



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Πρώτο τεστ Μη Γραμμικής Δυναμικής

3/3/2025

Σύνολο μορίων 115

1. Στο δυναμικό σύστημα : $\dot{x} = -x$ ($x \in \mathbb{R}$)

- (α) Ποιό είναι το σημείο ισορροπίας; Ποίο το είδος ευστάθειάς του; [5]
- (β) Ποίο είναι το πεδίο έλξεως του σημείου αυτού; [5]
- (γ) Γράψτε την αναδρομική σχέση που προκύπτει από την ολοκλήρωση του δυναμικού συστήματος με (forward) Euler με βήμα $\delta > 0$. [5]
- (δ) Προσδιορίστε το σταθερό σημείο του διακριτού δυναμικού συστήματος (γ) και τις τιμές του δ για τις οποίες το διακριτό δυναμικό σύστημα (γ) έχει την ίδια συμπεριφορά με το συνεχές. [10]

2. Σχεδιάστε στον κύκλο τη ροή των δυναμικών συστημάτων $\dot{\theta} = 1$, $\dot{\theta} = \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) σημειώνοντας το είδος ευστάθειας των σημείων ισορροπίας. [10]

3. Θεωρήστε το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = \text{sgn}(x)$, $x(0) = 0$ όπου το $\text{sgn}(x)$ είναι το πρόσημο του x και $\text{sgn}(0) = 0$.

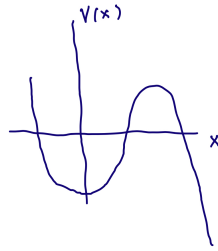
- (α) Γράψτε την αναδρομική σχέση Picard και προσδιορίστε τη λύση του δυναμικού συστήματος που προκύπτει από την Picard. [5]
- (β) Έχει το σύστημα μοναδική λύση αν όχι προσδιορίστε μία άλλη λύση. [10]

4. Για το δυναμικό σύστημα : $\dot{x} = x(r - x^2)$ ($x \in \mathbb{R}$)

- (α) Σχεδιάστε το διάγραμμα διακλάδωσης $x_e(r)$ (x_e τα σημεία ισορροπίας όταν η παράμετρος έχει την τιμή r) για $-\infty < r < \infty$ σημειώνοντας με διάστικτη γραμμή τα ασταθή σημεία ισορροπίας και με συνεχή γραμμή τα ευσταθή. [5]
- (β) Προσδιορίστε το κρίσιμο r_c στο οποίο το σύστημα εμφανίζει δομικής αστάθειας και αναφέρατε το είδος της διακλάδωσης στο σημείο αυτό. [5]
- (γ) Αν είναι $r \approx r_c$ ποίος ο χρόνος αποκαταστάσεως του συστήματος στο σημείο ισορροπίας; [5]

5. Για το δυναμικό σύστημα : $\dot{x} = V(x) + r$ ($x \in \mathbb{R}$), με το δυναμικό $V(x)$ του σχήματος.

- (α) Σχεδιάστε το διάγραμμα διακλάδωσης $x_e(r)$ (x_e τα σημεία ισορροπίας όταν η παράμετρος έχει την τιμή r) για $-\infty < r < \infty$ σημειώνοντας με διάστικτη γραμμή τα ασταθή σημεία ισορροπίας και με συνεχή γραμμή τα ευσταθή. [10]



(β) Σημειώστε τα σημεία δομικής αστάθειας του συστήματος και αναφέρατε το είδος της διακλάδωσης στα σημεία αυτά. [5]

(γ) Γράψτε το απλό δυναμικό σύστημα που περιγράφει τη δυναμική σε καθένα από τα σημεία διακλάδωσης. [5]

(δ) Σημειώστε στο διάγραμμά σας έναν υστεριτικό κύκλο που εμφανίζει το σύστημα σε περιοδικές μεταβολές του r ; [5]

6. Το δυναμικό σύστημα $\dot{x} + x = \sin(t)$, $x(0) = x_0$ έχει ως λύση την

$$x(t) = e^{-t}x_0 + \frac{e^{-t}}{2} + \frac{\sin(t) - \cos(t)}{2}.$$

(α) Τι φυσικό σύστημα θα μπορούσε να περιγράφει το δυναμικό αυτό σύστημα; [5]

(β) Από τη λύση που σας δίνεται προσδιορίστε την αρχική συνθήκη που οδηγεί σε περιοδική λύση; [5]

(γ) Σχεδιάστε την απεικόνιση Poincaré $P(x)$ μίας περιόδου. [5]

(δ) Δείξτε μέσω της απεικόνισης Poincaré ότι το δυναμικό αυτό σύστημα έχει περιοδική τροχιά και προσδιορίσετέ την. [5]

(ε) Τι θα συμβεί αν το σύστημα αρχίζει από τιμή διαφορετική από αυτήν της περιοδικής τροχιάς; [5]