ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Παρατηρήσεις σε ορισμένα απλά ερωτήματα των θεμάτων των εξετάσεων Μη Γραμμικής Δυναμικής 2024

Πρώτο διαγώνισμα

- Θεωρήστε το μονοδιάστατο δυναμικό σύστημα που αφορά στο μέγεθος $x(t)$ με $-\infty < t < \infty$:

$$\dot{x} = \frac{1}{1 - tx + x^2},$$

1. Προσδιορίστε το σύνολο των αρχικών τιμών $x(0)$ για τις οποίες το δυναμικό σύστημα παράγει λύσεις.

[5]

Για να υπάρχει λύση και με αυτό εννοούμε να υπάρχει λύση για ένα πεπερασμένο (οχι αναγκαστικά άπειρο) χρονικό διάστημα, δηλαδή στην χρονική περιοχή του 0: $-t_0 < t < t_0$, απαιτείται η $\dot{x} = 1/(1 - tx + x^2)$ να είναι συνεχής συνάρτηση του x και t σε μία περιοχή γύρω από την αρχική συνθήκη και τον αρχικό χρόνο και αυτό αρκεί αν το $x(0)$ δεν είναι σημείο ισορροπίας. Συνεπώς στην περίπτωση εδώ αμέσως προκύπτει λόγω της συνέχειας ότι θα υπάρχει μοναδική λύση για κάθε αρχική συνθήκη.

Αν όμως το $x(0)$ είναι σημείο ισορροπίας (δεν είναι η περίπτωση εδώ) η συνέχεια της $\dot{x}$ δεν αρκεί για την ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων. Χρειάζεται η $\dot{x}$ να είναι τουλάχιστον Lipschitz στο $x(0)$. Βεβαίως αν οι παράγωγοι της $\dot{x}$ ως προς x και t υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις, που είναι πιο εύκολο να διαπιστωθεί, τότε θα είναι και Lipschitz και θα προκύπτει η ύπαρξη και μοναδικότητα.

****

- Θεωρήστε τον μη γραμμικό ταλαντωτή:

$$\ddot{x} + x + \varepsilon(-1 + \alpha x^2 - \beta x^4)\dot{x} = 0\,, \quad \varepsilon \geq 0\,,$$

με $\alpha, \beta \geq 0$ και τις τροχιές που διαγράφει αυτός στο επίπεδο (x, y), όπου $y = \dot{x}$.

7. Αν υπάρχουν οριακοί κύκλοι εξηγήστε που επιτρέπεται αυτοί να βρίσκονται (θα σας βοηθήσει ο υπολογισμός του δείκτη στο/στα σημεία/ο ισορροπίας).

Το δυναμικό σύστημα έχει μόνο ένα σημείο ισορροπίας το $(0, 0)$ το οποίο έχει πάντα δείκτη Ποινκαρε 1. Οι περιοδικές τροχιές έχουν και αυτές δείκτη 1 και συνεπώς πρέπει να περικλείουν το σημείο ισορροπίας.

Δεύτερο διαγώνισμα

- Θεωρήστε το μονοδιάστατο δυναμικό σύστημα που αφορά στο μέγεθος $x(t)$ με $0 \le t < \infty$:

$$\dot{x} = \sqrt{1-x^2}\,, \quad x(0) = \alpha\,.$$

1. Συζητήστε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα λύσεων του δυναμικού συστήματος για όλες τις τιμές των $|\alpha| < 1$. **[5]**

   Το $x(0) = \alpha$ δεν είναι σημείο ισορροπίας και η συνέχεια της $\sqrt{1-x^2}$ βεβαιώνει την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης για κάθε $|\alpha| < 1$.

2. Προσδιορίστε λύση του δυναμικού συστήματος όταν είναι $\alpha = -1$. Είναι η λύση μοναδική; Εάν όχι προσδιορίστε μια άλλη λύση. **[7]**

   Το $x(0) = -1$ είναι σημείο ισορροπίας και η $x(t) = -1$ είναι μία λύση. Η $\sqrt{1-x^2}$ δεν είναι Lipschitz εκεί (η παράγωγος της απειρίζεται) και έτσι η λύση δεν είναι αναγκαστικά μοναδική. Πράγματι η $x(t) = -\cos(t)$ είναι μία άλλη λύση.

3. Προσδιορίστε λύση του δυναμικού συστήματος όταν είναι $\alpha = 1$. Είναι η λύση μοναδική; Εάν όχι προσδιορίστε μια άλλη λύση. **[8]**

   Το $x(0) = 1$ είναι σημείο ισορροπίας και η $x(t) = 1$ είναι μία λύση. Η $\sqrt{1-x^2}$ δεν είναι Lipschitz εκεί (η παράγωγος της απειρίζεται) και έτσι η λύση δεν είναι αναγκαστικά μοναδική. Άλλη λύση όμως δεν μπορεί να υπάρχει διότι $\dot{x} \ge 0$ και η $x(t)$ είναι αύξουσα και το $x \le 1$.

****

- Θεωρήστε δύο πληθυσμούς x, y που αλληλεπιδρούν μέσω της αδιαστατικοποιημένης δυναμικής:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - \beta x^2 - xy \\ \dot{y} &= -\beta y + \beta xy\,,\end{aligned}$$

με $\beta > 0$ και $x \ge 0$, $y \ge 0$.

5. Δείξτε ότι είναι αν αρχικά $x(0) \ge 0$ και $y(0) \ge 0$ τότε για κάθε χρόνο, t, είναι $x(t) \ge 0$ και $y(t) \ge 0$. **[5]**

   Ο άξονας $x = 0$ είναι γραμμή μηδενικής κλίσης $\dot{x} = 0$ και συνεπώς οι τροχιές δεν μπορούν να τμήσουν υπό οποιαδήποτε γωνία τον άξονα αυτόν και συνεπώς αν αρχικά $x(0) > 0$ θα είναι πάντα $x(t) > 0$. Ομοίως ο άξονας $y = 0$ είναι γραμμή μηδενικής κλίσης $\dot{y} = 0$ και συνεπώς οι τροχιές δεν μπορούν να τμήσουν υπό οποιαδήποτε γωνία τον άξονα αυτόν και συνεπώς αν αρχικά $y(0) > 0$ θα είναι πάντα $y(t) > 0$.

****

- Θεωρήστε τον μη γραμμικό ταλαντωτή:

$$\ddot{x} + x + 2\varepsilon x\dot{x} = 0\,, \quad \varepsilon \ge 0\,,$$

και τις τροχιές που παράγει στο επίπεδο (x, y), όπου $y = \dot{x}$.

9. Αν υπάρχουν περιοδικές τροχιές εξηγήστε που επιτρέπεται αυτές να βρίσκονται (θα σας βοηθήσει ο υπολογισμός του δείκτη στο σημείο ισορροπίας). **[5]**

   Το δυναμικό σύστημα έχει μόνο ένα σημείο ισορροπίας το $(0,0)$ το οποίο έχει πάντα δείκτη Ποινκαρε 1. Οι περιοδικές τροχιές έχουν και αυτές δείκτη 1 και συνεπώς πρέπει να περικλείουν το σημείο ισορροπίας.

****

- Θεωρήστε το δυναμικό σύστημα στο επίπεδο σε πολικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (r - r^2)(r - f(\vartheta)) \\ \dot{\vartheta} &= r, \end{aligned}$$

  με $f(\vartheta) = \mu \sin^2(\vartheta)$.

20. Προσδιορίστε πώς είναι η ροή για $r \gg 1$. Τι συμπέρασμα μπορείτε να εξάγετε από την παρατήρηση αυτή; **[10]**

    Όταν είναι $r \gg 1$ είναι $\dot{r} < 0$. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι λύσεις είναι φραγμένες, και όλες οι τροχιές καταλήγουν εντός ενός χωρίου $r < R_0$ με κατάλληλο R_0. Από το θεώρημα Poincare-Bendixson οι τροχιές μπορεί να είναι περιοδικές τροχιές ή θα καταλήγουν σε σημεία ισορροπίας και οριακούς κύκλους εντός του χωρίου. Εδώ υπάρχει μόνο ενα σημείο ισορροπίας. Το πόσοι είναι οι οριακοί κύκλοι είναι όμως άδηλο.