ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση Μη Γραμμικής Δυναμικής

25/6/2024

Σύνολο μορίων 245(+50)

- Θεωρήστε το μονοδιάστατο δυναμικό σύστημα που αφορά στο μέγεθος $x(t)$ με $0 \leq t < \infty$:

$$\dot{x} = \sqrt{1-x^2}\ , \quad x(0) = \alpha\ .$$

1. Συζητήστε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα λύσεων του δυναμικού συστήματος για όλες τις τιμές των $|\alpha| < 1$. **[5]**
2. Προσδιορίστε λύση του δυναμικού συστήματος όταν είναι $\alpha = -1$. Είναι η λύση μοναδική; Εάν όχι προσδιορίστε μια άλλη λύση. **[7]**
3. Προσδιορίστε λύση του δυναμικού συστήματος όταν είναι $\alpha = 1$. Είναι η λύση μοναδική; Εάν όχι προσδιορίστε μια άλλη λύση. **[8]**

****

- Θεωρήστε δύο πληθυσμούς x, y που αλληλεπιδρούν μέσω της αδιαστατικοποιημένης δυναμικής:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - \beta x^2 - xy \\ \dot{y} &= -\beta y + \beta xy\ , \end{aligned}$$

με $\beta > 0$ και $x \geq 0$, $y \geq 0$.

4. Τι περιγράφει αυτή η δυναμική; Η παράμετρος β ποιες φυσικές διεργασίες ποσοτικοποιεί; **[5]**
5. Δείξτε ότι είναι αν αρχικά $x(0) \geq 0$ και $y(0) \geq 0$ τότε για κάθε χρόνο, t, είναι $x(t) \geq 0$ και $y(t) \geq 0$. **[5]**
6. Προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας όταν είναι $\beta < 1$ και $\beta > 1$ και σχεδιάστε αντιστοίχως τις καμπύλες μηδενικής κλίσης και τις αντίστοιχες ροές. **[15]**
7. Προσδιορίστε την εξέλιξη των πληθυσμών για κάθε β. Υπό ποιές προϋποθέσεις υπάρχει ειρηνική συνύπαρξη; **[10]**

****

- Θεωρήστε τον μη γραμμικό ταλαντωτή:

$$\ddot{x} + x + 2\varepsilon x\dot{x} = 0\ , \quad \varepsilon \geq 0\ ,$$

και τις τροχιές που παράγει στο επίπεδο (x, y), όπου $y = \dot{x}$.

8. Προσδιορίστε το/τα σημείο/α ισορροπίας του ταλαντωτή καθώς και τη γραμμική ευστάθειά του/των για κάθε τιμή του $\varepsilon \geq 0$. **[5]**

9. Αν υπάρχουν περιοδικές τροχιές εξηγήστε που επιτρέπεται αυτές να βρίσκονται (θα σας βοηθήσει ο υπολογισμός του δείκτη στο σημείο ισορροπίας). **[5]**

10. Γράψτε τη διαφορική εξίσωση που διέπει την εξέλιξη του όγκου χωρίων διαφορικής διάστασης αρχικών συνθηκών στο επίπεδο (x, y) για $\varepsilon > 0$. **[5]**

11. Γράψτε τη δυναμική σε πολικές συντεταγμένες (r, ϑ), με $x = r\cos\vartheta$ και $y = r\sin\vartheta$. **[10]**

12. Θεωρήστε τώρα ότι είναι $0 < \varepsilon \ll 1$. Κάνοντας χρήση της δυναμικής σε πολικές συντεταγμένες γράψτε σε πρώτη τάξης προσέγγιση την αδρομερή δυναμική που διέπει τις μέσες τιμές των $(\overline{r}, \overline{\vartheta})$, όπου $\overline{f} = \int_{t-\pi}^{t+\pi} dt\, f(t)/(2\pi)$. **[10]**

13. Τι κίνηση προβλέπει η αδρομερής δυναμική; **[5]**

14. Γράψτε το δυναμικό σύστημα στις μεταβλητές Lienard (x, z)
$$z = \frac{y}{\varepsilon} + x^2 \,.$$
[5]

15. Σχεδιάστε τη ροή στο επίπεδο (x, z) επάνω στις καμπύλες μηδενικής κλίσης καθώς και στον ενδιάμεσο χώρο. Τι συμπεραίνετε για τη ροή στα συμμετρικά ως προς τον άξονα z σημεία; **[10]**

16. Δείξτε ότι η δυναμική έχει τη συμμετρία $x \to -x$, $t \to -t$, , δηλαδή εάν η $x(t)$ είναι λύση, τότε και η $-x(-t)$ είναι λύση. Εξ' αυτού τι συμπεραίνετε για την τροχιά που παράγεται για θετικούς και αρνητικούς χρόνους όταν αρχικά είναι $x(0) = 0$; **[10]**

* * *

Από το σημείο αυτό και μετά θεωρήστε ότι είναι $\varepsilon >> 1$ και οι αρχικές συνθήκες περιορίζονται στις $x(0) = 0$ και $z(0) > 0$.

17. Δείξτε χρησιμοποιώντας την παραπάνω συμμετρία ότι σε κάθε περίπτωση με $z(0) > 0$ προκύπτει αναγκαστικά περιοδική τροχιά. Σχεδιάστε την περιοδική τροχιά στο επίπεδο (x, z) όταν είναι $(x(0), z(0)) = (0, 1)$; **[10]**

18. Δείξτε όταν είναι $\varepsilon >> 1$ η περίοδος της κίνησης είναι σε πρώτη τάξη ως προς ε, $T \approx 4\varepsilon x_{\text{max}}$, όπου x_{max} το μέγιστο πλάτος της περιοδικής κίνησης. **[10]**

19. **bonus ερώτημα:** Η περιοδική τροχιά για $z(0) \to \infty$ σε καλή προσέγγιση αποτελείται από την ευθεία $z = z(0)$ και την παραβολή $z = x^2 - \delta_\infty$ (κάτω από την καμπύλη-παραβολή μηδενικής κλίσης), με κατάλληλο δ_∞ που υπαγορεύεται από τη δυναμική. Εξ' αυτού δείξτε ότι είναι $\delta_\infty = -\min(z) = 1/(2\varepsilon^2)$. Επιτρέποντας αρχικές τιμές $z(0) < 0$ δείξτε ότι αν είναι $z(0) \geq -\delta_\infty$ υπάρχουν περιοδικές τροχιές ενώ αν είναι $z(0) < -\delta_\infty$ δεν υπάρχουν περιοδικές τροχιές και οι λύσεις απειρίζονται. **[50]**

****

- Θεωρήστε το δυναμικό σύστημα στο επίπεδο σε πολικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= (r-r^2)(r-f(\vartheta))\\ \dot{\vartheta} &= r,\end{aligned}$$

με $f(\vartheta) = \mu \sin^2(\vartheta)$.

20. Προσδιορίστε πώς είναι η ροή για $r \gg 1$. Τι συμπέρασμα μπορείτε να εξάγετε από την παρατήρηση αυτή; **[10]**

21. Προσδιορίστε έναν οριακό κύκλο της δυναμικής. Ποια η περίοδος της κίνησης επί αυτού του οριακού κύκλου; **[5]**

22. Προσδιορίστε σε πολικές συντεταγμένες το περιοδικό γραμμικό σύστημα που διέπει τροχιές με αρχικές συνθήκες πλησίον του οριακού κύκλου (η σταθερότητα μπορεί να διερευνηθεί σε πολικές συντεταγμένες εκτός αν αφορά την ευστάθεια της τροχιάς $r = 0$). **[10]**

23. Προσδιορίστε την ορίζουσα του διαδότη του γραμμικού συστήματος που διέπει τις διαταραχές στον οριακό κύκλο για μία περίοδο της κίνησης του οριακού κύκλου. **[5]**

24. Προσδιορίστε όλους τους χαρακτηριστικούς εκθέτες Lyapunov και δείξτε ότι ο οριακός κύκλος είναι ευσταθής αν $\mu < 2$. **[10]**

25. Κάνετε ένα σκίτσο για το πως αναμένετε να είναι η ροή όταν είναι $\mu < 2$. **[5]**

26. Δείξτε ότι όταν είναι $\mu > 2$ αναγκαστικά θα υπάρχει και δεύτερος οριακός κύκλος. Σχεδιάστε τον ποιοτικά. **[10]**

****

- Κύματα πίεσης στις αρτηρίες μπορούν να περιγραφούν από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}A_t + (Av)_x &= 0, \quad \text{(εξίσωση συνέχειας)}\\ v_t + vv_x &= -p_x, \quad \text{(εξίσωση Euler)}\\ p &= (A - A_0) + A_{tt},\end{aligned}$$

όπου $A(x,t)$ είναι η διατομή της αρτηρίας, $p(x,t)$ και $v(x,t)$ αναπαριστούν την πυκνότητα και την ταχύτητα του αίματος, και $p(x,t)$ είναι η αρτηριακή πίεση. Η ομογενής λύση την οποία θα πρέπει να διαταράξετε περιγράφεται από τις τιμές των μεγεθών $p_0 = 0, A_0, v_0 = 0$.

27. Γράψτε τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις που ικανοποιούν οι διαταραχές των συναρτήσεων p, v, A, γύρω από την ομογενή και στάσιμη κατάστασή τους. **[5]**

28. Βρείτε τη σχέση διασποράς. **[5]**

29. Ποια είναι η μορφή της σχέσης διασποράς στο όριο των μακρών κυμάτων ($k \ll 1$); Σε αυτή την περίπτωση, ποια είναι η ταχύτητα φάσης και η ταχύτητα ομάδας; **[10]**

****

- Έστω η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS):

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + s|u|^2 u = 0, \quad s = \pm 1.$$

Αναζητήστε στάσιμες λύσεις της μορφής:

$$u(x,t) = \Phi(x)\exp(i\omega t),$$

όπου $\Phi(x)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση και $\omega \in \mathbb{R}$.

30. Να μελετηθεί ποιοτικά το δυναμικό σύστημα που προκύπτει. **[10]**

Στη συνέχεια να εξαχθούν οι συνθήκες υπό τις οποίες η NLS υποστηρίζει:

31. Λύσεις σολιτονίων, με $\Phi(x) \to 0$ καθώς $x \to \pm\infty$, για $s = +1$, **[10]**
και

32. Λύσεις τύπου kink (ή «σκοτεινών» σολιτονίων), με $\Phi(x) \to \text{const.}$ καθώς $x \to \pm\infty$, για $s = -1$. **[10]**