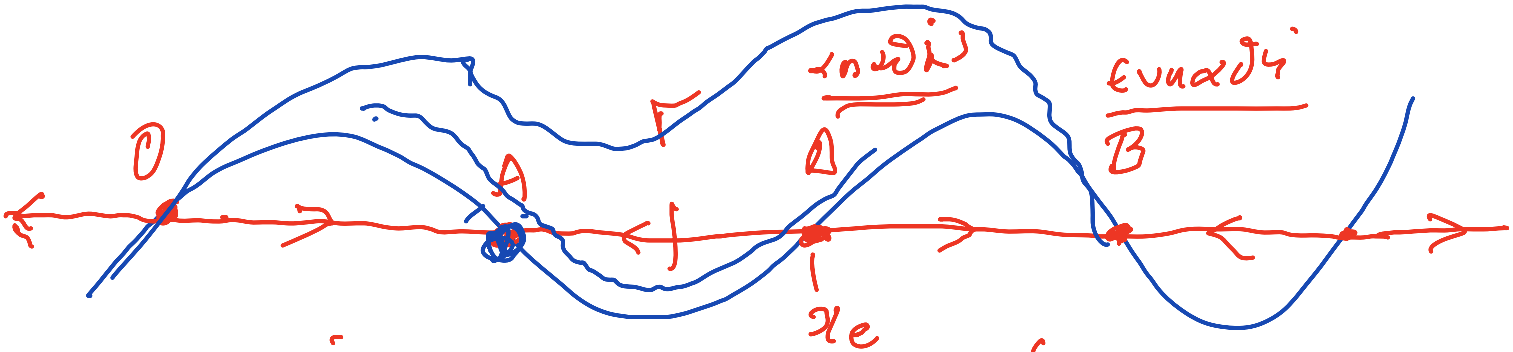
συγκλίνει εάν η $v(x)$ είναι Lipschitz.

---

1 - διάστατα σε ευθεία

$\dot{x} = v(x)$ $\qquad x \in R$

$v(x)$



η τελική
η κατάσταση στα 1-διάστατα
είναι η κατάσταση ισορροπίας ή

άπειρο.

$$x(0) = x_e + x'(0)$$

$$\uparrow$$

$$\delta$$

$$X(t) = x_e + x'(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(x_e + x'(t)\right) = \underline{v\left(x_e + x'(t)\right)}$$

$$\cancel{\frac{dx_e}{dt}}^{\,0} + \frac{dx'}{dt} = \cancel{v(x_e)}^{\,0} + x' \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_e + \ldots$$

$$\boxed{\frac{dx'}{dt} = -\left.\frac{\partial \hat{v}}{\partial x_e}\right|_e x'}$$

$$x'(0) = \delta x_0$$

$$x'(t) = e^{\frac{\partial r}{\partial x_e}\big|_e t}\,\delta x_0$$

Εάν $\frac{\partial v}{\partial x_e}\big|_e > 0$ έχω ασταθές

$\frac{\partial v}{\partial x_e}\big|_e < 0$ έχω ευσταθές

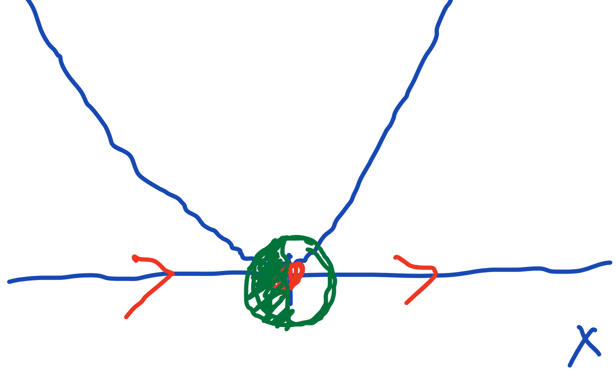
$\frac{\partial v}{\partial x_e}\big|_e = 0$ τότε εκεί

Τι δυναμική θα είναι μη γραμμικής
δε ξέρω και η ευσταθής ή ασταθής
τη κρίνουν από τις μη γραμμικούς
όρους.

$\boxed{\text{Hartman Grobman}}$

$\dot{x} = x^2$ $\quad x(0) = 0$ ίσον

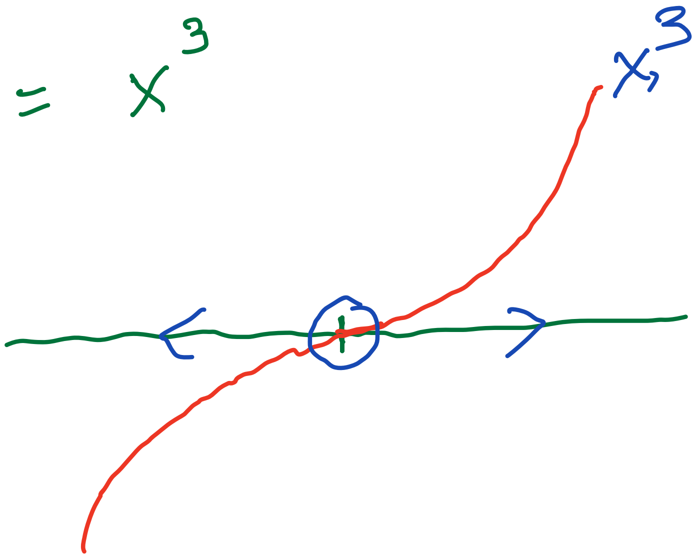
x^2 $\quad \delta\dot{x} = 0$



$$\left.\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}\right|_{x_e} = 2x_e = 0$$

$$\dot{x}' = \left.\frac{\partial V}{\partial x_e}\right|_{x_e} x' = 0$$

$$\dot{x} = x^3$$



$$\underline{\dot{x}' = 0}$$

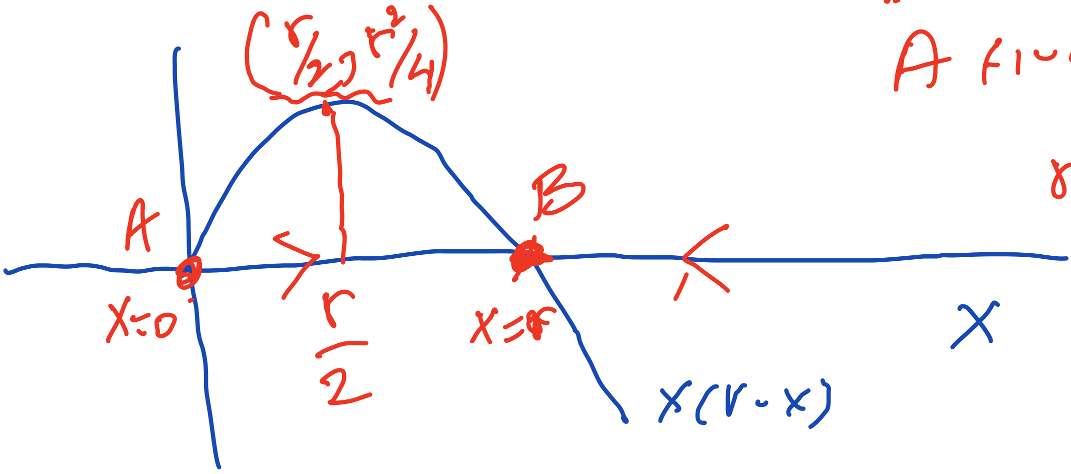
$$\dot{x} = x(r-x)$$

λογιστική εξίσωση

$\underline{x(0) = x_0}$ $\quad x \geq 0$

$\underline{r > 0}$

$$\underline{\dot{x} = rx - x^2}$$



B είναι ευσταθές

A είναι ασταθές

r: φέρων ικανότητα

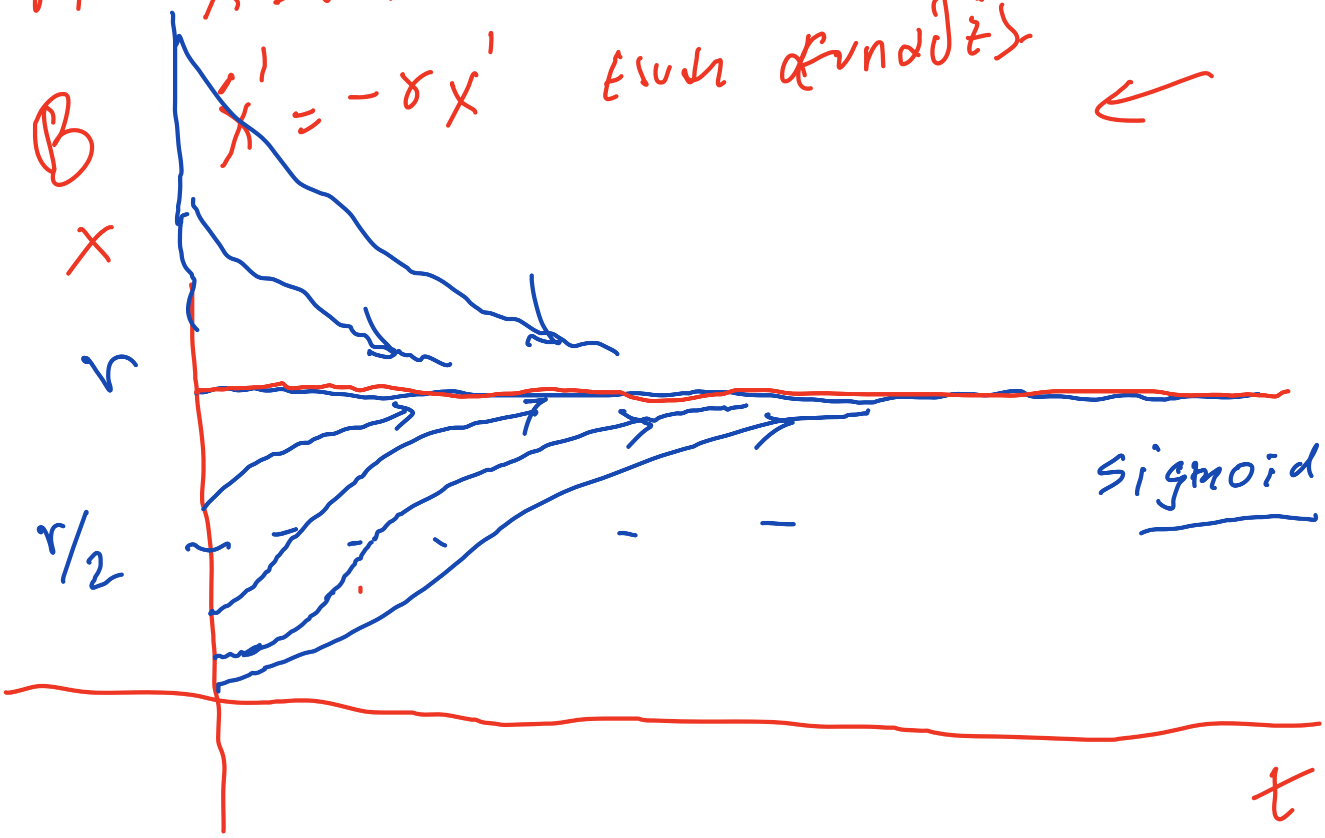
A $\quad \dot{x}' = \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_0 x'$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = r - 2x$

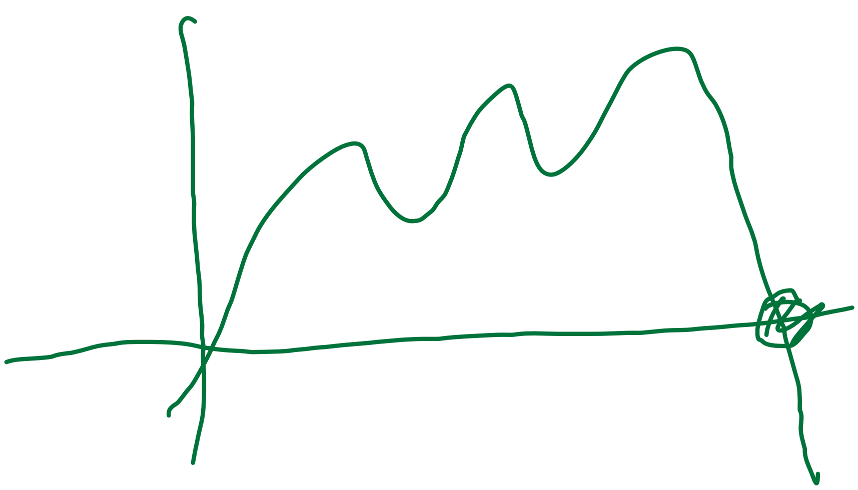
$\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_0 = r > 0$

B $\quad \dot{x}' = \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x_e = r} x'$

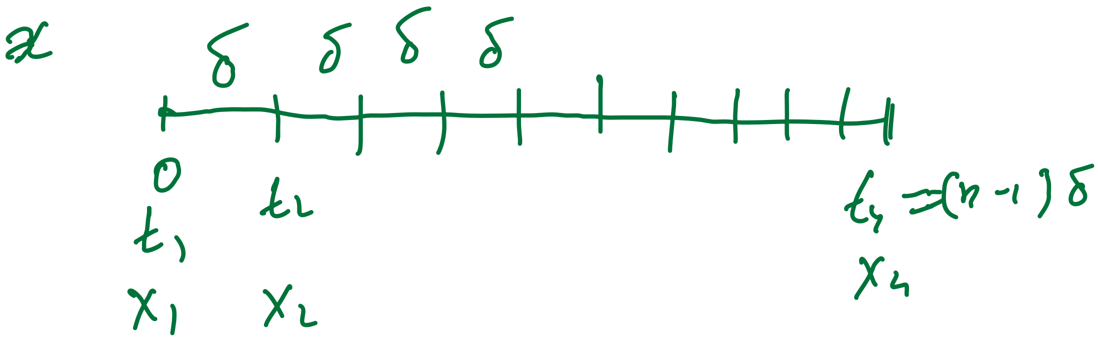
A $\quad \dot{x}' = r x'$ $\quad$ ασταθής

B $\quad \dot{x}' = -r x'$ $\quad$ ευσταθής





$\dot{x} = v(x) \qquad x(0) = x_0$



<u>Euler</u>

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\delta} = v(x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n + \delta v(x_n)$$

$$x_1 = x_0$$

$$\dot{x} = x(1-x) \qquad \frac{dx}{x(1-x)} = dx\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

$$\log\frac{x}{x_0} - \log\frac{1-x}{1-x_0} = t$$

$$\frac{x}{x_0}\,\frac{1-x_0}{1-x} = e^t \qquad \frac{x}{1-x} = \underbrace{\frac{x_0}{1-x_0}}_{\alpha} e^t$$

$$x = \alpha - \alpha x$$

$$x(1+\alpha) = \alpha$$

$$\boxed{x(t) = \frac{x_0}{1-x_0} e^t \frac{1}{1 + \frac{x_0 e^t}{1-x_0}}}$$