

Σχήμα 1: Τα σημεία ισορροπίας της λογιστικής εξίσωσης με ρυθμό αλίευσης  $\alpha$  συναρτήσει του ρυθμού αλίευσης  $\alpha$ . Για  $\alpha < 1/4$  υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας το πάνω σταθερό και το κάτω ασταθές. Τα βέλη δείχνουν το πρόσημο του  $\dot{x}$  (όταν θετικό ο πληθυσμός  $x$  μεγαλώνει, όταν αρνητικό μειώνεται). Δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας για  $\alpha > 1/4$  και ο πληθυσμός αφανίζεται ανεξαρτήτως από πόσο μεγάλος ήταν αρχικά. Το διάγραμμα των σημείων ισορροπίας συναρτήσει της παραμέτρου  $\alpha$  λέγεται και διάγραμμα διακλάδωσης (bifurcation diagram). Στο σημείο  $\alpha = 1/4$  παρουσιάζεται δομική αστάθεια του προβλήματος διότι αλλάζει η τοπολογία της ροής (τα βέλη που δείχνουν τις τάσεις μεταβολής).

## Σημειώσεις μη γραμμικής δυναμικής

### Η λογιστική εξίσωση με σταθερή αλίευση

Εξετάζουμε τη λογιστική εξίσωση με αλίευση με ρυθμό  $\alpha$

$$\dot{x} = f(x, \alpha) \quad , \quad f(x, \alpha) = x(1 - x) - \alpha .$$

Τα σημεία ισορροπίας ικανοποιούν

$$f(x_e, \alpha) = 0$$

και είναι τώρα συναρτήσει της παραμέτρου:

$$x_e = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha} ,$$

το μεγαλύτερο είναι ευσταθές και το μικρότερο ασταθές, αλλά παρατηρούμε ότι όταν  $\alpha > 1/4$  έχουμε δομική μεταβολή του συστήματος: εξαφανίζονται τα σημεία ισορροπίας και ο πληθυσμός αφανίζεται πάντοτε ανεξαρτήτως του πόσο αρχικά ήταν. Τα σημεία ισορροπίας συναρτήσει του ρυθμού αλίευσης  $\alpha$  έχουν σχεδιασθεί στο διάγραμμα διακλαδώσεων Σχ. 1

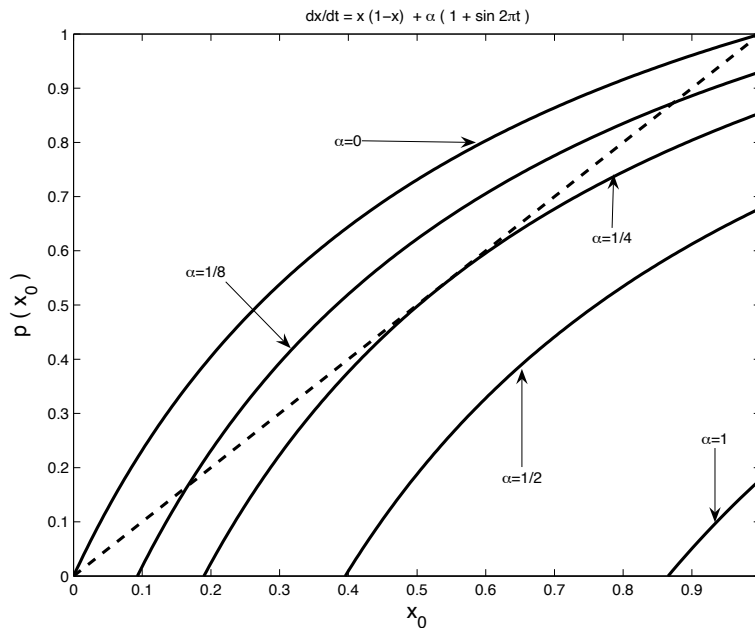
### Η λογιστική εξίσωση με περιοδικά μεταβαλλόμενη αλίευση αλίευση

Εξετάζουμε τι θα συμβεί αν η αλίευση γίνεται περιοδικά:

$$\dot{x} = x(1 - x) - \alpha(1 + \sin 2\pi t) . \tag{1}$$

Το σύστημα αυτό είναι ένα περιοδικό σύστημα και η συμπεριφορά κάθε περιοδικού συστήματος

$$\dot{x} = f(x, t)$$



Σχήμα 2: Η απεικόνιση Poincare από τις αρχικές συνθήκες  $x_0$  στην τιμή που λαμβάνει  $p(x_0)$  την χρονική στιγμή  $t = 1$  όταν εξελίσσεται σύμφωνα με την λογιστική εξίσωση:  $\dot{x} = x(1-x) - \alpha(1 + \sin(2\pi t))$ . Όλες οι καμπύλες είναι αύξουσες συναρτήσεις και έχουν αρνητική δεύτερη παράγωγο. Η τομή της συνάρτησης με την ευθεία  $y = x_0$  προσδιορίζουν τα σταθερά σημεία και αποδεικνύουν την ύπαρξη περιοδικών λύσεων. Περιοδικές τροχιές υπάρχουν μόνο για  $\alpha < 1/4$ .

περιόδου 1 (η περίοδος  $\gamma\epsilon\gamma^1$  μπορεί να ληφθεί η μονάδα κάνοντας τη κλίμακα του χρόνου ίση με την περίοδο), έτσι ώστε:

$$f(x, t + 1) = f(x, t) ,$$

προσδιορίζεται πλήρως από την εξέλιξη του συστήματος από κάθε αρχική τιμή για μία περίοδο. Αυτό είναι προφανές διότι η κλίση επαναλαμβάνεται κάθε περίοδο. Συνεπώς αν το σύστημα ξεκινά από το  $x_0$  τον χρόνο  $t = 0$  και καταλήγει στο σημείο  $p(x_0)$  στο πέρας της περιόδου  $t = 1$  ακολουθώντας την τροχιά  $\phi(x_0, t)$  (εδώ η τροχιά γράφεται με τον τρόπο αυτό ώστε να δηλώνεται το αρχικό σημείο στο οποίο βρισκόταν το σύστημα στην αρχή του χρόνου) έτσι ώστε να είναι:

$$p(x_0) = \phi(x_0, 1) ,$$

τότε λόγω της μοναδικότητας των λύσεων η τροχιά που αρχίζει από το  $p(x_0)$  θα είναι η ίδια με τη τροχιά που άρχισε την προηγούμενη περίοδο στο σημείο  $x_0$ , δηλαδή

$$\phi(p(x_0), t) = \phi(x_0, t + 1) ,$$

κ.ο.κ.. Έτσι η γνώση της  $\phi(x_0, t)$  για κάθε  $x_0$  στο διάστημα  $0 \leq t \leq 1$  προσδιορίζει πλήρως την εξέλιξη του συστήματος. Αλλά και απλούστερα η γνώση της συνάρτησης  $p(x_0)$  για κάθε  $x_0$  προσδιορίζει την συμπεριφορά του συστήματος διότι η σύνθεση

$$p^n(x_0) \equiv p(p(\dots(p(x_0))\dots)) = \phi(x_0, n)$$

δίνει το σημείο της τροχιάς τη χρονική στιγμή  $t = n$ . Συνεπώς εάν έχουμε ένα σύστημα που έχει όρους με περιοδικότητα τότε αν ο προσδιορισμός της απεικόνισης μίας περιόδου  $p$  ισοδυναμεί με γνώση της κατάστασης του συστήματος σε κάθε χρόνο που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου. Η απεικόνιση  $p$  λέγεται απεικόνιση Poincare και ισοδυναμεί με τη στροβοσκοπική παρατήρηση του συστήματος και μετατρέπει ένα συνεχές σύστημα σε μία απεικόνιση (a map) και τη διερεύνηση της δυναμικής

<sup>1</sup>  $\gamma\epsilon\gamma$ = χωρίς έλλειψη της γενικότητας.

του στην εξέταση της συμπεριφοράς της αναδρομικής σχέσης:

$$x_{n+1} = p(x_n) ,$$

διότι τα σημεία που προκύπτουν είναι τα σημεία που προκύπτουν διαδοχικά κάθε περίοδο.

Ιδιαίτερη σημασία για τη μελέτη αναδρομικών σειρών είναι η ύπαρξη (ή μη) σταθερών σημείων, σημείων δηλαδή για τα οποία  $x = p(x)$ . Η ύπαρξη σταθερών σημείων θεμελιώνει την ύπαρξη περιοδικών τροχιών περιόδου  $1^2$ . Αν δεν υπάρχουν δε δεν υπάρχουν περιοδικές λύσεις.

Η συνάρτηση  $p(x)$  παρουσιάζεται στο Σχ. 2 και είναι μονότονα αύξουσα. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι γενική ιδιότητα σε κάθε μονοδιάστατο σύστημα (και όχι αναγκαστικά περιοδικό). Αυτό είναι απόρροια της μοναδικότητας των λύσεων της

$$\dot{x} = f(x, t)$$

που σημαίνει ότι οι τροχιές  $\phi(x_0, t)$  δεν τέμνονται, δεν υπάρχουν δηλαδή διαφορετικές αρχικές συνθήκες που να φέρνουν το σύστημα στο ίδιο σημείο:

$$\phi(x, t) = \phi(y, t) .$$

Συνεπώς οι τροχιές που αρχίζουν με αρχικές τιμές

$$x = \phi(x, 0) > \phi(y, 0) = y$$

την χρονική στιγμή  $t = 0$  θα συντηρούν την αρχική ανισότητα για όλους τους χρόνους

$$\phi(x, t) > \phi(y, t) ,$$

διότι άλλως όντας συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου θα τέμνονταν (σχεδιάστε δύο τροχιές). Συνεπώς και η απεικόνιση Poincare  $p(x)$  είναι γνησίως αύξουσα.<sup>3</sup>

<sup>2</sup>Ομοίως η ύπαρξη σταθερών σημείων της  $x = p^n(x)$  θεμελιώνει την ύπαρξη περιοδικών λύσεων περιόδου  $n$ .

<sup>3</sup>Στο σημείο αυτό υπενθυμίζουμε ότι οι λύσεις  $\phi(x_0, t)$  για όλες τις διαφορικές που εξετάζουμε που έχουν μοναδική λύση θα εξαρτώνται συνεχώς από τις αρχικές συνθήκες και βεβαίως από τον χρόνο. Θα επανέλθουμε να αποδείξουμε αυτή την σημαντική ιδιότητα.

Θα δείξουμε την ιδιότητα αυτή με περισσότερο αναλυτικό τρόπο. Επειδή η  $\phi(x, t)$  ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση με αρχική τιμή  $x$  θα είναι

$$\phi(x, t) = x + tf(x, 0) + \dots$$

και συνεπώς

$$\left. \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \right|_{t=0} = 1 . \quad (2)$$

Η τροχιά ικανοποιεί τη δυναμική

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = f(\phi(x, t), t) .$$

Παραγωγίζοντας ως προς τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε ότι η παράγωγος  $\partial \phi / \partial x$  ικανοποιεί την γραμμική εξίσωση:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial f(\phi, t)}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3)$$

Η οποία έχει ως λύση δεδομένου ότι αρχικά ίσχυε η (2) την:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} = \exp \left( \int_0^t \frac{\partial f(\phi, s)}{\partial \phi} ds \right) \quad (4)$$

Στη περίπτωση της λογιστικής εξίσωσης (1)

$$\frac{\partial f(\phi, t)}{\partial \phi} = 1 - 2\phi(x, t) ,$$

οπότε:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} = \exp \left( t - 2 \int_0^t \phi(x, s) ds \right) .$$

Μελετούμε τώρα την απεικόνιση Poincare για τη περιοδικά αλιευόμενη λογιστική εξίσωση, δηλαδή προσδιορίζουμε την απεικόνιση κάθε αρχικής τιμής  $x$  στην τιμή  $p(x)$  που θα καταλήξει μετά από μία περίοδο την χρονική στιγμή  $t = 1$ . Αυτή η απεικόνιση υπολογίζεται αριθμητικά και παρουσιάζεται στο Σχ. 2. Θα συμπεραίνουμε από το σχήμα ότι η συμπεριφορά του χρονοεξαρτώμενου συστήματος δεν διαφέρει ποιοτικά από το σύστημα χωρίς χρονοεξάρτηση.

Διότι όταν  $\alpha > 1/4$  δεν υπάρχει σταθερό σημείο στην απεικόνιση και δεν υπάρχει αρχική τιμή για την οποία η τροχιά είναι περιοδική. Όλες οι τροχιές οδηγούν στον αφανισμό του πληθυσμού. Αυτό μπορεί πιο καθαρά να αποδειχθεί παρατηρώντας ότι η  $p(x)$  είναι μονότονα αύξουσα συνάρτηση. Τότε επειδή  $p(x) < x$  (βλ. σχήμα), θα είναι και  $p(p(x)) < p(x)$  και τα διαδοχικά σημεία της απεικόνισης σχηματίζουν μία μονοτόνως φθίνουσα ακολουθία που δεν έχει κατώτερο φράγμα (αν το σύνολο των διαδοχικών σημείων είχε κατώτερο φράγμα τότε η ακολουθία των σημείων θα συνέκλινε σε αυτό, και το σημείο αυτό θα ήταν σταθερό σημείο της απεικόνισης γεγονός που είναι αδύνατο διότι για αυτή τη σταθερά  $\alpha$  δεν υπάρχουν σταθερά σημεία). Συνεπώς για κάθε αρχικό πληθυσμό αν  $\alpha > 1/4$  ο πληθυσμός αφανίζεται, όπως ακριβώς και στο χρονοανεξάρτητο σύστημα.

Όταν  $\alpha < 1/4$  υπάρχουν δύο σταθερά σημεία που αντιστοιχούν σε δύο περιοδικές τροχιές. Το πρώτο που αναφέρεται στο μικρότερο πληθυσμό είναι ασταθές υπό την έννοια αν αρχίσει κανείς πλησίον αυτού του πληθυσμού συν τω χρόνω θα απομακρυνθεί, ενώ το σταθερό σημείο με τον μεγαλύτερο πληθυσμό είναι ευσταθές, αν αρχίσει κανείς πλησίον θα πλησιάζει κανείς προς το σημείο αυτό. Τα συμπεράσματα αυτά μπορούν να συναχθούν και ως εξής: αν  $x_{n+1} = p(x_n)$  τότε η ευστάθεια του  $x_0 = p(x_0)$  μπορεί να κριθεί κάνοντας γραμμικοποίηση της αναδρομικής σχέσης περί το σταθερό σημείο. Γράφοντας

$$x_n = x_0 + \xi_n ,$$

όπου  $\xi_n$  η παρρέκλιση στο χρόνο  $t = n$  από το σταθερό σημείο, η αναδρομική σχέση δίνεται κατά προσέγγιση αν θεωρήσουμε ότι οι παρρεκλίσεις είναι μικρές από την

$$\begin{aligned} x_0 + \xi_{n+1} &= p(x_0 + \xi_n) \\ &\approx p(x_0) + p'(x_0)\xi_n \end{aligned}$$

οπότε οι παρρεκλίσεις από το σταθερό σημείο εξελίσσονται με τη γραμμική αναδρομική σχέση:

$$\xi_{n+1} = p'(x_0)\xi_n ,$$

που έχει ως λύση:

$$\xi_{n+1} = (p'(x_0))^n \xi_0 ,$$

και συνεπώς η παρρέκλιση  $\xi_n$  τείνει στο μηδέν αν  $|p'(x_0)| < 1$  και το σταθερό σημείο  $x_0 = p(x_0)$  είναι ευσταθές, άλλως η παρρέκλιση  $\xi_n$  μεγαλώνει, και το σημείο είναι ασταθές. Η σταθερότητα φαίνεται λοιπόν αμέσως αν συγκρίνει κανείς τη κλίση της εφαπτομένης της απεικόνισης Poincare στο σταθερό σημείο με αυτήν της ευθείας  $y = x$ . Έτσι από το Σχ. 2 είναι εμφανές ότι το πρώτο κατά σειρά σταθερό

---

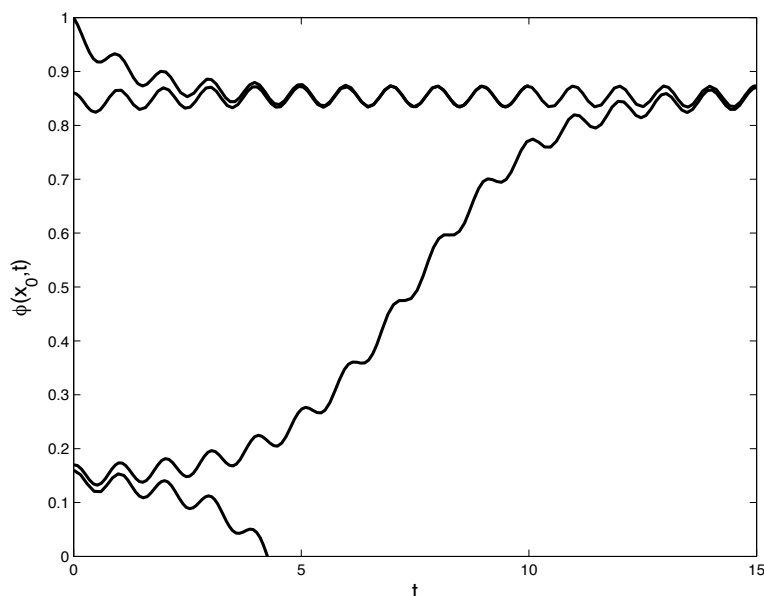
Παραγωγίζοντας τώρα την (4) ως προς τις αρχικές τιμές άλλη μία φορά μπορούμε σε ορισμένες περιπτώσεις να βγάλουμε συμπεράσματα για την καμπυλότητα της απεικόνισης Poincare. Πράγματι έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^t \frac{\partial f(\phi, s)}{\partial \phi} ds \right) \exp \left( \int_0^t \frac{\partial f(\phi, s)}{\partial \phi} ds \right) \\ &= \int_0^t \frac{\partial^2 f(\phi, s)}{\partial \phi^2} \frac{\partial \phi(x, s)}{\partial x} ds \exp \left( \int_0^t \frac{\partial f(\phi, s)}{\partial \phi} ds \right) . \end{aligned}$$

Επειδή όπως δείξαμε  $\partial \phi / \partial x > 0$  τότε αν η  $\partial^2 f / \partial \phi^2$  έχει σταθερό πρόσημο το ίδιο πρόσημο θα έχει και η καμπυλότης της απεικόνισης Poincare. Στην περίπτωση της (1)

$$\frac{\partial^2 f(\phi, t)}{\partial \phi^2} = -2 ,$$

οπότε η καμπυλότης είναι πάντα αρνητική όπως φαίνεται στο σχήμα 2.



Σχήμα 3: Οι τροχιές  $\phi(x_0, t)$  για διαφορετικές αρχικές τιμές  $x_0$  στη περίπτωση  $\alpha = 1/8$ . Η περίπτωση  $x_0 \approx 0.86$  αντιστοιχεί στο σταθερό σημείο της απεικόνισης Poincare και αντιστοιχεί σε μία περιοδική τροχιά. Για αρχικές τιμές μεγαλύτερες η τροχιά έλκεται και τείνει προς την περιοδική π.χ. η τροχιά με  $x_0 = 1$ . Το ασταθές σταθερό σημείο είναι στο  $x_0 \approx 0.165$ . Για  $x_0 = 0.17$  που είναι λίγο μεγαλύτερο από το ασταθές σημείο η τροχιά έλκεται προς την σταθερή περιοδική, ενώ για τιμές μικρότερες ο πληθυσμός αφανίζεται π.χ. η τροχιά με  $x_0 = 0.16$ .

σημείο είναι ασταθές ενώ αυτό με τον μεγαλύτερο πληθυσμό είναι ευσταθές. Εάν αρχικά ο πληθυσμός ήταν μικρότερος από αυτόν του ασταθούς σταθερού σημείου ο πληθυσμός θα αφανισθεί, άλλως ο πληθυσμός θα τείνει συν τω χρόνω στη περιοδική τροχιά που αντιστοιχεί στο ευσταθές σταθερό σημείο. Η συμπεριφορά των τροχιών έχει σχεδιασθεί στο Σχ. 3. Η συμπεριφορά είναι ποιοτικά η ίδια με αυτήν του χρονοανεξάρτητου συστήματος.

### Μία πληρέστερη απόδειξη του κριτηρίου σταθερότητας ή αστάθειας σταθερών σημείων απεικονίσεων

Είδαμε ότι το σταθερό σημείο  $x_0$  της δυναμικής που δίνεται από την αναδρομική σχέση  $x_{n+1} = p(x_n)$  είναι ευσταθές αν  $|p'(x_0)| < 1$ , και αν  $|p'(x_0)| > 1$  ασταθές. Η απόδειξη που δώσαμε βασίστηκε στη γραμμικοποίηση της δυναμικής περί το σταθερό σημείο και μελετήσαμε την εξέλιξη μικρών παρεκλίσεων από το σταθερό σημείο στη γραμμικοποιημένη προσέγγιση. Θα δείξουμε εδώ ότι τα συμπεράσματα της γραμμικοποιημένης προσέγγισης για την ευστάθεια ή αστάθεια όταν  $|p'(x_0)| \neq 1$  (η δυναμική λέγεται τότε υπερβολική) είναι ορθά και εάν συμπεριλάβουμε τους μη γραμμικούς όρους. Αυτό είναι πολύ σημαντικό αποτέλεσμα διότι μας επιτρέπει να βασιστούμε στα συμπεράσματα της γραμμικής ανάλυσης και είναι ειδική περίπτωση ενός γενικού θεωρήματος για υπερβολικά συστήματα που λέγεται θεώρημα Hartman-Grobman (1960).

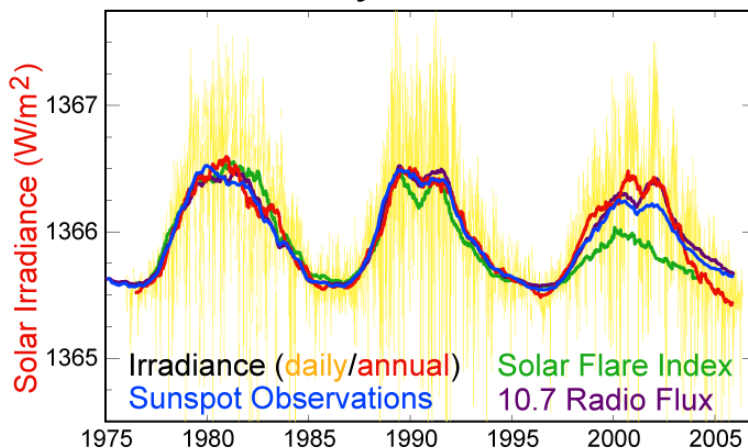
Θα δείξω ότι αν  $|p'(x_0)| < 1$  τότε το σταθερό σημείο είναι ευσταθές. Επειδή η  $p'(x)$  είναι συνεχής συνάρτηση<sup>4</sup> υπάρχει μία περιοχή του  $x_0$ ,  $\Delta(x_0) = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , στην οποία θα είναι  $p'(x) < k < 1$  για κάθε  $x \in \Delta(x_0)$ . Αρχικά αν ξεκινήσουμε στο σημείο  $x$  πλησίον του σταθερού σημείου  $x_0$  και ανήκον στο διάστημα  $\Delta(x_0)$  θα είναι:

$$\begin{aligned} \left| \frac{p(x) - x_0}{x - x_0} \right| &= \left| \frac{p(x) - p(x_0)}{x - x_0} \right| \\ &= |p'(x_0 + \theta(x - x_0))| < k, \end{aligned}$$

από το θεώρημα της μέσης τιμής για κάποιο  $1 \geq \theta \geq 0$ . Συνεπώς και το  $p(x)$  θα είναι στο διάστημα

<sup>4</sup>Κάθε λύση διαφορικής εξίσωσης είναι συνεχής συνάρτηση των αρχικών συνθηκών και των παραμέτρων της. Αυτό συμβαίνει και όταν υπάρχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες όπως συμβαίνει στα χαοτικά συστήματα.

## Solar Cycle Variations



Σχήμα 4: Η ηλιακή ακτινοβολία  $S_0$  που φτάνει στη γή. Η μέση τιμή της έχει μία μικρή διακύμανση περί το  $S_0 = 1366 \text{ W/m}^2$  λόγω του ηλιακού κύκλου. Η συνολική ακτινοβολία που δέχεται η γη κατανέμεται σε όλη την επιφάνεια της γης, συνεπώς ανά μονάδα επιφανείας και χρόνου η γη δέχεται  $Q_0 = S_0/4$  έτσι ώστε  $S_0 \pi R_e^2 = 4\pi R_e^2 Q_0$ ,  $R_e$  η ακτίνα της Γης.

$\Delta(x_0)$  διότι

$$|p(x) - x_0| < k|x - x_0|,$$

που σημαίνει ότι το  $p(x)$  είναι πλησιέστερα στο  $x_0$  από το  $x$  και ανήκει στο  $\Delta(x_0)$ . Συνεπώς επαναλαμβάνοντας

$$\begin{aligned} |p(p(x)) - x_0| &< k|p(x) - x_0| \\ &< k^2|x - x_0|, \end{aligned}$$

και τελικά

$$|p^n(x) - x_0| < k^n|x - x_0|$$

που σημαίνει ότι η ακολουθία  $p^n(x) \rightarrow x_0$  και συνεπώς το σταθερό σημείο  $x_0$  είναι ευσταθές.

### Η κλιματική κρίση του Budyko

Θα παρουσιάσουμε το απλούστερο κλιματικό μοντέλο το οποίο όμως εγείρει συναρπαστικά ερωτήματα για το μέλλον και το παρελθόν μας.

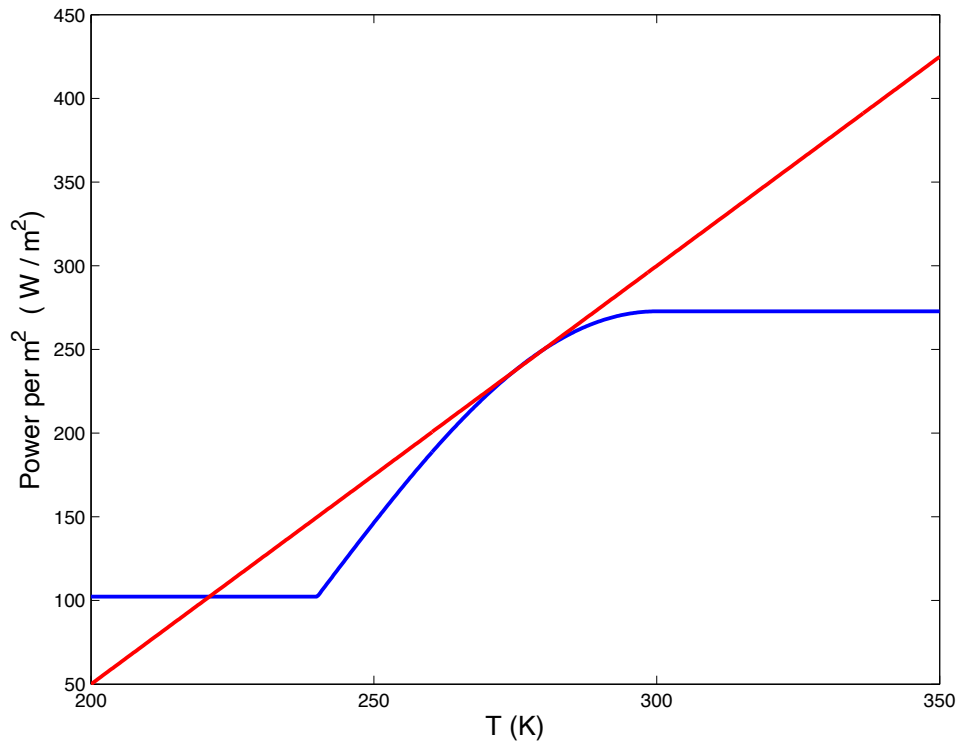
Θεωρούμε ότι η μέση θερμοκρασία του πλανήτη στο σύνολο του εκφράζεται από την ενεργειακή εξίσωση

$$M \frac{dT}{dt} = Q_0(1 - \alpha(T)) - (A + BT),$$

κάθε όρος της οποίας εκφράζει ενέργεια ανά μονάδα χρόνου ανά μονάδα επιφανείας της γης.  $M$  είναι η θερμική "μάζα" της γης, μία γενική σταθερά που προσδιορίζει την ενέργεια που απαιτείται να λιώσουν οι πάγοι, να μεταβληθεί η θερμοκρασία των ωκεανών και να αλλάξει τελικά η μέση θερμοκρασία του πλανήτη. Οι άλλοι δύο όροι είναι προσεγγιστικές εκφράσεις της ακτινοβολίας που απορροφάται από τη γη και της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από τη Γη συναρτήσει της μέσης θερμοκρασίας. Προφανώς η μεταβολή της μέσης θερμοκρασίας της Γης εξαρτάται από τη διαφορά μεταξύ της εισερχόμενης και εξερχόμενης ακτινοβολίας. Στη κατάσταση ισορροπίας η εισερχόμενη ακτινοβολία είναι ίση με την εξερχόμενη. Τα σημεία ισορροπίας που προκύπτουν από αυτό το μοντέλο προσδιορίζουν τα δυνατά κλίματα. Θα μελετήσουμε τα κλίματα που προκύπτουν και τη συμπεριφορά για διαφορετικές τιμές της ακτινοβολίας που δέχεται η γη  $Q_0$  (Θα θεωρήσουμε όμως προς το παρόν ότι το  $Q_0$  είναι χρονοανεξάρτητο).

Η

$$Q_0(1 - \alpha(T))$$



Σχήμα 5: Η ακτινοβολία που εκπέμπεται από τον πλανήτη (OLR) (κόκκινη γραμμή) είναι κατά προσέγγιση γραμμική συνάρτηση της μέσης θερμοκρασίας του πλανήτη (τουλάχιστον για σχετικά μικρές μεταβολές της θερμοκρασίας του πλανήτη). Η ευθεία καμπύλη του σχήματος  $A + BT$  προσεγγίζει τις καλύτερες παρατηρήσεις. Η ετέρα καμπύλη με μπλε χρώμα,  $Q_0(1 - \alpha(T))$ , είναι ένα απλό μοντέλο για την ακτινοβολία που απορροφάται από τη γη συναρτήσει της μέσης θερμοκρασίας του πλανήτη με ηλιακή σταθερά ίση με την σημερινή μέση τιμή  $Q_0 = 341 \text{ W/m}^2$  όπως φαίνεται στο 4. Οι τομές των δύο αυτών καμπύλων προσδιορίζουν τα κλίματα στη κατάσταση ισορροπίας. Προβλέπονται τρία κλίματα. Ένα ψυχρό κλίμα που είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας, και δύο κλίματα πολύ κοντά το ένα με το άλλο τη γη μερικώς καλυμμένη με παγετώνες, το κλίμα με την μεσαία θερμοκρασία είναι ασταθές. Το σύστημα με τις παράμετρες αυτές βρίσκεται σε σημείο δομικής ευστάθειας. Εάν τα πράγματα είχαν ως δείχνει το σχήμα τι αποφάσεις θα λαμβάνετε σχετικά με τα θερμοκηπιακά αέρια που έχουν την τάση στα πλαίσια του απλού αυτού μοντέλου να αυξάνουν το ενεργό  $Q_0$ ;

είναι η ολική ποσότητα ηλιακής ακτινοβολίας που απορροφά η γη ανά τετραγωνικό μέτρο και σχεδιάζεται στο Σχ. 5. Τεσσερεις φορές το  $Q_0$  σε  $W/m^2$  είναι η ποσότητα της ηλιακής ακτινοβολίας που θα μετρούσε ένας δορυφόρος έξω από τη γη (κατα μέσο όρο  $1366 W/m^2$ ) και θα απορροφάτο από τη γη αν δεν υπήρχαν ανακλάσεις όπως φαίνεται στο 4. Το  $\alpha(T)$  είναι η γενική ανακλαστικότητα της γης. Η συνάρτηση της ανακλαστικότητας είναι πολύπλοκη, είναι συνάρτηση του τύπου του εδάφους (γη, νερό, πάγος, έρημος κ.λ.π.), της βλάστησης, καθώς και της κατανομής των νεφών στην ατμόσφαιρα. Εμείς την λαμβάνουμε ως την συνάρτηση:

$$\alpha(T) = \begin{cases} \alpha_i & T < T_i \\ \alpha_0 + (\alpha_i - \alpha_0) \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{T-T_i}{T_f-T_i}\right)\right) & T_i \leq T \leq T_f \\ \alpha_0 & T > T_f \end{cases}$$

όπου  $\alpha_i = 0.7$  η ανακλαστικότητα όταν η Γη είναι όλη καλυμμένη με πάγο που θεωρούμε ότι συμβαίνει όταν  $T < T_i = 240 K$ . Όταν  $T > T_f = 300 K$  η Γη δεν έχει πουθενά πάγο και η μέση ανακλαστικότητα είναι  $\alpha_0 = 0.2$ . Για τις ενδιάμεσες θερμοκρασίες η Γη είναι μερικά μόνο καλυμμένη με πάγο και η ανακλαστικότητα λαμβάνει ενδιάμεση τιμή. Επειδή οι πάγοι πρώτα καλύπτουν τους πόλους η επιρροή στην ανακλαστικότητα είναι ανάλογη της επιφάνειας της γης που καλύπτουν. Αυτό το γεωμετρικό παράγοντα τον έχουμε λάβει υπόψη μας κάνοντας την μεταβολή της ανακλαστικότητας ανάλογη με την επιφάνεια που καλύπτουν οι πάγοι, οπότε όταν πλησιάζουν οι πάγοι στους πόλους η μεταβολή είναι όλο και πιο μικρή. Θεωρώντας την ανακλαστικότητα συνάρτηση της θερμοκρασίας υποθέτουμε ότι η έκταση της γης που καλύπτεται από παγετώνες αυξάνεται όσο μικραίνει η θερμοκρασία και ότι ο κύριος παράγων που ελέγχει την ανακλαστικότητα είναι το ποσοστό των παγετώνων και μόνο.

Η ακτινοβολία που εκπέμπεται από τη Γη ακολουθεί με ικανή ακρίβεια την ακτινοβολία ενός γκριζου σώματος που ακολουθεί με μεγάλη ακρίβεια τον νόμο Stefan-Boltzman  $e(T)\sigma T^4$ , όπου το ενεργό emissivity  $e(T)$  της γηϊνης ατμόσφαιρας εξαρτάται από τη θερμοκρασία και έχει περίπου μέση τιμή 0.612. Η εξάρτηση από τη θερμοκρασία προκύπτει από τη συμπεριφορά των θερμοληπιακών αερίων και δεν την γνωρίζουμε ακριδώς<sup>5</sup>. Στα πλαίσια των θερμοκρασιών που θα εξετάσουμε η σχέση αυτή είναι κατα προσέγγιση γραμμική και δίνεται σε πολύ καλή προσέγγιση από το γραμμικό νόμο:

$$A + BT$$

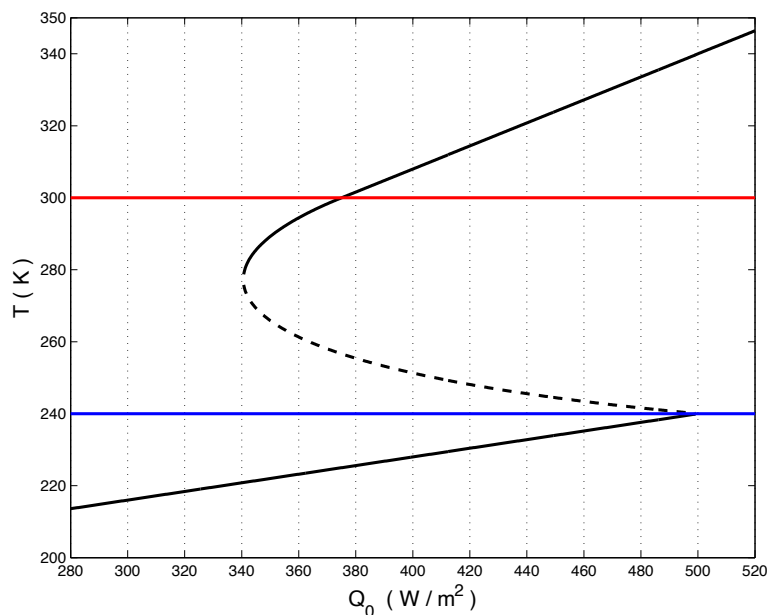
τις σταθερές του οποίου μπορούμε να βρούμε από παρατηρήσεις και με χρήση πολυπλόκων κωδίκων (εμείς λαμβάνουμε  $A = -450$ ,  $B = 2.5$  με τη θερμοκρασία σε K και την εξερχόμενη ακτινοβολία σε  $W/m^2$ ). Η γραμμική αυτή η εξάρτηση όπως προκύπτει από παρατηρήσεις σχεδιάζεται στο Σχ. 5.

Οι θερμοκρασίες ισορροπίας σχεδιάζονται στο Σχ.6 συναρτήσει της ηλιακής σταθεράς  $Q_0$ . Παρατηρείτε ότι για εισερχόμενη ακτινοβολία στο διάστημα  $339.5 W/m^2 < Q_0 < 500 W/m^2$  υπάρχουν τρία σημεία ισορροπίας, δύο σταθερά (ένα με τη γη καλυμμένη όλη με πάγο, το άλλο με μερική κάλυψη πάγου) και ένα ασταθές με ενδιάμεση κάλυψη πάγου. Για  $Q_0 < 339.5 W/m^2$  έχουμε μόνο ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας το οποίο προβλέπει ότι η Γη είναι ολόκληρη καλυμμένη με παγετώνες βρίσκεται στο κλίμα της χιονόμπαλλας (snowball earth). Ομοίως για  $Q_0 > 500 W/m^2$  υπάρχει ένα και μοναδικό σημείο ευσταθές ισορροπίας που αντιστοιχεί σε ένα θερμό πλανήτη χωρίς πουθενά πάγους (λέγεται equable climate)

Η ηλιακή σταθερά είναι σήμερα περί τα  $Q_0 = 340 W/m^2$  και αν λαμβάναμε σοβαρά την ανάλυση αυτή στις λεπτομέρειες της θα έπρεπε να συμπεράνουμε ότι βρισκόμαστε στο χείλος του γκρεμού, όπως σημείωσε ο Budyko το 1969. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο μία μικρή μείωση της ηλιακής σταθεράς (η οποία μπορεί ισοδύναμα να προέλθει και από μείωση των αερίων του θερμοκηπίου) μπορεί να οδηγήσει τη γη σε ασυνεχή μεταφορά σε κλίμα χιονόμπαλλας. Αυτή η αστάθεια προκαλείται όταν αυξανόμενου του πάγου αυξάνεται η ανακλαστικότητα και μειώνεται περισσότερο η εισερχόμενη ηλιακή ακτινοβολία από την εξερχόμενη ακτινοβολία OLR (outgoing longwave radiation) με αποτέλεσμα

<sup>5</sup> Αν την γνωρίζαμε θα μπορούσαμε να δώσουμε απάντηση στο τι θα συμβεί αν ceteris paribus αυξάναμε την διπλασιάσαμε την περιεκτικότητα σε εκπομπές  $CO_2$ . Π.χ. το κυριότερο θερμοκηπιακό αέριο είναι το νερό και η αβέβαιη κατανομή καθ' ύψος του νερού επηρεάζει κρίσιμα το emissivity  $e(T)$ .





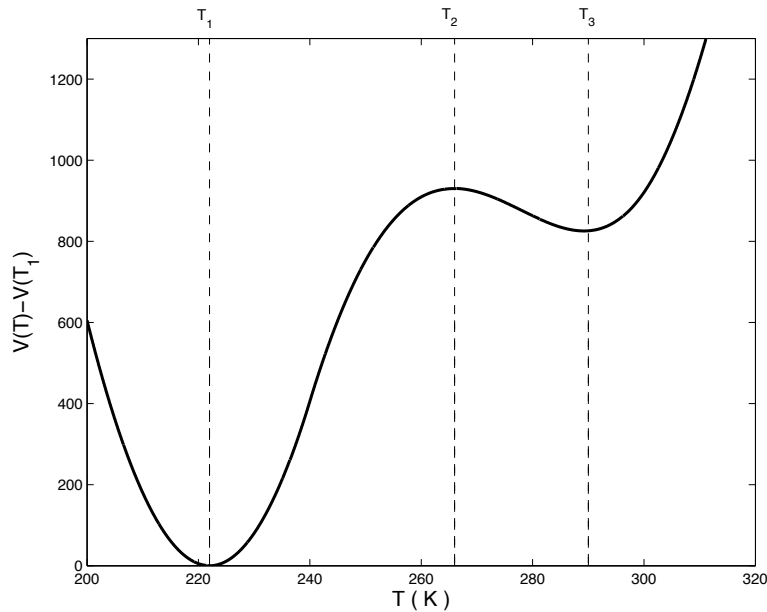
Σχήμα 6: Οι θερμοκρασίες των δυνατών κλιμάτων ισορροπίας της γης συναρτήσει της ηλιακής σταθεράς  $Q_0$ . Στο κλίμα στο οποίο η μέση θερμοκρασία είναι μικρότερη από  $T = 240$  K (γραμμή μπλε) ο πλανήτης είναι καλυμμένος μέχρι και τον ισημερινό με παγετώνες. Το κλίμα αυτό το ονόμασε ο Paul Hoffman κλίμα χιονόμπαλλας (snowball earth). Στο κλίμα με μέσες θερμοκρασίες που υπερβαίνουν τους  $T = 300$  K (πάνω από την κόκκινη γραμμή) όλοι οι παγετώνες έχουν λειώσει και έχουμε μία γη χωρίς πάγο. Το κλίμα αυτό μπορεί να αντιστοιχεί στο κλίμα της εποχής των δεινοσαύρων. Στις ενδιάμεσες θερμοκρασίες έχουμε τη γη μερικώς καλυπτόμενη από πάγο που αντιστοιχεί στη σημερινή εποχή.

ο πλανήτης να κρυώσει περαιτέρω και να επεκτείνει την περιοχή που καλύπτεται με πάγο μέχρις ότου ο πάγος καλύψει όλη τη γη. Αυτή η αστάθεια προκαλείται από την ανάδραση παγετώνα και ανακλαστικότητας (ice-albedo feedback).

Το απλό μοντέλο προβλέπει την ύπαρξη τρία είδη κλιμάτων τα οποία και έχουν παρατηρηθεί. Κρύα κλίματα χιονόμπαλλας, κλίματα στα οποία η Γη είναι μερικώς καλυμμένη με πάγους (όπως το σημερινό και αυτό των τελευταίων 3-4 εκ. χρόνων) και κλίματα θερμά. Κλίματα χιονόμπαλλας έχει προσφάτως αποδειχθεί ότι κυριαρχούσαν στη Γη κατά τη νεοπρωτοζωϊκή εποχή (600 εκ. χρόν. πριν). Συνεχής αύξηση της ηλιακής σταθεράς, που μπορεί να προέλθει και από αύξηση των υδρατμών στην ατμόσφαιρα ή του διοξειδίου του άνθρακα ή και άλλων θερμοκηπιακών αερίων, μπορεί όταν  $Q_0 = 475$  W/m<sup>2</sup> να οδηγήσει σε παντελή εξαφάνιση των παγετώνων που κάλυπταν την χιονόμπαλλα Γη και να τη μεταφέρουν σε ένα ασυνεχώς θερμό πλανήτη. Αυτό υπάρχουν ενδείξεις ότι συνέβη 4-5 φορές κατά την νεοπρωτοζωϊκή εποχή. Το θερμό κλίμα που κυριαρχεί χωρίς παγετώνες μπορεί να αντιστοιχεί στο κλίμα της Εωσκαινής περιόδου (60 εκ. χρ. πριν) όταν στη γη κυκλοφορούσαν οι δεινόσαυροι και υπήρχαν φοίνικες και ζούσαν κροκόδειλοι στο Spitzbergen κατά τη διάρκεια της πολικής νύκτας. Ένα άλλο πόρισμα, σχετικό με τις συζητήσεις που γίνονται τη τελευταία δεκαετία ως προς την "υπερθέρμανση του πλανήτη μας", είναι ότι προβλέπεται από αυτό το μοντέλο ασυνεχής μεταβολή του κλίματος μόνο αν μειωθούν τα θερμοκηπιακά αέρια (αντιστοίχως μειωθεί το  $Q_0$ ).

### Ευστάθεια του κλιματικού μοντέλου με τη μέθοδο του Lyapunov

Μέχρι τώρα την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας την κρίναμε με γραμμικοποίηση της δυναμικής περί το σημείο ισορροπίας και ανάλυση της γραμμικής εξίσωσης που προκύπτει. Αυτή η μέθοδος δίνει αποτελέσματα που ισχύουν και όταν συμπεριληφθούν και οι μη γραμμικοί όροι αν τα σημεία ισορροπίας είναι υπερβολικά (ευσταθή ή ασταθή). Υπάρχει μία μέθοδος που ανέπτυξε ο Lyapunov (1907), η μόνη μάλιστα που υπάρχει, η οποία είναι πολύ χρήσιμη και μπορεί να κρίνει την ευστάθεια ενός δυναμικού συστήματος χωρίς γραμμικοποίηση και έχει αμέσως μη γραμμική ισχύ. Μπορεί με την μέθοδο



Σχήμα 7: Το ψευδοδυναμικό του κλιματικού μοντέλου του Budyko  $V(T) - V(T_1)$  για  $Q_0 = 350 \text{ W/m}^2$ . Τα στάσιμα σημεία προσδιορίζουν τα σημεία ισορροπίας και το σχήμα την ευστάθειά τους.

αυτή να προσδιορίσει έτσι κανείς τη περιοχή έλξεως ενός σταθερού σημείου. Περιοχή έλξεως ενός σημείου ισορροπίας (basin of attraction) ορίζεται ως το σύνολο των σημείων από τα οποία αν εκκινήσει το δυναμικό σύστημα θα καταλήξει στο σημείο ισορροπίας. Θα δείξουμε την μέθοδο αυτή στο απλό παράδειγμα του κλιματικού μοντέλου του Budyko.

Γράφουμε την εξίσωση εξέλιξης της θερμοκρασίας ως:

$$M \frac{dT}{dt} = -\frac{dV}{dT}, \quad (5)$$

όπου το  $V$  είναι το ψευδοδυναμικό:

$$V(T) = -\int_0^T (Q_0(1 - \alpha(s)) - (A + Bs)) ds,$$

το οποίο σχεδιάζεται για  $Q_0 = 350 \text{ W/m}^2$  στο Σχ. 7.

Τα σημεία ισορροπίας προσδιορίζονται τώρα από τα στάσιμα σημεία της  $V$ . Αν πολλαπλασιάσουμε την (5) με  $T$  έχουμε

$$MT\dot{T}^2 = -\frac{dV}{dt},$$

συνεπώς

$$\frac{dV}{dt} \leq 0. \quad (6)$$

Εάν η γη έχει αρχικά τη θερμοκρασία  $T(0) = T_0$  η μετέπειτα τιμές της θερμοκρασίας  $T(t)$  θα κείνται επί της καμπύλης  $V = V(T)$  του Σχ. 7. Οι  $T(t)$  πρέπει πάντοτε να αντιστοιχούν σε μικρότερες τιμές της  $V$  λόγω της (6) δηλαδή θα οι θερμοκρασίες να κινηθούν συνεχώς στη περιοχή που ικανοποιεί την  $V(T(t)) < V(T_0)$ . Αυτό περιορίζει την εξέλιξη των θερμοκρασιών και όπως φαίνεται από το Σχ. 7 οι θερμοκρασίες πρέπει να αντιστοιχούν σε μικρότερες τιμές της συνάρτησης  $V$ . Συνεπώς η θερμοκρασία θα κινήσει στο πλησιέστερο ευσταθές στάσιμο σημείο.

Αυτή είναι η μέθοδος του Lyapunov για τον απόδειξη της ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας.

### Το πρώτο και δεύτερο Θεώρημα του Lyapunov για την ευστάθεια σημείου ισορροπίας.

Χεγ μπορούμε να παρουσιάσουμε το θεώρημα σε μία διάσταση, η απόδειξη γενικεύεται σε περισσότερες διαστάσεις με μόνο ασήμαντες λεκτικές παραλλαγές.

**Θεώρημα Lyapunov:** Αν  $T_{eq}$  σημείο ισορροπίας του δυναμικού συστήματος  $\dot{T} = f(T)$  και υπάρχει κάποια παραγωγίσιμη συνάρτησης  $V(T)$  στο ανοικτό διάστημα  $\Delta = (T_{eq} - \delta_1, T_{eq} + \delta_2)$  που συμπεριλαμβάνει το σημείο ισορροπίας που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

α) είναι  $V(T_{eq}) = 0$  στο σημείο ισορροπίας  $T_{eq}$ ,

β) είναι  $V(T) > 0$  σε όλα τα σημεία του  $\Delta - T_{eq}$  και,

γ)  $dV/dt < 0$  σε όλα τα σημεία της περιοχής  $\Delta - T_{eq}$

τότε το  $T_{eq}$  είναι ευσταθές σημείο και  $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T_{eq}$  αν αρχικά  $T_0 \in \Delta$ .

Η συνάρτηση  $V$  που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες λέγεται συνάρτηση Lyapunov.

**Απόδειξη:** Θεωρήστε μία κλειστή περιοχή  $B_\epsilon = [T_{eq} - \epsilon, T_{eq} + \epsilon]$  του σημείου ισορροπίας η οποία εμπεριέχεται εξ'ολοκλήρου στο σύνολο  $\Delta$ , και έστω  $V_m$  η ελάχιστη τιμή που λαμβάνει η συνάρτηση  $V(T)$  στο σύνορο του  $B_\epsilon$ . Θεωρούμε το σύνολο των τιμών  $U = \{T \in B_\epsilon \mid V(T) < V_m\}$ . Τότε είναι  $T_{eq} \in U$  καθώς επίσης  $U \subset B_\epsilon$ . Τότε όλες οι λύσεις που αρχίζουν με αρχικές τιμές  $T_0 \in U - T_{eq}$  δεν μπορούν να διαφύγουν από το  $B_\epsilon$  διότι λόγω της συνθήκης γ) οι θα είναι  $V(T(t)) < V(T_0)$  οπότε και για όλους τους χρόνους  $T(t) \in B_\epsilon$ . Αυτό αποδεικνύει την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας<sup>6</sup>

Αυτό το αποτέλεσμα ονομάζεται το πρώτο θεώρημα του Lyapunov για την ευστάθεια, αυτό που ακολουθεί τώρα και αφορά την ασυμπτωτική ευστάθεια είναι το δεύτερο θεώρημα.

Θα καταλήγαμε στα παραπάνω συμπεράσματα εάν αντι της γ) ικανοποιείτο η ασθενέστερη συνθήκη:  $dV/dt \leq 0$ . Θα δείξουμε τώρα όταν ισχύει το γ) ότι το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές δηλαδή  $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T_{eq}$  αν αρχικά  $T_0 \in \Delta$ . Η απόδειξη είναι κάπως τεχνική και μπορεί να παραληφθεί σε πρώτη ανάγνωση. Θεωρήστε τώρα τη τροχιά  $T(t)$  κάποιου αρχικού σημείου που είναι στο  $U$  και παραμένει ως δείξαμε για όλους τους χρόνους στο  $B_\epsilon$ . Το απειροσύνολο των τιμών της τροχιάς θα έχει κάποιο ορικό σημείο (θεώρημα Bolzano-Weierstrass), και έστω αυτό ότι είναι το  $T_*(0)$ , οπότε υπάρχει μία ακολουθία χρονικών στιγμών  $t_n$  για τις οποίες η ακολουθία  $T(t_n) \rightarrow T_*(0)$  και επειδή ικανοποιείται η γ) η ακολουθία των τιμών της  $V$  πρέπει να είναι γνησίως φθίνουσα οπότε θα είναι  $V(T(t_n)) > V(T_*(0))$ . Θα δείξουμε ότι αν υπάρχει ορικό σημείο άλλο από το σημείο ισορροπίας,  $T_*(0) \neq T_{eq}$ , καταλήγουμε σε άτοπο. Έστω ότι υπάρχει τέτοιο ορικό σημείο, τότε η τροχιά που εκκινεί από αυτό το σημείο, η  $T_*(t)$ , θα ικανοποιεί λόγω της γ) την ανισότητα  $V(T_*(t)) < V(T_*(0))$ . Επειδή όμως οι λύσεις διαφορικών εξισώσεων είναι συνεχείς συναρτήσεις των αρχικών τιμών τους, αν λάβουμε ως αρχική συνθήκη την  $X(t)$  αρκούντως πλησίον της  $T_*(0)$  τότε θα ισχύει και για αυτή την τροχιά η ανισότητα  $V(X(t)) < V(T_*(0))$ . Καταλήγουμε σε άτοπο επιλέγοντας για αρχική τιμή κάποιο  $X(0) = T(t_n)$  που βρίσκεται αρκούντως πλησίον του  $T_*(0)$ .

### Παραδείγματα κατασκευής συναρτήσεων Lyapunov

1) Στο κλιματικό παράδειγμα αν επιλέξουμε  $V(T) = V(T) - V(T_1)$ , η  $V()$  είναι συνάρτηση Lyapunov για πρώτο σημείο ισορροπίας  $T_1$  και το διάστημα  $\Delta = (0, T_2)$ . Το  $\Delta = (0, T_2)$  είναι και η λεκάνη έλξης του σημείου ισορροπίας  $T_1$ .

2) Θεωρήστε το γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} = \mathbf{A}x$$

όπου  $\mathbf{A}$  ένας πίνακας  $n \times n$ . Θέλουμε να δείξουμε κατασκευάζοντας μία κατάλληλη συνάρτηση Lyapunov ότι αν όλες οι ιδιοτιμές έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος τότε το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας. Προς τούτο θεωρούμε δύο βάσεις ιδιοδιανυσμάτων. Τα ιδιοδιανύσματα  $u_i$  του πίνακα  $\mathbf{A}$  που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\mathbf{A}u_i = \lambda^{(i)}u_i$$

<sup>6</sup>Η ευστάθεια αυτή είναι η ευστάθεια κατά Lyapunov που σημαίνει ότι αν ξεκινήσει το δυναμικό σύστημα πλησίον του σημείου ισορροπίας θα παραμείνει για όλους τους χρόνους πλησίον του σημείου ισορροπίας: για κάθε περιοχή  $\Delta$  του σημείου ισορροπίας υπάρχει υποπεριοχή του σημείου ισορροπίας  $\Delta_1$  που περικλείεται στην αρχική,  $\Delta_1 \subset \Delta$ , τέτοια ώστε η τροχιά  $T(t)$  που προκύπτει από κάθε αρχική τιμή  $T_0 \in \Delta_1$  να βρίσκεται πάντοτε στο  $\Delta$  δηλαδή να είναι  $T(t) \in \Delta$ .

και τα ιδιοδιανύσματα  $v_i$  του συζυγούς πίνακα<sup>7</sup> με ιδιοτιμές τις συζυγείς ιδιοτιμές που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\mathbf{A}^\dagger v_i = \lambda^{(i)*} v_i .$$

Όταν ο πίνακας  $\mathbf{A}$  δεν αντιμετατίθεται με τον  $\mathbf{A}^\dagger$  οι δύο αυτές βάσεις είναι διαφορετικές και είναι ορθογώνιες μεταξύ τους υπό την έννοια:

$$\langle v_i, u_j \rangle = \delta_{ij} ,$$

οπότε το  $x$  αναλύεται στη βάση  $u_i$  ως εξής:

$$x = \sum_{i=1}^n \langle v_i, x \rangle u_i .$$

Θεωρούμε την εξής συνάρτηση Lyapunov

$$V(x) = \sum_i^n \beta_i \langle v_i, x \rangle \langle x, v_i \rangle$$

όπου  $\beta_i > 0$  είναι τυχαίοι θετικοί αριθμοί. Θα δείξουμε ότι για κάθε επιλογή των  $\beta_i$  η συνάρτηση  $V$  ικανοποιεί τα θεωρήματα ευστάθειας του Lyapunov υπό την προϋπόθεση ότι το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών,  $\Re(\lambda)$ , είναι αρνητικό. Πράγματι όταν  $x = 0$  είναι  $V = 0$  και είναι  $V(x) > 0$  για κάθε σε όλο το  $x \in \mathbb{R}^n$ . Οπότε ικανοποιούνται οι απαιτήσεις α) και β). Μένει να αποδειχθεί ότι  $dV/dt < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$ . Πράγματι:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum_i^n \beta_i \left( \frac{d \langle v_i, x \rangle}{dt} \langle x, v_i \rangle + \langle v_i, x \rangle \frac{d \langle x, v_i \rangle}{dt} \right) \\ &= \sum_i^n \beta_i (\langle v_i, \mathbf{A}x \rangle \langle x, v_i \rangle + \langle v_i, x \rangle \langle \mathbf{A}x, v_i \rangle) \\ &= \sum_i^n \beta_i \left( \left\langle v_i, \mathbf{A} \sum_j \langle v_j, x \rangle u_j \right\rangle \langle x, v_i \rangle + \langle v_i, x \rangle \left\langle \mathbf{A} \sum_j \langle v_j, x \rangle u_j, v_i \right\rangle \right) \\ &= \sum_i^n \beta_i \left( \left\langle v_i, \sum_j \lambda^{(j)} \langle v_j, x \rangle u_j \right\rangle \langle x, v_i \rangle + \langle v_i, x \rangle \left\langle \sum_j \lambda^{(j)} \langle v_j, x \rangle u_j, v_i \right\rangle \right) \\ &= \sum_i^n \beta_i (\lambda^{(i)} \langle v_i, x \rangle \langle x, v_i \rangle + \lambda^{(i)*} \langle v_i, x \rangle \langle x, v_i \rangle) \\ &= \sum_i^n \beta_i (\lambda^{(i)} + \lambda^{(i)*}) |\langle v_i, x \rangle|^2 \end{aligned}$$

το οποίο είναι αρνητικό εάν όλες οι ιδιοτιμές έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος:

$$\Re(\lambda^{(i)}) < 0 .$$

**Πρόβλημα:** Κατασκευάστε ένα γραμμικό δυναμικό σύστημα που διέπεται από ένα  $2 \times 2$  πίνακα  $\mathbf{A}$  (ο πίνακας  $\mathbf{A}$  είναι ο γεννήτωρ της δυναμικής) που έχει ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος και για τον οποίον η  $V = x^\dagger x$  δεν είναι συνάρτηση Lyapunov. Μπορείτε να προσδιορίσετε συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί ο  $\mathbf{A}$  ώστε η παραπάνω συνάρτηση να είναι συνάρτηση Lyapunov.

<sup>7</sup> Έχοντας ορίσει το εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ο συζυγής πίνακας ορίζεται από τη σχέση:

$$\langle x, \mathbf{A}y \rangle = \langle \mathbf{A}^\dagger x, y \rangle .$$

Όταν το εσωτερικό γινόμενο είναι το ευκλείδιο  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i$ , όπου  $*$  συμβολίζει το μιγαδικό συζυγές, ο συζυγής πίνακας  $\mathbf{A}^\dagger$  είναι ο ερμιτιανός ανάστροφος του  $\mathbf{A}$  δηλαδή τα στοιχεία του συζυγούς είναι τα  $(\mathbf{A}^\dagger)_{ij} = A_{ji}^*$ .