ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση Μη Γραμμικής Δυναμικής

22/6/2024

Σύνολο μορίων 210

- Θεωρήστε το μονοδιάστατο δυναμικό σύστημα που αφορά στο μέγεθος $x(t)$ με $-\infty < t < \infty$:

$$\dot{x} = \frac{1}{1 - tx + x^2},$$

1. Προσδιορίστε το σύνολο των αρχικών τιμών $x(0)$ για τις οποίες το δυναμικό σύστημα παράγει λύσεις.
[5]

2. Προσδιορίστε τη λύση του δυναμικού συστήματος με τη μέθοδο Picard με αρχική συνθήκη την

$$x(0) = 0.$$

[10]

****

- Ο διαδότης μίας περιόδου $T = 2\pi$ ενός γραμμικού δυναμικού συστήματος στο επίπεδο (x, y) είναι:

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} 5 & -17 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

3. Σχεδιάστε την εξέλιξη του τετραγωνικού χωρίου με κορυφές τα σημεία $A : (0,0)$, $B : (1,0)$, $\Gamma : (1,1)$, $\Delta : (0,1)$ μετά από χρόνο $T = 2\pi$. Ποια θα είναι η επιφάνεια του χωρίου στον χρόνο $T = 2\pi$; **[5]**

4. Ποιος είναι ο χαρακτηριστικός εκθέτης Lyapunov του συστήματος; **[5]**

****

- Θεωρήστε τον μη γραμμικό ταλαντωτή:

$$\ddot{x} + x + \varepsilon(-1 + \alpha x^2 - \beta x^4)\dot{x} = 0\,, \quad \varepsilon \geq 0\,,$$

με $\alpha, \beta \geq 0$ και τις τροχιές που διαγράφει αυτός στο επίπεδο (x, y), όπου $y = \dot{x}$.

5. Προσδιορίστε τα/το σημεία/ο ισορροπίας του ταλαντωτή καθώς και τη γραμμική ευστάθειά των/του για κάθε τιμή του $\varepsilon \geq 0$. **[5]**

6. Σχεδιάστε τις τροχιές του δυναμικού συστήματος περί των/του σημείων/ου ισορροπίας, σε κάθε περίπτωση, σημειώνοντας τις αναλλοίωτες πολλαπλότητες όταν αυτές υπάρχουν (φροντίστε να σχεδιάσετε τις πολλαπλότητες για τις τιμές $\varepsilon = 0, 2$). **[10]**

7. Αν υπάρχουν οριακοί κύκλοι εξηγήστε που επιτρέπεται αυτοί να βρίσκονται (θα σας βοηθήσει ο υπολογισμός του δείκτη στο/στα σημεία/ο ισορροπίας). **[5]**

8. Γράψτε τη διαφορική εξίσωση που διέπει την εξέλιξη του όγκου χωρίων διαφορικής διάστασης αρχικών συνθηκών στο επίπεδο (x, y) για $\varepsilon > 0$. **[5]**

9. Εξ' αυτού δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και $\alpha^2 < 4\beta$ ο ταλαντωτής δεν μπορεί να έχει περιοδικές τροχιές και επομένως δεν μπορεί να χρησιμεύσει ως ρολόϊ. **[10]**

10. Γράψτε τη δυναμική σε πολικές συντεταγμένες (r, ϑ), με $x = r\cos\vartheta$ και $y = r\sin\vartheta$. **[10]**

11. Θεωρήστε τώρα ότι είναι $0 < \varepsilon \ll 1$. Κάνοντας χρήση της δυναμικής σε πολικές συντεταγμένες γράψτε σε προσέγγιση πρώτης τάξης την αδρομερή δυναμική που διέπει τις μέσες τιμές των $(\overline{r}, \overline{\vartheta})$, όπου $\overline{f} = \int_{t-\pi}^{t+\pi} dt\ f(t)/(2\pi)$. Δίδεται ότι: **[10]**

$$\overline{\sin^2 t} = \frac{1}{2}\,, \overline{\sin^2 t\cos^2 t} = \frac{1}{8}\,,\ \overline{\sin^2 t\cos^4 t} = \frac{1}{16}.$$

12. Δείξτε ότι η αδρομερής δυναμική προβλέπει ότι ο ταλαντωτής έχει δύο οριακούς κύκλους όταν είναι $\alpha^2 > 8\beta$ και $\varepsilon << 1$. **[5]**

13. Προσδιορίστε τους χαρακτηριστικούς εκθέτες Lyapunov που χαρακτηρίζουν την ευστάθεια των δύο αυτών οριακών κύκλων. Σχεδιάστε τη ροή στο επίπεδο (x, y). **[10]**

14. Περιγράψτε τη συμπεριφορά του συστήματος στην αδρομερή δυναμική όταν είναι $\alpha^2 = 8\beta$ και όταν $\alpha^2 < 8\beta$. **[10]**

****

- Θεωρήστε το δυναμικό σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -x + x^2 - \varepsilon y x,\end{aligned}$$

με $\varepsilon = 1/10$.

15. Προσδιορίστε τα σταθερά σημεία του δυναμικού συστήματος και προσδιορίστε την ευστάθειά τους. **[5]**

16. Σχεδιάστε τις ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες στη γραμμική τους προσέγγιση. **[5]**

17. Σχεδιάστε τις γραμμές μηδενικής κλίσης και εξ' αυτού τη ροή που παράγεται από αυτό το δυναμικό σύστημα. **[5]**

18. Σχεδιάστε την εξέλιξη των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων στη μη γραμμική τους προσέγγιση. **[10]**

19. Σχεδιάστε τώρα τη ροή όταν είναι $\varepsilon = 0$. **[10]**

****

- Ένα μοντέλο που περιγράφει τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε πλάσμα κατά τη διεύθυνση x είναι το Adlam – Allen (AA), που μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη κανονικοποιημένη μορφή:

$$\begin{aligned} u_{tt} + w_{xx} + \frac{1}{2}(w^2)_{xx} &= 0, \\ w_{xx} - w - u - uw &= 0, \end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις $u(x,t)$ και $w(x,t)$ εκφράζουν τις διαταραχές της αντίστροφης πυκνότητας του πλάσματος και του μαγνητικού πεδίου, αντίστοιχα, από μια ομογενή και στάσιμη κατάσταση, με $u, w \to 0$ για $x \to \pm\infty$. Ζητούνται:

20. Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις που ικανοποιούν οι συναρτήσεις u και w. **[5]**

21. Η σχέση διασποράς. **[5]**

22. Ποια είναι η μορφή της σχέσης διασποράς στο όριο των μακρών κυμάτων ($k \ll 1$); Σε αυτή την περίπτωση, ποια είναι η ταχύτητα φάσης και η ταχύτητα ομάδας; **[10]**

23. Αναζητήστε λύσεις οδεύοντος κύματος, της μορφής:

$$u(x,t) = u(\xi), \quad w(x,t) = w(\xi), \quad \xi = x - vt.$$

Να μελετηθεί ποιοτικά το δυναμικό σύστημα που προκύπτει, και να εξαχθούν οι συνθήκες υπό τις οποίες το σύστημα AA υποστηρίζει λύσεις σολιτονίων. **[15]**

****

- Έστω η εξίσωση Hopf για το πεδίο $u(x,t)$,

$$u_t + uu_x = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

εφοδιασμένη με την αρχική συνθήκη:

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 1 - x, & x \in [0,\ 1] \\ 0, & x \geq 1\ . \end{cases}$$

24. Προσδιορίστε και σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές καμπύλες επί των οποίων το πεδίο λαμβάνει σταθερές τιμές. **[5]**

25. Προσδιορίστε το χρόνο θραύσης. **[5]**

26. Σχεδιάστε το πεδίο τις χρονικές στιγμές $t = 0$, $t = 1/2$, $t = 1$ και $t = 2$. **[10]**

27. Να βρεθούν η κλασσική και η ασθενής λύση της εξίσωσης. **[15]**