Σημειώσεις Μη Γραμμικής Δυναμικής 2024

8 Απριλίου 2024

1. Το θεώρημα της επιστροφής του Poincaré (Poincaré recurrence theorem): Εάν το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = v(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, εξελίσσεται σε ένα φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^n$ διατηρώντας τον όγκο (είναι δηλαδή, $\partial v_i / \partial x_i = 0$), τότε για κάθε $x_0 \in D$, υπάρχει χρόνος, t, που το δυναμικό σύστημα επιστρέφει στην περιοχή της αρχικής του κατάστασης, δηλαδή υπάρχει t, ώστε $x(t, x_0) \in U_{x_0}$, για κάθε περιοχή του σημείου x_0, U_{x_0}. (Μετρικά: για κάθε ε , υπάρχει t, έτσι ώστε $|x(t, x_0) - x_0| < \varepsilon$.)

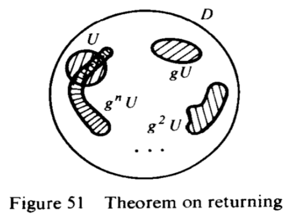
   Για Χαμιλτονιανά συστήματα $2n$ βαθμών ελευθερίας το D είναι η $2n - 1$ διαστάσεων επιφάνεια σταθερής ενέργειας στον χώρο των φάσεων.

   Άσκηση: για το σύστημα δύο ταλαντωτών $\ddot{x} + x = 0$, $\ddot{y} + 2y = 0$, με αρχικές συνθήκες $x(0) = y(0) = 1$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ σχεδιάστε τον χρόνο επαναφοράς στην περιοχή της αρχικής του κατάσταση στον χώρο των φάσεων συναρτήσει του εύρους της περιοχής, όταν το εύρος της περιοχής είναι $\varepsilon = 1/10^n$, $n = 1, \cdots, 6$.

   Απόδειξη:

   Η εξέλιξη της κατάστασης x από τον χρόνο 0 στον χρόνο t ορίζει την συνεχή απεικόνιση $x \to g^t(x)$, η οποία είναι συνεχής συνάρτηση και του x και του t και λόγω της μοναδικότητας των λύσεων είναι $1 - 1$ και αντιστρέψιμη. Επίσης, λόγω της μοναδικότητας των λύσεων του δυναμικού συστήματος είναι $g^{t+s}(x) = g^t(g^s(x)) = g^s(g^t(x))$, που γράφεται και ως $g^{t+s} = g^t \circ g^s = g^s \circ g^t$, και επειδή g^0 είναι η ταυτοτική συνάρτηση, I, και $I = g^0 = g^{t-t} = g^t \circ g^{-t}$, η αντίστροφη συνάρτηση του g^t είναι η g^{-t}.

   Λαμβάνουμε μία οποιαδήποτε περιοχή του σημείου x, U, που ανήκει στο D και τις διαδοχικές απεικονίσεις της περιοχής αυτής $g^n(U)$, $n = 1, 2, \cdots$, που και αυτές ανήκουν εξ υποθέσεως στο D. Ο όγκος της περιοχής είναι V_U, ενώ ο όγκος του D είναι εξ υποθέσεως πεπερασμένος. Αν οι διαδοχικές απεικονίσεις του U δεν είχαν κοινά σημεία τότε, δεδομένου ότι είναι $V_{g^n(U)} = V_U$ για κάθε n, ο όγκος όλων των διαδοχικών $g^n(U)$, $V_{\bigcup_{n=1}^{\infty} g^n(U)}$, θα απέκλινε, κάτι που είναι αντίθετο με την υπόθεση ότι ο D έχει πεπερασμένο όγκο.

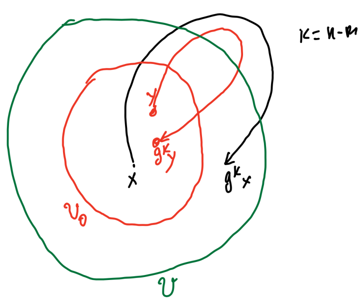


Σχήμα 1: Από το βιβλίο του V. I. Arnold "Mathematical Methods of Classical Mechanics", σελ. 72.

Συνεπώς θα πρέπει οι διαδοχικές απεικονίσεις της U να τέμνονται, δηλαδή υπάρχουν χρόνοι $m > k$ τέτοιοι ώστε $g^m(U) \cap g^k(U) \neq \varnothing$. Αυτό συνεπάγεται, εφαρμόζοντας την απεικόνιση g^{-k} σε αυτά τα σύνολα, ότι και τα σύνολα $g^n(U)$, $n = m - k$, και U έχουν κοινά στοιχεία (βλ. Σχ. 1). Εάν $y \in g^n(U) \cap U$, τότε το $y \in U$ που είναι στην περιοχή του x θα επιστρέψει τη χρονική στιγμή n στην περιοχή U του x (βλ. Σχ. 2). Πρέπει να αποδείξουμε όμως ότι το x επιστρέφει στην περιοχή του. Αν $g^n(x) \in U$ έχει αποδειχθεί η πρόταση, αν όμως $g^n(x) \notin U$, τότε εφαρμόζουμε τις διαδοχικές απεικονίσεις σε μία αρκούντως μικρότερη περιοχή του x, $U_0 \subset U$, εξασφαλίζοντας αφενός ότι $g^n(y) \in U_0$ και αφετέρου, επειδή η $g^n(y)$ είναι συνεχής ως προς y, το $g^n(x)$ να ανήκει στο U (βλ. Σχ. 2).

Επειδή δε το σύστημα είναι αυτόνομο μπορεί να επαναληφθεί η επιχειρηματολογία στο $g^n(x)$ και έτσι προκύπτει ότι υπάρχει χρόνος m τέτοιος ώστε το $g^m(g^n(x))$ να είναι στην περιοχή του $g^n(x)$ και συνεπώς και πάλι στην περιοχή του x, κ.ο.κ.

<u>Άσκηση</u>: Εξετάστε το θ. επιστροφής στο δυναμικό σύστημα $\dot{x} = 1$ όταν $t \in [0, 1]$ και $\dot{x} = 0$ $t \notin [0, 1]$.



Σχήμα 2: Με κατάλληλη επιλογή του $U_0 \subset U$ μπορούμε να βεβαιώσουμε ότι $g^{n-m}(x) \in U$, για κάθε U.