

Ασκήσεις Μη Γραμμικής Δυναμικής 2025

22 Μαΐου 2025

1 Για την Πέμπτη 13/2

- 2 1. Πόσο είναι το $e^{\varepsilon d/dt} x(t)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$;
- 3 2. (γραμμικό ή μη γραμμικό;) Η γραμμικότητα ή μη γραμμικότητα ενός δυναμικού συστή-
- 4 ματος μπορεί να εξαρτάται από την ποσότητα που επιλέχτηκε για την περιγραφή του
- 5 φαινομένου. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η κίνηση σωματιδίου μάζας m και
- 6 στροφορμής L στο κεντρικό δυναμικό $V(r) = -k/r$, όπου $r \geq 0$ είναι η απόσταση του
- 7 σωματιδίου από το κέντρο της δύναμης. Γράψτε την διαφορική εξίσωση που διέπει την
- 8 ακτίνα $r(\theta)$ του σωματιδίου στο επίπεδο της κίνησης. Η εξίσωση αυτή είναι μη γραμμική.
- 9 Μπορείτε αλλάζοντας μεταβλητή να μετατρέψετε το πρόβλημα σε γραμμικό ως προς τη
- 10 νέα μεταβλητή;

11 Για την Πέμπτη 20/2

- 12 3. Διαβάστε το Κεφ. 2 του βιβλίου του Strogatz
- 13 4. Εξετάστε με τη μέθοδο Picard την ύπαρξη λύσεων των δυναμικών συστημάτων που ακο-
- 14 λουθούν και αν υπάρχουν να τις προσδιορίσετε:

15 (α)

$$\dot{x} = \begin{cases} -1 & , \quad x > 0, \\ 1 & , \quad x \leq 0, \end{cases}$$

16 με αρχική τιμή $x(0) = 0$.

17 (β) $\dot{x} = -\Theta(x)$ με $x(0) = 0$, όπου

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0, \\ 1/2 & , \quad x = 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

$$(\gamma) \dot{x} = 2t - 2\sqrt{\max(0, x)}, \text{ με } x(0) = 0.$$

5. Η εξίσωση Gompertz για την εξέλιξη του πληθυσμού των καρκινικών κυττάρων με $x \geq 0$ είναι: $\dot{x} = v(x)$ με πεδίο ταχυτήτων:

$$v(x) = \begin{cases} -x \log(x) & , \quad x > 0, \\ 0 & , \quad x = 0. \end{cases} \quad (1)$$

(α) Σε τι διαφέρει η εξέλιξη με την Gompertz από την εξέλιξη με τη λογιστική. Ποιές διαφορετικές παρατηρήσεις θα δικαιολογούσαν τέτοια μοντελοποίηση;

(β) Προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας και την ευστάθειά τους.

(γ) Η $v(x)$ που δίνεται από την (1) της Gompertz είναι Lipschitz στο $x = 0$, δηλαδή ικανοποιεί την ανισότητα $|v(x)| < K|x|$, όπου K μία σταθερά στην περιοχή του $x = 0$;

(δ) Είναι η λύση μοναδική για $x(0) = 0$; Εάν ναι εξηγήστε τον λόγο. Τι συμπεραίνετε για την αναγκαιότητα της συνθήκης Lipschitz για την ύπαρξη μοναδικών λύσεων;

(ε) Προσδιορίστε την αναλυτική λύση όταν $x(0) = x_0$, με $x_0 > 0$ και προσδιορίστε την ασυμπτωτική τιμή του x .

(στ) Υπολογίστε αριθμητικά με τη μέθοδο Euler την εξέλιξη των πληθυσμών που συνεπάγεται η Gompertz για τις αρχικές τιμές $x(0) = 0.01$, $x(0) = 0.5$, $x(0) = 2$. Επιλέξτε κατάλληλο χρονικό βήμα ώστε να είναι σχετικά ακριβής η εξέλιξη που θα πετύχετε αριθμητικά. Σχεδιάστε την εξέλιξη του πληθυσμού με τον χρόνο. Σχεδιάστε τις αναλυτικές λύσεις στο ίδιο διάγραμμα για να διαπιστώσετε οπτικά την ακρίβεια της αριθμητικής λύσης σας.

(ζ) Για ποιό χρονικό βήμα δ της διακριτοποίησης του συνεχούς δυναμικού συστήματος με τη μέθοδο του Euler η συμπεριφορά του διακριτού δυναμικού συστήματος διαφέρει από αυτήν του συνεχούς;

Λύση

(β) Τα σημεία ισορροπίας είναι $x_e = 0$ που είναι ασταθές και το $x_e = 1$ που είναι ευσταθές.

(γ) Η $-x \log(x)$ δεν είναι Lipschitz στο $x = 0$ διότι αν ήταν θα υπήρχε $K > 0$ ώστε:

$$|x \log x| \leq K|x|, \quad (2)$$

που θα απαιτούσε: $|\log x| < K$, που είναι άτοπο διότι η $\log x$ δεν είναι φραγμένη στο $x = 0$.

(δ) Η λύση είναι μοναδική, παρότι η $-x \log(x)$ δεν είναι Lipschitz στο $x = 0$, διότι απαι-

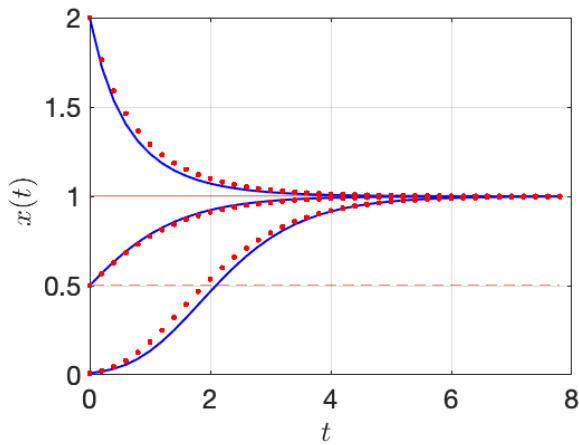
45 τείνεται άπειρος χρόνος για να φτάσει στο $x(0) = 0$:

$$T_{x \rightarrow \varepsilon} = \int_x^\varepsilon -\frac{dx}{x \log x} = \int_\varepsilon^x \frac{d(\log x)}{\log x} = \log(\log x / \log \varepsilon) \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3)$$

46 Το σημείο ισορροπίας $x_e = 0$ είναι απομονωμένο. Συνεπώς η συνθήκη Lipschitz είναι
 47 ικανή συνθήκη για την ύπαρξη μοναδικής λύσης, αλλά δεν είναι αναγκαία. Ικανή και
 48 αναγκαία συνθήκη μοναδικότητας των λύσεων είναι ο χρόνος μετάβασης στα σημεία
 49 ισορροπίας να είναι άπειρος (υποθέτουμε επίσης για την ύπαρξη τη συνέχεια του πε-
 50 δίου ταχυτήτων που και αυτό δεν είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη
 51 λύσεων).

52 (ε) $x(t) = (x(0))e^{-t}$. Η σύγκριση της αναλυτικής λύσης με την αριθμητική στο Σχ. 1 επι-
 53 βεβαιώνει ότι δεν έχει γίνει λάθος και στη μία και στην άλλη.

54 (στ,ζ) Η διακριτοποίηση οδηγεί στην αναδρομική σχέση $x_{n+1} = x_n(1 - \delta \log(x_n)) = f(x_n)$,
 55 που έχει και αυτή ως σταθερά σημεία τα $x_e = 1$ και $x_e = 0$. Η ευστάθεια του κάθε x_e
 56 κρίνεται από το αν είναι $|f'(x_e)| < 1$ όπου $f'(x) = 1 - \delta - \delta \log(x)$. Είναι $f'(1) = 1 - \delta$.
 57 Συνεπώς αν $\delta < 2$ και $\log(x_0) < 1/\delta$ ο ελκυστής του συνεχούς δυναμικού συστήματος
 58 και της διακριτοποιημένης προσέγγισης είναι ο ίδιος.



Σχήμα 1: Οι συνεχείς μπλε γραμμές η λύση της Gompertz με την Euler με βήμα $\delta = 0.2$. Η αναλυτική λύση με κόκκινες τελείες. Η προσέγγιση στην αναλυτική λύση είναι ικανοποιητική και με αυτό το βήμα.

6. Κατασκευάστε το διάγραμμα διακλάδωσης ως προς την παράμετρο a των δυναμικών συστημάτων στην ευθεία και χαρακτηρίστε το είδος της διακλάδωσης

$$(\alpha) \dot{x} = a - 3x^2$$

$$(\beta) \dot{x} = ax - 4x^3$$

$$(\gamma) \dot{x} = ax + x^3$$

$$(\delta) \dot{x} = x + \tanh(ax)$$

$$(\epsilon) \dot{x} = 5 - ax^2$$

$$(\sigma\tau) \dot{x} = ax - x/(1+x)$$

7. Τα σημεία “ισορροπίας” του δυναμικού συστήματος $x_{n+1} = f(x_n)$ είναι τα σταθερά σημεία της $x_{n+1} = f(x_n)$, που αναφέρονται και ως σημεία περιόδου 1, τα σταθερά σημεία της $x_{n+1} = f(f(x_n))$, που αναφέρονται ως σημεία περιόδου 2, κ.ο.κ.

(α) Εξηγήστε τον λόγο που τα σταθερά σημεία της $x_{n+1} = f(f(x_n))$ ονομάζονται σημεία περιόδου 2. Σχεδιάστε τη χρονοσειρά των σημείων αυτών αν ξεκινούσατε από ένα από αυτά.

(β) Δείξτε ότι το σταθερό σημείο x_e της $x_{n+1} = f(x_n)$ είναι ευσταθές όταν είναι $|f'(x_e)| < 1$ και το σταθερό σημείο x_e της $x_{n+1} = f(f(x_n))$ είναι ευσταθές όταν είναι $|f'(f(x_e))f'(x_e)| < 1$.

(γ) Η αναδρομική σχέση που προκύπτει από την αριθμητική επίλυση της λογιστικής έχει $f(x) = x + \delta x(1 - x)$, όπου δ το βήμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης και το $x \geq 0$ είναι στην πραγματική ευθεία.

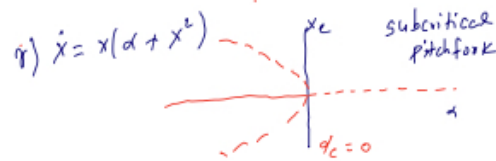
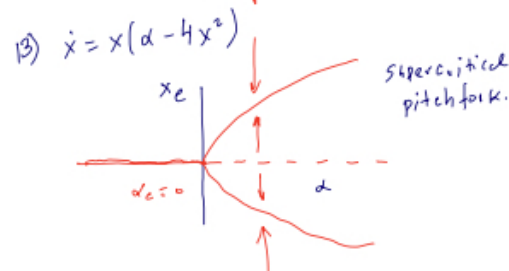
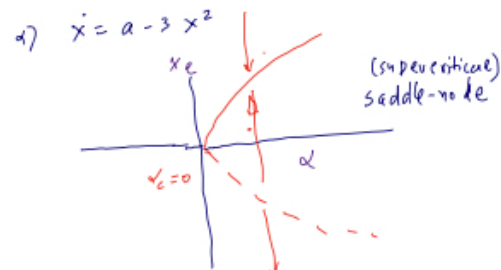
(δ) Προσδιορίστε τα σταθερά σημεία της $x_{n+1} = f(x_n)$ και προσδιορίστε το κρίσιμο δ στο οποίο γίνονται ασταθή.

(ε) Σχεδιάστε την $f(f(x))$. Προσδιορίστε τώρα αναλυτικά τα σταθερά σημεία της $x_{n+1} = f(f(x_n))$ και προσδιορίστε το κρίσιμο δ_{p2} στο οποίο γίνονται ασταθή.

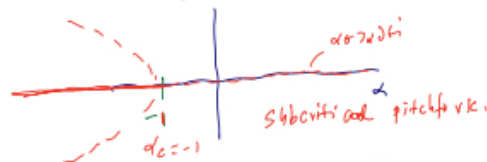
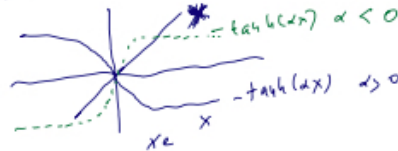
(στ) Σχεδιάστε το διάγραμμα διακλάδωσης των σημείων ισορροπίας με παράμετρο δ για $0 < \delta < \delta_{p2} + 0.09$. Τι μορφής διακλαδώσεις εμφανίζονται;

(ζ) Πως πιστεύετε ότι το διάγραμμα διακλάδωσης διαμορφώνεται για μεγαλύτερα δ ;

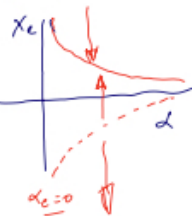
(η) Υπάρχουν τιμές του δ όπου οι διαδοχικές τιμές του x δεν έχουν καμμία περιοδικότητα και φαίνονται να λαμβάνουν τυχαίες τιμές; Μπορείτε να εντοπίσετε μία τέτοια συμπεριφορά;



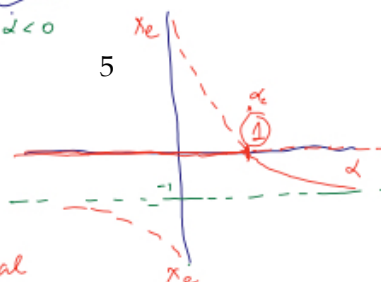
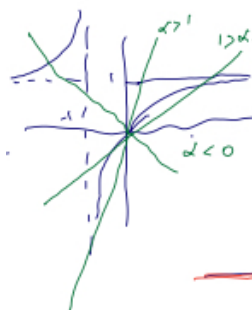
d) $\dot{x} = x + \tanh(ax) \approx x(1+a)$ $x > 0$



e) $\dot{x} = 5 - ax^2$ $x = \pm \sqrt{5/a}$ $a > 0$



f) $\dot{x} = ax - \frac{x}{1+x}$ $x < -1$ $\dot{x} = (-1)x$
 $x_e = 0$
 $x_e = -1 + 1/a = \frac{1-a}{a}$



91 (α) Σταθερά σημεία της απεικόνισης

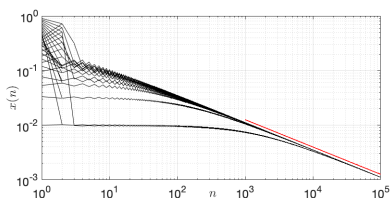
$$f(x) = (1 + \delta)x - \delta x^2 \quad (4)$$

92 προσδιορίζονται από τον μηδενισμό της

$$0 = f(x) - x = \delta x(1 - x) \quad (5)$$

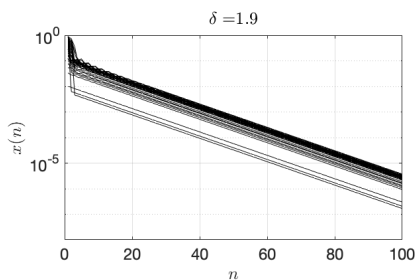
$$(6)$$

93 Με σταθερά σημεία τα $x_e = 0, 1$, όπως και στο συνεχές σύστημα (στο οποίο το 0 ήταν
94 ασταθές και το 1 είναι ευσταθές αν $\delta < 2$ και ο ελκυστής είναι το 1 αν επίσης είναι
95 $0 < x < (1 + \delta)/\delta$.



Σχήμα 2: Η σύγκλιση της αναδρομικής σχέσης $x_{n+1} = 3x_n - 2x_n^2$ στο 1, για 31 αρχικές συνθήκες στο διάστημα $0 < x < (1 + \delta)/\delta$. Η σύγκλιση γίνεται με ρυθμό $n^{-1/2}$, που σημειώνεται με την κόκκινη ευθεία γραμμή στο loglog γραφήμα. Εμφανίζει κρίσιμη επιβράδυνση. Σχεδιάζεται το $\log(|x_n - 1|)$ συναρτήσει του $\log n$.

96 Η αναδρομική για $\delta = 2$ είναι $x_{n+1} = 3x_n - 2x_n^2$, και τελικά συγκλίνει στο 1 εφόσον
97 $x < 3/2$ με ρυθμό $n^{-1/2}$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Εμφανίζεται κρίσιμη επιβράδυνση
98 στη σύγκλιση. Για $\delta < 2$ η σύγκλιση είναι εκθετική όπως και στο συνεχές σύστημα, και
99 όπως φαίνεται στο Σχ. 4.



Σχήμα 3: Η σύγκλιση της αναδρομικής σχέσης $x_{n+1} = (1 + \delta)x_n - \delta x_n^2$ στο 1, για $\delta < 2$ είναι εκθετική όπως και στο συνεχές σύστημα, όπως φαίνεται στο $\log(x) - n$ διάγραμμα. Σχεδιάζεται το $\log(|x_n - 1|)$ συναρτήσει του n .

100 (β) Η αναδρομική σχέση $x_{n+2} = F(x_n)$ όπου:

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(f(x)) = (1 + \delta)f - \delta f^2 \quad (7)$$

$$f(f(x)) - x = \delta x(1 - x)(2 + \delta - \delta(2 + \delta)x + \delta^2 x^2) \quad (8)$$

101 και τα σταθερά της σημεία είναι:

$$x_e = 0, 1, x_a = \frac{\delta + 2 + \sqrt{\delta^2 - 4}}{2\delta}, x_b = \frac{\delta + 2 - \sqrt{\delta^2 - 4}}{2\delta} \quad (9)$$

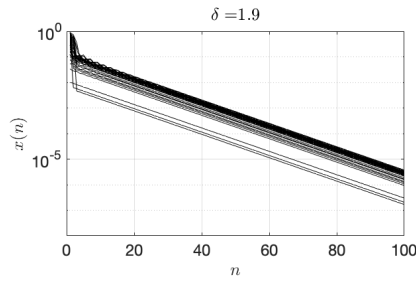
102 όπου

$$f(x_a) = x_b, \quad f(x_b) = x_a \quad (10)$$

103

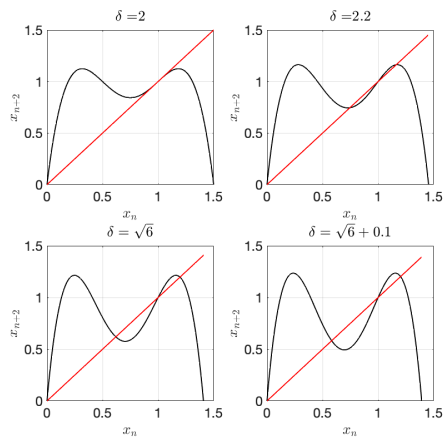
$$\begin{aligned} (f(f(x)))'_{x=x_a} &= f'(x_a)(1 + \delta - 2\delta f(x_a)) \\ &= f'(x_a)(1 + \delta - 2\delta x_b) \\ &= f'(x_a)f'(x_b) \\ &= (-1 - \sqrt{\delta^2 - 4})(-1 + \sqrt{\delta^2 - 4}) \\ &= 5 - \delta^2 \end{aligned}$$

104

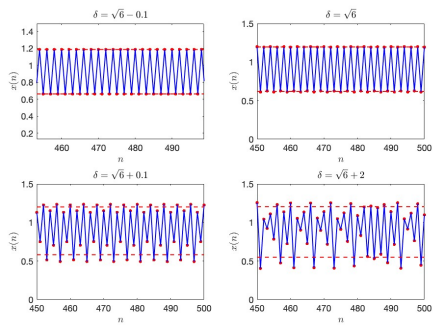


Σχήμα 4: Η σύγκλιση της αναδρομικής σχέσης $x_{n+1} = (1 + \delta)x_n - \delta x_n^2$ στο 1, για $\delta < 2$ είναι εκθετική όπως και στο συνεχές σύστημα, όπως φαίνεται στο $\log(x)$ - n διάγραμμα.

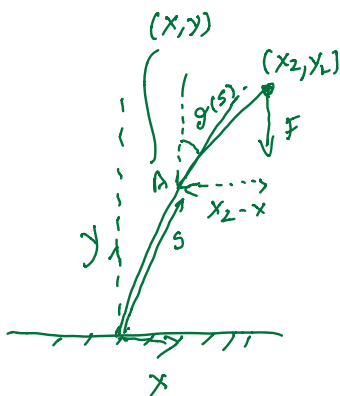
105 Τα σταθερά σημεία περιόδου 2 που εμφανίζονται για $\delta \geq 2$, γίνονται ασταθή όταν $|5 -$
106 $\delta^2| > 1$ δηλαδή όταν $\delta > \sqrt{6} \approx 2.4495$. Δηλαδή είναι το $\delta_c = \sqrt{6}$.



Σχήμα 5: Η αναδρομική σχέση περιόδου 2 και τα σταθερά της σημεία για διαφορετικά δ .



Σχήμα 6: Τιμές της αναδρομικής ακολουθίας η οποία από περιοδική περιόδου 2 γίνεται χαοτική για $\delta = \sqrt{6} + 2$. Για $\delta = \sqrt{6} + 0.1$ έχει περίοδο 4.



Σχήμα 7: Η ράβδος του Euler

8. Ο Euler υπολόγισε το κρίσιμο φορτίο που θα λυγίσει μια ελαστική ράβδο. Έδειξε ότι εξίσωση που διέπει το χρονοανεξάρτητο σχήμα της ράβδου σε στατική ισορροπία είναι η

$$D\ddot{\theta} + F \sin \theta = 0 \quad , \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(L) = 0 \quad . \quad (11)$$

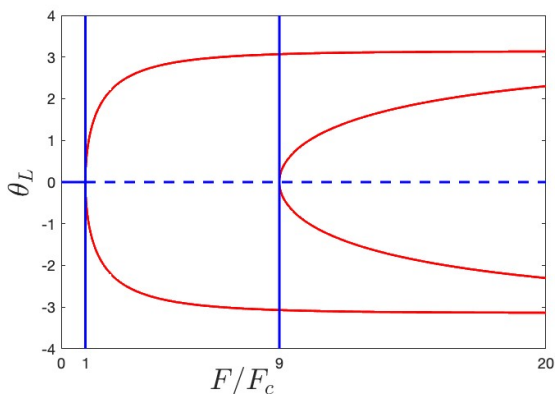
Η τελεία συμβολίζει παραγώγιση ως προς το μήκος τόξου (βλ. Σχ. 19) επί της ράβδου, π.χ. $\dot{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} d\theta/ds$. Το s είναι το μήκος τόξου της ράβδου από το κατώτερο σημείο της, όπου $s = 0$, ενώ η ράβδος θεωρείται ότι έχει αναλλοίωτο σταθερό μήκος L , δηλαδή η ράβδος δεν συρρικνώνεται υπό το βάρος που έχει εναποτεθεί σε αυτήν, και συνεπώς η παραπάνω εξίσωση ορίζεται στο διάστημα $s \in [0, L]$. Η $D > 0$ είναι η ελαστική σταθερά της ράβδου. Η γωνία θ είναι η γωνία που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της καμπύλης της ράβδου με την κατακόρυφο. Αυτή η εξίσωση διέπει το σχήμα ισορροπίας της ράβδου όταν ασκείται δύναμη F στο άνω άκρο της. Εμείς θα θεωρήσουμε ότι $F > 0$, που αντιστοιχεί σε πιεστική δύναμη. Η συνοριακή συνθήκη στο κατώτερο άκρο, $\theta(0) = 0$, προκύπτει επειδή θεωρούμε ότι η ράβδος στο κάτω άκρο στηρίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να παραμένει κατακόρυφη, ενώ $\dot{\theta}(L) = 0$, επειδή το ανώτερο άκρο είναι μεν ελεύθερο να μετακινηθεί αλλά δεν μπορεί να καμπυλωθεί διότι δεν υπάρχει τάση από ελαστικό υλικό που μπορεί να καμπυλώσει το άκρο αυτό.

(α) Θεωρήστε ότι η ράβδος έχει λυγίσει ελάχιστα και το σχήμα ισορροπίας της ράβδου ικανοποιεί τη γραμμική εξίσωση:

$$D\ddot{\theta} + F\theta = 0 \quad , \quad (12)$$

με $\dot{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} d\theta/ds$ και συνοριακές συνθήκες:

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(L) = 0 \quad . \quad (13)$$



Σχήμα 8: Οι δύο πρώτοι κλάδοι της υπερκρίσιμης δικρανικής (pitchfork) διακλάδωσης της δοκού του Euler που οδηγεί σε σπάσιμο συμμετρίας.

Η εξίσωση αυτή ισχύει για μικρές παραμορφώσεις από την κατακόρυφο.

Προσδιορίστε για κάθε τιμή της F την $\theta(s)$. Αν χρησιμοποιήσουμε την $\theta_L \stackrel{\text{def}}{=} \theta(L)$ ως ενδεικτική συντεταγμένη που ορίζει την κατάσταση ισορροπίας της ράβδου, για ποιές τιμές του F αναμένετε διακλάδωση; Σε διάγραμμα (F, θ_L) σχεδιάστε το διάγραμμα διακλάδωσης της γραμμικής εξίσωσης (12). Ποία είναι η πρώτη κρίσιμη τιμή της δύναμης F_c που οδηγεί στο λυγισμό της ράβδου; Σχεδιάστε το σχήμα της ράβδου στις διάφορες διακλαδώσεις.

Η (12) με συνοριακές συνθήκες (13) επιδέχεται μόνο τη λύση $\theta = 0$ εκτός αν είναι $\sqrt{F/D} = n\pi/(2L)$ για $n = 1, 3, 5, \dots$, δηλαδή όταν η δύναμη που ασκείται έχει την τιμή:

$$F = \frac{n^2 \pi^2 D}{4L^2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Αυτό σημαίνει ότι αυξάνοντας τη δύναμη που ασκούμε επί της ράβδου, δεν θα καμφθεί η ράβδος (δεν θα αλλάξει η κατάσταση ισορροπίας από το $\theta = 0$), μέχρι η δύναμη γίνει η δύναμη λυγισμού που πρόβλεψε ο Euler: $F_c = \pi^2 D / (4L^2)$. Σε αυτή την περίπτωση η γραμμική θεωρία προβλέπει άπειρες καταστάσεις ισορροπίας της ράβδου, δεδομένου ότι η $\theta_e(s) = a \sin(\pi s / (2L))$ για κάθε θετικό πλάτος a ικανοποιεί την εξίσωση ισορροπίας. Αυτός ο εκφυλισμός αίρεται με την εισαγωγή των μη γραμμικών όρων. Το ίδιο συμβαίνει και στις επόμενες κρίσιμες τιμές όπου η κατάσταση ισορροπίας που προβλέπεται για την n -οστή κατάσταση είναι η $\theta_e(s) = a \sin(n\pi s / (2L))$, $n = 1, 3, 5, \dots$ για κάθε θετικό a . Σύμφωνα με τη γραμμική θεώρηση στις ενδιάμεσες τιμές τυπικά η κατάσταση ισορροπίας είναι και πάλι $\theta = 0$. Το διάγραμμα διακλάδωσης των καταστάσεων ισορροπίας σύμφωνα με τη γραμμική θεωρία έχει σχεδιαστεί στο Σχ. 8 με μπλε. Η μη γραμμική διόρθωση είναι σχεδιασμένη με κόκκινο. Προσέξτε ότι στο πλαίσιο αυτής της ανάλυσης δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την ευστάθεια ή αστάθεια των καταστάσεων διότι δεν

έχουμε τις εξισώσεις που διέπουν τη χρονική εξέλιξη της δοκού που θα μας επέτρεπαν μελέτη της ευστάθειας ή αστάθειας. Οπότε τυπικά δεν μπορούμε να χαρακτηρίσουμε ως ασταθή τις καταστάσεις $\theta = 0$ για $F > F_c$. Για το ότι είναι ασταθείς οι καταστάσεις αυτές μπορούμε να το υποστηρίξουμε έμμεσα συγκρίνοντας τη δυναμική ενέργεια

$$V[\theta] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^L \frac{1}{2} D \dot{\theta}^2 ds + F y_L = \int_0^L \left(\frac{1}{2} D \dot{\theta}^2 + F \cos \theta \right) ds ,$$

στην κατάσταση $\theta = 0$ για $F > F_c$ και δείχνοντας ότι είναι μεγαλύτερη από την κατάσταση που προβλέπεται από την μη γραμμική θεώρηση. Για $F > 9F_c$ προβλέπονται δύο καταστάσεις κάμψης (μπορείτε να τις βρείτε;), αυτή που θα υπερισχύσει είναι αυτή με τη χαμηλότερη ενέργεια (ποια είναι;).

9. Δείξτε ότι η λύση της $\dot{x} = ax + f(t)$ με $x(0) = x_0$ είναι η

$$x = e^{at} x_0 + \int_0^t ds e^{a(t-s)} f(s) .$$

Όταν είναι $f(t) = \cos(t)$ και $a = 1$ τι αναμένεται να συμβεί αν αρχικά είναι $x(0) = x_0$; Τώρα προσδιορίστε την απεικόνιση Poincaré μίας περιόδου. Προσδιορίστε τα σταθερά σημεία της απεικόνισης, καθώς και την ευστάθειά τους. Ποιό είναι το φυσικό νόημα των σταθερών σημείων; Σχεδιάστε τη τροχιά για μία περίοδο που αντιστοιχεί στο σταθερό σημείο καθώς και μερικές άλλες τροχιές γύρω από αυτήν.

Η αναδρομική σχέση για την εξέλιξη του συστήματος από περίοδο σε περίοδο είναι

$$x_{n+1} = e^{2\pi a} x_n + \frac{a}{1+a^2} (e^{2\pi a} - 1) .$$

και περιοδική τροχιά προκύπτει όταν είναι

$$x_e = -\frac{a}{1+a^2} ,$$

η οποία είναι εμφανώς ασταθής εφόσον $a > 0$. Δεν υπάρχουν περιοδικές τροχιές περιόδου 2,3,...

10. α) Θεωρήστε το μη αυτόνομο μονοδιάστατο δυναμικό σύστημα $\dot{x} = v(x, t)$ επί της ευθείας, με $v(x, t)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς τα ορίσματά της και την $v(x, t)$ περιοδική συνάρτηση ως προς t με περίοδο 1. Αν υπάρχουν ξ και η με $\xi > \eta$ ώστε $\forall t$ να είναι $v(\xi, t) < 0$ και $v(\eta, t) > 0$, δείξτε ότι το δυναμικό σύστημα εκτελεί περιοδική κίνηση για κάποια αρχική κατάσταση x_0 , $\eta < x_0 < \xi$.

(β) Υπάρχουν περιοδικές τροχιές στο δυναμικό σύστημα $\dot{x} = x^2 - 1 - \cos(2\pi t)$; Αν υπάρχουν εντοπίστε τες κατασκευάζοντας αριθμητικά την αντιστοιχούσα απεικόνιση Poincaré και προσδιορίστε την ευστάθειά τους.

Αν $P(x)$ η εξέλιξη του x κατά μία περίοδο, τότε θα είναι $P(\xi) < \xi$ και $P(\eta) > \eta$. Η συνάρτηση $f(x) = x - P(x)$ είναι συνεχής και αλλάζει πρόσημο στο $[\eta, \xi]$. Συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της $f(x) = x - P(x)$ στο $[\eta, \xi]$, η x_0 , που αντιστοιχεί σε περιοδική τροχιά.

Για την Πέμπτη 13/3 (Συνέχεια της Άσκησης 8) Η εξίσωση ισορροπίας του σχήματος της ράβδου (11) προκύπτει από την απαίτηση να είναι ελάχιστο το συναρτησοειδές της συνολικής δυναμικής (ελαστικής και εξωτερικής δύναμης) ενέργειας

$$V[\theta] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^L \frac{1}{2} D \dot{\theta}^2 ds + F y_L = \int_0^L \left(\frac{1}{2} D \dot{\theta}^2 + F \cos \theta \right) ds , \quad (14)$$

182 δεδομένου ότι, αν θ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στη ράβδο με την κατακόρυφο y
 183 διεύθυνση (βλ. σχήμα 19), οι συντεταγμένες (x, y) της ράβδου προκύπτουν από τις εξισώσεις:

$$\dot{x} = \sin \theta \quad , \quad \dot{y} = \cos \theta \quad , \quad (15)$$

184 και $y_L = \int_0^L \cos \theta ds$. Θυμίζουμε ότι x είναι η οριζόντια διεύθυνση, με $(x, y) = (0, 0)$ το κάτω
 185 πακτωμένο άκρο της ράβδου. Ο πρώτος όρος στην (14) δίνει την ελαστική ενέργεια η οποία
 186 είναι ανάλογη του τετραγώνου της καμπυλότητας της ράβδου (ο όρος $\dot{\theta}$ είναι ίσος με την κα-
 187 μπυλότητα της ράβδου) και ο δεύτερος είναι το έργο της ασκούμενης δύναμης.

188 (α) Δείξτε από πρώτες αρχές, ορίζοντας προσεκτικά το είδος των μεταβολών, ότι στασιμοποιί-
 189 ηση της (14) οδηγεί στην (11). Ποία η διαφορά με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για την
 190 κατασκευή των εξισώσεων Euler-Lagrange μέσω της αρχής του Χάμιλτον στη Μηχανική;

191 Η διαφορά από την αρχή του Χάμιλτον είναι ότι αρκεί η στασιμοποίηση να γίνει ως προς
 192 μεταβολές, $\delta\theta$, που ικανοποιούν μόνο $\delta\theta(0) = 0$, δεν απαιτείται περιορισμός στη τιμή των
 193 διαταραχών στο ελεύθερο άκρο.

194 (β) Υπολογισμός της διακλάδωσης λυγισμού της ράβδου του Euler στη μη γραμμική θεώρηση.
 195 Η εξίσωση του σχήματος της ράβδου (11) είναι ίδια με αυτήν του επίπεδου εκκρεμούς και οι
 196 λύσεις διατηρούν την “ενέργεια”:

$$\frac{1}{2} D \dot{\theta}^2 - F \cos \theta = -F \cos \theta_L \quad , \quad (16)$$

197 όπου $\theta_L = \theta(L)$. [Προσέξτε ότι το συναρτησοειδές της συνολικής δυναμικής ενέργειας (4) που
 198 ελαχιστοποιούμε προκειμένου να βρούμε το σχήμα της ράβδου, που διέπεται τελικά από την
 199 (3) δεν είναι η διατηρούμενη ποσότητα. Η $V(\theta)$ είναι το αντίστοιχο της δράσης με αλλαγμένο
 200 το πρόσημο της κλασικής δυναμικής ενέργειας από αυτήν που υπεισέρχεται στη διατηρού-
 201 μενη ενέργεια.] Από τη διατήρηση αυτή, όπως υπολογίζουμε στο εκκρεμές την περίοδο συ-
 202 ναρτήσεως του πλάτους της ταλάντωσης, υπολογίζουμε εδώ το σχήμα της ράβδου προσδιορί-
 203 ζοντας το μήκος τόξου της ράβδου $s(\theta)$ και τις συντεταγμένες (x, y) της ράβδου, Από την (16)
 204 προκύπτει ότι

$$L = \sqrt{\frac{D}{2F}} \int_0^{\theta_L} \frac{d\theta}{\sqrt{-\cos \theta_L + \cos \theta}} \quad . \quad (17)$$

205 Κάνοντας την κλασσική αντικατάσταση $\sin(\theta/2) = \sin(\theta_L/2) \sin \phi$ έχουμε

$$L = \sqrt{\frac{D}{F}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_L/2) \sin^2 \phi}} \quad , \quad (18)$$

206 και για μικρά θ_L δείξτε ότι είναι:

$$L = \sqrt{\frac{D}{F}} \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2(\theta_L/2) + \frac{9}{64} \sin^4(\theta_L/2) + \dots \right) \quad , \quad (19)$$

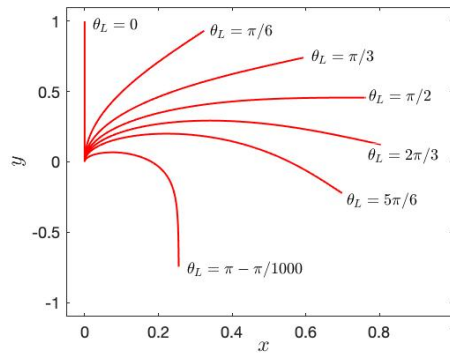
207 και μέσω αυτής αποδείξτε ότι για μικρά θ_L ότι:

$$F = F_c \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2(\theta_L/2) + \frac{11}{32} \sin^4(\theta_L/2) + \dots \right), \quad (20)$$

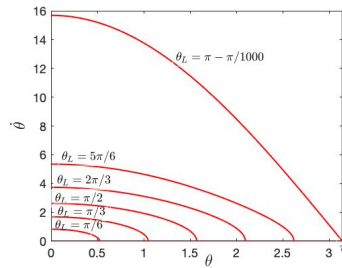
208 όπου F_c η κρίσιμη τιμή της δύναμης που υπολογίσατε από τη γραμμική προσέγγιση. Εξ' αυτού
 209 αποδείξτε ότι η διακλάδωση στο κρίσιμο σημείο λυγισμού είναι υπερκρίσιμη δικρανική δια-
 210 κλάδωση (supercritical pitchfork bifurcation) και σχεδιάστε τους δύο πρώτους κλάδους που εμ-
 211 φανίζονται στα F_c και $9F_c$

212

213 (γ) Σχεδιάστε το σχήμα τις δοκού σε διαδοχικές τιμές ενέργειας μετά την πρώτη διακλάδωση.
 214 Με ενεργειακά επιχειρήματα προσδιορίστε την ευστάθεια των λύσεων.



Σχήμα 9: Διαδοχικές θέσεις ισορροπίας της δοκού όταν η δοκός συμπιέζεται με αυξανόμενη δύναμη F που αντιστοιχεί στο αντίστοιχο θ_L του πρώτου κλάδου της διακλάδωσης στο F_c (βλ. Σχ. (8)). Η δύναμη που απαιτείται για να επιτευχθεί $\theta_L = \pi$ απειρίζεται.

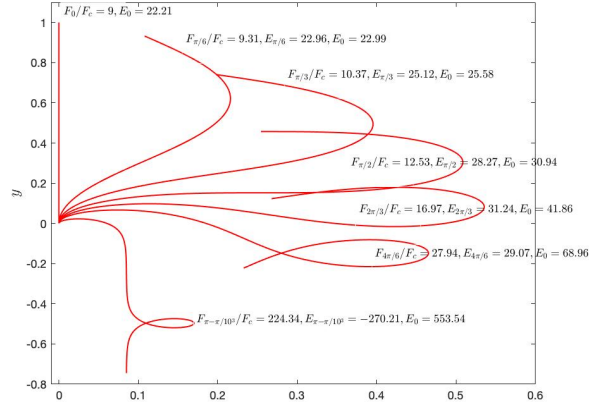


Σχήμα 10: Οι αντιστοιχούσες του Σχ. (9) τροχιές στο επίπεδο $\theta, \dot{\theta}$ (η $\dot{\theta} = \kappa$ είναι η καμπυλότητα της δοκού).

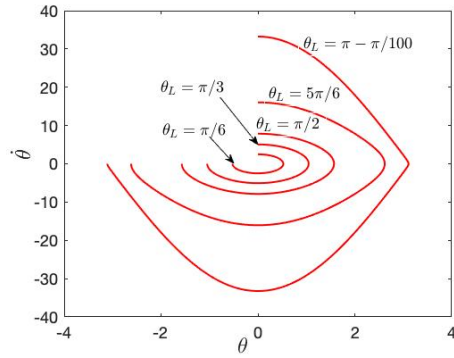
215 Το σχήμα της δοκού μετά το πρώτο σπάσιμο συμμετρίας έχει σχεδιασθεί στα Σχ. (9) και
 216 (10).

217 Σημείωση: Η ενέργεια (14) στην κατάσταση ισορροπίας είναι κάνοντας χρήση την (17)

$$V_{eq} = 2F \int_0^{\theta_L} \cos \theta \frac{ds}{d\theta} d\theta - FL \cos \theta_L$$



Σχήμα 11: Διαδοχικές θέσεις ισορροπίας της δοκού όταν η δοκός συμπιέζεται με αυξανόμενη δύναμη F που αντιστοιχεί στο αντίστοιχο θ_L του δεύτερου κλάδου της διακλάδωσης στο $9F_c$ (βλ. Σχ. (8)). Η δύναμη που απαιτείται για να επιτευχθεί $\theta_L = \pi$ απειρίζεται.



Σχήμα 12: Οι αντιστοιχούσες του Σχ. (11) τροχιές στο επίπεδο θ, ϕ (η $\dot{\theta} = \kappa$ είναι η καμπυλότητα της δοκού).

$$= -FL \cos \theta_L + 2\sqrt{DF} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - 2 \sin^2(\theta_L/2) \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_L/2) \sin^2 \phi}} d\phi$$

11. Οι εξισώσεις του Euler

$$\dot{x} = yz \quad (21\alpha')$$

$$\dot{y} = -2xz \quad (21\beta')$$

$$\dot{z} = xy, \quad (21\gamma')$$

περιγράφουν την εξέλιξη των τριών συνιστωσών της στροφορμής $(L_1, L_2, L_3) \stackrel{\text{def}}{=} (x, y, z) = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$, στους τρεις κύριους άξονες αδρανείας ενός στερεού, με ροπές αδρανείας $I_1 = 1, I_2 = 1/2, I_3 = 1/3$, το οποίο κινείται ελεύθερα χωρίς να του ασκούνται εξωτερικές ροπές. Οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας στους τρεις κύριους άξονες είναι $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Επομένως οι (21) προσδιορίζουν την κίνηση του διανύσματος της στροφορμής (που είναι σταθερό στο σύστημα του εργαστηρίου) στο σύστημα αναφοράς που κινείται με το σώμα. Οι εξισώσεις του Euler (21) προβλέπουν ότι υπάρχουν μόνο οι εξής τρεις καταστάσεις περιστροφικής ισορροπίας: περιστροφή περί τον κύριο άξονα 1: $x \neq 0, y = z = 0$, περιστροφή περί τον κύριο άξονα 2: $y \neq 0, x = z = 0$ και τέλος περιστροφή περί τον κύριο άξονα 3: $z \neq 0, x = y = 0$. Η περιστροφική κινητική ενέργεια του στερεού είναι $K = (x^2 + 2y^2 + 3z^2)/2$ και το τετράγωνο της ολικής στροφορμής του στερεού είναι $L^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

(α) Δείξτε ότι το δυναμικό σύστημα (21) διατηρεί την K και την L^2 .

(β) Θεωρήστε κινήσεις με $L^2 = 1$. Δείξτε ότι τότε η κινητική ενέργεια είναι στο διάστημα $1/2 \leq K \leq 3/2$ και προσδιορίστε σε τι κίνηση αντιστοιχεί η ελάχιστη και μέγιστη κινητική ενέργεια του στερεού δεδομένου ότι είναι $L^2 = 1$.

(γ) Για $L^2 = 1$ ολοκληρώστε εξισώσεις όταν είναι $K = 3/4$ και προσδιορίστε την πιο κατάλληλη Runge-Kutta η οποία οδηγεί στην καλύτερη διατήρηση της στροφορμής και της ενέργειας. (Οι λύσεις είναι περιοδικές, ολοκληρώστε μόνο για χρονικό διάστημα 2-3 περιόδων).

(δ) Πάλι για $L^2 = 1$ και για δέκα τιμές της κινητικής ενέργειας σχεδιάστε επί της μοναδιαίας σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ τις τροχιές που προκύπτουν. (Στην Matlab αυτό επιτυγχάνεται με την εντολή $\text{plot3}(x, y, z)$ όπου $x(t), y(t), z(t)$ είναι τα διανύσματα των συνιστωσών).

4.5 Fireflies

4.5.1 (Triangle wave) In the firefly model, the sinusoidal form of the firefly's response function was chosen somewhat arbitrarily. Consider the alternative model $\dot{\Theta} = \Omega$, $\dot{\theta} = \omega + Af(\Theta - \theta)$, where f is given now by a triangle wave, not a sine wave. Specifically, let

$$f(\phi) = \begin{cases} \phi, & -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \phi, & \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

on the interval $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2}$, and extend f periodically outside this interval.

- Graph $f(\phi)$.
- Find the range of entrainment.
- Assuming that the firefly is phase-locked to the stimulus, find a formula for the phase difference ϕ^* .

Σχήμα 13: Ασκήση 12 (από Στρογκατζ).

- 245 13. Σχεδιάστε τη ροή στο χώρο των φάσεων $(x, \dot{x})$ που επάγει ο ταλαντωτής με απόσβεση
 246 $\varepsilon \ddot{x} + \dot{x} + x = 1$ όταν είναι $\varepsilon \ll 1$. Περιγράψτε τη συμπεριφορά του συστήματος από
 247 τυχαίες αρχικές συνθήκες και προσδιορίστε αναλυτικά τους δύο χρόνους που εμφανίζο-
 248 νται.

4.5.3 (Excitable systems) Suppose you stimulate a neuron by injecting it with a pulse of current. If the stimulus is small, nothing dramatic happens: the neuron increases its membrane potential slightly, and then relaxes back to its resting potential. However, if the stimulus exceeds a certain threshold, the neuron will “fire” and produce a large voltage spike before returning to rest. Surprisingly, the size of the spike doesn't depend much on the size of the stimulus—anything above threshold will elicit essentially the same response.

Similar phenomena are found in other types of cells and even in some chemical reactions (Winfree 1980, Rinzel and Ermentrout 1989, Murray 2002). These systems are called *excitable*. The term is hard to define precisely, but roughly speaking, an excitable system is characterized by two properties: (1) it has a unique, globally attracting rest state, and (2) a large enough stimulus can send the system on a long excursion through phase space before it returns to the resting state.

118 FLOWS ON THE CIRCLE

This exercise deals with the simplest caricature of an excitable system. Let $\dot{\theta} = \mu + \sin \theta$, where μ is slightly less than 1.

- Show that the system satisfies the two properties mentioned above. What object plays the role of the “rest state”? And the “threshold”?
- Let $V(t) = \cos \theta(t)$. Sketch $V(t)$ for various initial conditions. (Here V is analogous to the neuron's membrane potential, and the initial conditions correspond to different perturbations from the rest state.)

Σχήμα 14: Ασκήση 14 (από Στρογκατζ).

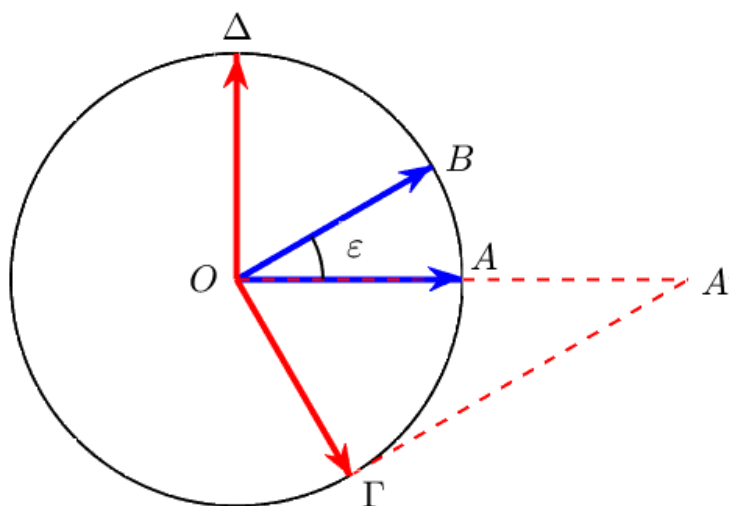
14. Τα δύο μη ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} \cos \epsilon \\ \sin \epsilon \end{pmatrix}$$

με $\epsilon \neq \pm\pi/2, \pm\pi$ σχηματίζουν μία πλήρη βάση του πραγματικού χώρου των δύο διαστάσεων και κάθε διάνυσμα $|\psi\rangle$ του χώρου μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των δύο αυτών διανυσμάτων βάσης, δηλαδή είναι

$$|\psi\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |2\rangle.$$

Κατασκευάστε γεωμετρικά το μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου που διεγείρει τα μέγιστα το $|1\rangle$ (δηλαδή το μοναδιαίο διάνυσμα που μεγιστοποιεί το α .) Πόσο είναι το πλάτος της διέγερσης όταν είναι $\epsilon \ll 1$. Τι συμβαίνει όταν είναι $\epsilon = \pi/2$.



Σχήμα 15: Άσκηση 14. Η μέγιστη διέγερση του διανύσματος $\vec{OA} \stackrel{\text{def}}{=} |1\rangle$ επιτυγχάνεται από το διάνυσμα $\vec{OG}$, το οποίο είναι το διάνυσμα που είναι $\perp \vec{OB} \stackrel{\text{def}}{=} |2\rangle$, και αναλύεται στη βάση $|1\rangle, |2\rangle$ ως $\vec{OG} = (1/\sin \epsilon) |1\rangle + \cot \epsilon |2\rangle$. Δηλαδή η μέγιστη διέγερση του $|1\rangle$ που μπορεί να πετύχει ένα μοναδιαίο διάνυσμα είναι $1/\sin \epsilon$. Τα $\vec{OG}/\sin \epsilon$ και $\vec{OD}/\sin \epsilon$ είναι η ορθογώνια βάση των $|1\rangle, |2\rangle$, και αντιστοιχούν (είναι ερμιτιανά ανάστροφα δηλαδή) των $\langle 1|, \langle 2|$ αντίστοιχα, με την ιδιότητα δηλαδή $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$, όπου $i, j = 1, 2$.

15. Θεωρήστε το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = Ax$ με x διδιάστατο πραγματικό διάνυσμα και

$$A = \begin{pmatrix} -0.1 & R \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix}.$$

Η ενέργεια του συστήματος ορίζεται ως $E = x^\dagger x$ ($\dagger$ είναι ο ερμιτανός ανάστροφος). Με χρήση Matlab (όπου χρειάζεται)

(α) Προσδιορίστε τις ιδιοτιμές και ιδιοκαταστάσεις του A για $R = 10$ (εντολή $[U,S]=\text{eig}(A)$).

(β) Πάλι για $R = 10$ σχεδιάστε για 40 μονάδες του χρόνου την εξέλιξη της ενέργειας αν η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι η μοναδιαίου μέτρου ιδιοκατάσταση που κυριαρχεί ασυμπτωτικά.

(γ) Σχεδιάστε τώρα την εξέλιξη για 40 μονάδες του χρόνου την εξέλιξη της ενέργειας όταν είναι $R = 10$ και η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι η μοναδιαίου μέτρου κατάσταση που διεγείρει το περισσότερο την ιδιοκατάσταση με τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή.

(δ) Σχεδιάστε τώρα στο ίδιο διάγραμμα την εξέλιξη 100 τυχαίων αρχικών συνθηκών μοναδιαίου μέτρου (σημειώνοντας με άλλο χρώμα την εξέλιξη των (β) και (γ).)

(ε) Τι συμπεραίνετε για την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας του δυναμικού συστήματος αν $R \rightarrow \infty$;

```
clear all
dt=0.001;
Nt=40000;
A=[-0.1 10;0 -0.2];
EA=expm(A*dt);
Nens=100;

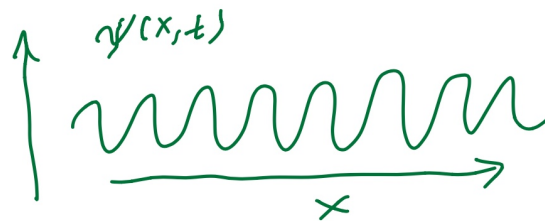
for im=1:Nens
x0=randn(2,1);
x0=x0/norm(x0);
t(1)=0;
E(1)=x0'*x0;
xt=x0;

for ia=2:Nt
t(ia)=(ia-1)*dt;
xt=EA*xt;
E(ia)=xt'*xt;
end
```

```

290 figure(10)
291 plot(t,E,'r','linewidth',2)
292 xlabel('$t$', 'interpreter','latex')
293 ylabel('$E(t)$', 'interpreter','latex')
294 set(gca,'FontSize',24)
295 hold on
296 figure(100)
297 semilogy(t,E,'b','linewidth',2)
298 xlabel('$t$', 'interpreter','latex')
299 ylabel('$\log(E(t))$', 'interpreter','latex')
300 set(gca,'FontSize',24)
301 hold on
302
303
304
305 end
306 figure(10);hold off
307 figure(100);hold off

```



Σχήμα 16

16. Θεωρήστε μονοδιάστατο πεδίο $\psi(x,t)$ που εμφανίζει κορυφώσεις, όπως στο Σχήμα 16, οι οποίες έχουν δεδομένη κατεύθυνση κίνησης, έστω τη θετική. Θεωρούμε ότι ο κυματισμός του πεδίου είναι πολύ πυκνός ώστε να μπορούμε να ορίσουμε ως συνεχείς μεταβλητές τον αριθμό των κορυφών του πεδίου ανά cm , $k(x,t)$, και τον αριθμό των κορυφών ανά $second$, $\omega(x,t)$, που περνούν προς τη θετική κατεύθυνση από το σημείο x . Θεωρούμε επίσης ότι οι κορυφές παραμένουν κορυφές, ούτε διασπώνται, ούτε δημιουργούνται, ούτε εξαφανίζονται, έτσι ώστε ο αριθμός των κορυφών του πεδίου να διατηρείται.
- α) Γράψτε την εξίσωση συνέχειας που συνεπάγεται η διατήρηση του αριθμού των κορυφών.
- β) Το k είναι ο τοπικός κυματαριθμός, και το ω η τοπική συχνότητα του κυματισμού. Αν γνωρίζουμε ότι για το πεδίο αυτό υπάρχει σχέση $\omega(k)$ γράψτε την εξίσωση που διέπει το

319 k .

320 γ) Σύμφωνα με το β) που θα βρίσκεται στον χρόνο t ένας δεδομένος κυματαριθμός k_0 ;

Νόμοι διατήρησης σε πεδία

321 Στη κλασσική μηχανική των σωματιδίων ορίσαμε διατηρήσιμες ποσότητες όπως την
322 ενέργεια, ορμή, κ.λ.π. τις ποσότητες, $Q(t)$, που δεν μεταβάλλονται κατά τη χρονική εξέ-
323 λιξη του συστήματος, και που ικανοποιούν δηλαδή

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (22)$$

324 Στη μηχανική αυτές οι μεταβλητές του συστήματος, θέσεις και ορμές, καθώς και κάθε
325 ποσότητα που σχηματίζεται από αυτές είναι συναρτήσεις μόνο του χρόνου κατά τη хро-
326 νική εξέλιξη του συστήματος.

327 Στη μηχανική των πεδίων οι μεταβλητές είναι συναρτήσεις και του χρόνου και των χωρι-
328 κών διαστάσεων. Ας θεωρήσουμε ότι το πεδίο εκτείνεται σε μία χωρική διάσταση, είναι
329 δηλαδή ένα πεδίο 1-διάστασης, π.χ. το φυσικό σύστημα να είναι μία χορδή που εκτελεί
330 εγκάρσιες ταλαντώσεις πλάτους $\eta(x, t)$. Υπό αυτή την έννοια η μηχανική των σωματι-
331 δίων είναι μηχανική πεδίων 0-διάστασης.

332 Πως μπορούμε να περιγράψουμε το νόμο διατήρησης σε αυτό το πεδίο; Θα μπορούσαμε
333 να πούμε ότι κατά την κίνηση η ποσότητα $Q(t) = \int_{\mathcal{D}} dx q(x, t)$, όπου $\mathcal{D}$ το χωρίο του κατα-
334 λαμβάνεται από το πεδίο, είναι χρονικά σταθερή. Η ποσότητα αυτή λέγεται το συνολικό
335 “φορτίο” (ή φορτίο Noether). Ένας όμως τέτοιος καθολικός (global) νόμος διατήρησης δεν
336 είναι ικανοποιητικός διότι τέτοιος νόμος διατήρησης δεν περιγράφει τη διατήρηση των
337 ποσοτήτων όπως εξελίσσονται χωροχρονικά. Π.χ. θεωρήστε το πεδίο φορτίου $q(x, t)$:

$$q(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{for } t \leq 0 \\ \alpha\delta(x - x_1) - \alpha\delta(x - x_2), & \text{for } t > 0. \end{cases}$$

338 Ενώ το Q του πεδίου αυτού διατηρείται είναι εμφανές ότι ο νόμος αυτός διατήρησης δεν
339 συνεπάγεται τη διατήρηση της ποσότητας αυτής σε τοπικό επίπεδο, δεδομένου ότι στην
340 περίπτωση αυτή ξαφνικά δημιουργούνται φορτία στα σημεία x_1 και x_2 . Είναι εμφανές
341 δηλαδή ότι ένας καθολικός νόμος διατήρησης, όπως αυτός του συνολικού φορτίου Q
342 δεν περιγράφει ικανοποιητικά τη διατήρηση ποσοτήτων στα πεδία. Οι νόμοι διατήρησης
343 στα πεδία πρέπει να έχουν τοπική διατύπωση και απαιτούν για τη διατύπωσή τους δύο
344 πεδία: την πυκνότητα της διατηρήσιμης ποσότητας $q(x, t)$ και τη ροή της διατηρήσιμης
345 ποσότητας $f(x, t)$, τα οποία πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (23)$$

Η εξίσωση συνέχειας είναι η διατύπωση του νόμου διατήρησης του πεδίου. Ο τοπικός αυτός νόμος διατήρησης βεβαιώνει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ποσότητας $\int_a^b dx q(x, t)$ στο χωρίο $[a, b]$, για κάθε $a < b$, είναι ίσος με τον ρυθμό f με τον οποίον το q εισέρχεται στο σύνορο a και εξέρχεται στο σύνορο b , δηλαδή είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b dx q(x, t) = f(a, t) - f(b, t). \quad (24)$$

Η διατύπωση του νόμου διατήρησης στην ολοκληρωτική μορφή είναι ισχυρότερος διότι απαιτεί μόνο την ολοκληρωσιμότητα των συναρτήσεων q και f , άλλως οι (23) και (24) είναι ισοδύναμες διατυπώσεις. Βεβαίως, ο τοπικός νόμος διατήρησης (23) συνεπάγεται τον καθολικό (22) (με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες), ενώ όπως είδαμε δεν ισχύει το αντίστροφο.

Το συναφές πεδίο f προσδιορίζεται από το φυσικό πρόβλημα. Εάν το πεδίο είναι η πυκνότητα ενός ρευστού που κινείται με ταχύτητα $v(x, t)$ τότε η διατήρηση της μάζας απαιτεί το $f = \rho v$. Σε άλλες περιπτώσεις το f προσδιορίζεται από τις εξισώσεις του πεδίου και ένας συστηματικός τρόπος προσδιορισμού της πυκνότητας q και f γίνεται μέσω του θεωρήματος της Noether που έχετε δει για πεδία 0-διάστασης. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να προσδιορίσουμε το νόμο διατήρησης της ενέργειας, ορμής κλπ μίας χορδής ή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Απάντηση στην 16 :

Στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta} k dx \quad (25)$$

κορυφές, δεδομένου ότι $k(x, t)$ είναι η πυκνότητα των κορυφών. Ο ρυθμός μεταβολής του αριθμού των κορυφών σε αυτό το διάστημα ισούται με τη διαφορά του ρυθμού κορυφών που εισέρχονται και εξέρχονται από αυτό το διάστημα, που είναι

$$\omega(\alpha, t) - \omega(\beta, t) = - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial \omega}{\partial x} dx . \quad (26)$$

Άρα από τις υποθέσεις η τοπική διατήρηση του αριθμού των κορυφών απαιτεί την εξής ισότητα:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\alpha}^{\beta} k dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial k}{\partial t} dx = - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial \omega}{\partial x} dx . \quad (27)$$

Εξ' αυτού συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dx = 0 , \quad (28)$$

για κάθε $\alpha < \beta$. Συνεπώς πρέπει η ολοκληρωτέα ποσότητα να μηδενίζεται (χρειάζεται μόνο συνέχεια εδώ των παραγώγων) και έτσι αποδεικνύεται ότι το k και ω ικανοποιούν τη γνωστή σχέση συνέχειας:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 . \quad (29)$$

Αν δε η $\omega(k)$ είναι συνάρτηση του k τότε το k εξελίσσεται χωροχρονικά σύμφωνα με την

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \omega'(k) \frac{\partial k}{\partial x} = 0 , \quad (30)$$

όπου $\omega'(k) = d\omega/dk$. Η εξίσωση αυτή εκφράζει ότι επί των σημείων του χωρόχρονου (x, t) που ικανοποιούν τη σχέση

$$x = \omega'(k)t + x_0 , \quad (31)$$

ο κυματαριθμός έχει τη σταθερή τιμή k και το σημείο x_0 είναι το σημείο στο χώρο που στον χρόνο $t = 0$ η πυκνότητα κορυφών (ο κυματάριθμος) είναι k .

Συνεπώς σταθερές τιμές του k διαδίδονται με την ταχύτητα ομάδας $\omega'(k)$.

Από τη (29) προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{(x_0, t_0)}^{(x, t)} k dx - \omega dt \quad (32)$$

είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που ενώνει το σημείο του χωρόχρονου (x_0, t_0) με το (x, t) και επομένως ορίζει μία συνάρτηση $\varphi(x, t)$ η οποία έχει ως παραγώγους τον κυματάριθμο και τη συχνότητα:

$$k = \frac{\partial \varphi}{\partial x} , \quad \omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} . \quad (33)$$

Το $\varphi(x, t)$ είναι η τοπική φάση των κυμάτων. Πχ. αν $\varphi(x, t) = kx - \omega t$ έχουμε την κλασική φάση ενός μονοχρωματικού κύματος. Επειδή τώρα

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt \quad (34)$$

η σταθερή φάση $d\varphi = 0$ διαδίδεται με ταχύτητα

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\varphi} = -\frac{\partial \varphi / \partial t}{\partial \varphi / \partial x} = \frac{\omega}{k}, \quad (35)$$

που είναι η γνωστή φασική ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η φάση ενός κύματος (πχ. μία κορυφή).

Συνεπώς οι κορυφές του κυματισμού διαδίδονται με τη φασική ταχύτητα ω/k .

Για την Πέμπτη 01/5

17. Θεωρήστε μονοδιάστατη διάδοση κυμάτων της θάλασσας με $\omega = \sqrt{gk}$, g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Παρατηρούμε τον κυματισμό που φτάνει στην ακτή που προκλήθηκε από έκρηξη σε κάποιο σημείο στη θάλασσα που είναι σε απόσταση L από την ακτή. Στις 12 το μεσημέρι παρατηρούμε κύματα μήκους κύματος 7 m , και μισή ώρα αργότερα κύματα 2 m . Πόσο μακριά από την ακτή έγινε η έκρηξη;

18. (ΦΧ) Έστω ότι το πεδίο της ταχύτητας $u(x, t)$ στην ευθεία ικανοποιεί την εξίσωση Hopf $u_t + uu_x = 0$. Είναι η δυναμική αυτή αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου; Τι συμβαίνει όταν το u είναι κάποιο άλλο πεδίο;

19. Γράψτε το δυναμικό σύστημα σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x + \beta y \\ \dot{y} &= -\beta x + \alpha y, \end{aligned}$$

σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) και σχεδιάστε τη ροή του δυναμικού συστήματος όταν είναι $\alpha > 0$ και $\alpha < 0$.

20. Θεωρήστε το δυναμικό 2×2 σύστημα

$$\dot{x} = Ax,$$

με $A = UDU^{-1}$ και

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & \cos \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon \end{pmatrix},$$

με $\alpha = -0.1$, $\beta = 1$ και $\varepsilon = \pi/10$. Το σύστημα αυτό έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές και οι δύο μιγαδικές ιδιοκαταστάσεις του φθίνουν εκθετικά με χαρακτηριστικό εκθέτη $\alpha = -0.1$ ενώ περιστρέφονται με γωνιακές ταχύτητες ± 1 . Θεωρήστε ως $x(0)$ την μοναδιαία μέτρου κατάσταση, $|a\rangle$, που διεγείρει τα μέγιστα το διάνυσμα $|1\rangle = U(:, 1)$, στη

βάση των κολωνών του U : $|1\rangle = U(:,1)$, $|2\rangle = U(:,2)$. Το $x(t)$ ανά πάσα στιγμή μπορεί να αναλυθεί στη βάση αυτή ως $x(t) = \lambda_1(t) |1\rangle + \lambda_2(t) |2\rangle$. Ως ενέργεια λαμβάνουμε το τετράγωνο του Ευκλείδειου μέτρου $\|x\|^2 = x^\dagger x = x_1^* x_1 + x_2^* x_2$.

(α) Με τι πράξεις προσδιορίζονται τα $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ όταν δίδεται το $x(t)$;

(β) Μέσω Matlab υπολογίστε και σχεδιάστε την εξέλιξη της ενέργειας για τις αρχικές καταστάσεις $|a\rangle$ και $|1\rangle$ για χρόνους $0 \leq t \leq 2\pi$.

(γ) Με Matlab σχεδιάστε το διάνυσμα $x(t)$ και την ανάλυση του στα $\lambda_1(t) |1\rangle$ και $\lambda_2(t) |2\rangle$ αν αρχικά είναι $x(0) = |a\rangle$. Εξηγήστε τώρα πως προκύπτει η μεταβατική αύξηση ενέργειας.

21. Ο ΧΑ έκανε την παρατήρηση ότι η μεταβατική αύξηση “ενέργειας” εμφανίζεται σε ένα ασυμπτωτικά ευσταθές σύστημα όταν ο πίνακας A που διέπει τη γραμμική εξέλιξη α) έχει ιδιοκαταστάσεις που σχηματίζουν μικρή γωνία μεταξύ τους και β) υπάρχει μεγάλη διαφορά στο πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών του A .

(α) Κατασκευάστε έναν πραγματικό πίνακα 2×2 με αρνητικές πραγματικές ιδιοτιμές και με τις παραπάνω ιδιότητες που εμφανίζει μεταβατική αύξηση.

(β) Σχεδιάστε την εξέλιξη της ενέργειας της μοναδιαίας αρχικής κατάστασης που διεγείρει βέλτιστα την ιδιοκατάσταση με τη μικρότερη απόλυτη πραγματική τιμή του εκθέτη και την εξέλιξη της ενέργειας όταν διεγείρεται αντίστοιχα η άλλη ιδιοκατάσταση.

(γ) Εξηγήστε το μηχανισμό μεταβατικής αύξησης της ενέργειας.

Για την Πέμπτη 08/5

22. Έστω $u(x, t)$ πεδίο ταχυτήτων ρευστού μοναδιαίας πυκνότητας που εξελίσσεται σύμφωνα με την $u_t + uu_x = 0$ με αρχική κατανομή

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & , \quad |x| > 1, \\ 1 & , \quad |x| \leq 1. \end{cases}$$

(α) Δείξτε ότι το κρουστικό κύμα που κινείται με ταχύτητα $1/2$ είναι συμβατό με τη διατήρηση της ορμής $P = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, u$ αλλά όχι της ενέργειας $E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, u^2$.

(β) Θεωρήστε τώρα ότι διατηρείται η ενέργεια. Κατασκευάστε το κρουστικό κύμα και δείξτε ότι αυτό είναι συμβατό με τη διατήρηση της ενέργειας αλλά όχι της ορμής. Υπ. επουλώστε τις ασυνέχειες στην αρχική κατανομή με σχεδόν κάθετες ευθείες)

23. Το πάχος της μπογιάς $\eta(x, t)$ που εναποτίθεται σε μία κατακόρυφη επιφάνεια ρέει υπό την επίδραση της βαρύτητας και εξελίσσεται σύμφωνα με την κατάλληλα αδιαστατικο-

436 ποιημένη εξίσωση συνέχειας:

$$\eta_t + \left(\frac{\eta^3}{3}\right)_x = 0, \quad (36)$$

437 (ο κύβος προέρχεται διότι η ταχύτητα της μπογιάς είναι παραβολική συνάρτηση της από-
438 στασης από τον τοίχο και η παροχή κυβική συνάρτηση του πάχους του ρευστού). Αρχικά
439 η μπογιά περιορίζεται στη λωρίδα $0 < x < 1$ έτσι ώστε

$$\eta(x, 0) = \begin{cases} 0 & , \quad x > 1, x < 0, \\ 1 & , \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

440 Κατά την εξέλιξη σχηματίζεται κρουστικό κύμα που αποτρέπει να γίνει η $\eta(x, t)$ πλειό-
441 τιμη συνάρτηση του x .

442 (α) Προσδιορίστε το $\eta(x, t)$

443 (β) Κάποιος υποστηρίζει ότι η παραπάνω δυναμική είναι ισοδύναμη με αυτήν της εξίσω-
444 σης Hopf, διότι πολλαπλασιάζοντας την (36) με την 2η έχουμε $2\eta\eta_t + \eta^2 2\eta_x = 0$ ή

$$u_t + uu_x = 0, \quad (37)$$

445 αν θέσουμε $u = \eta^2$. Προσδιορίστε τώρα την ταχύτητα του κρουστικού κύματος στην
446 αναπαράσταση (37) της αρχικής δυναμικής και εξηγήστε γιατί η αναπαράσταση (37)
447 ενώ φαίνεται ισοδύναμη με την (36), πολλές φορές δεν είναι.

448 24. Θεωρήστε ότι το πεδίο ταχυτήτων $u(x, t)$ ικανοποιεί την εξίσωση διάχυσης $u_t = \nu u_{xx}$,
449 $\nu > 0$, και έστω ότι αρχικά $u(x, 0) = \delta(x)$. Η ενέργεια του πεδίου είναι $E = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx$.

450 (α) Εξηγήστε τον λόγο που το πρόβλημα όπως έχει τεθεί δεν μπορεί να πραγματο-
451 ποιηθεί.

452 (β) Ανεξάρτητα από το (α) προσδιορίστε την $u(x, t)$, $t > 0$.

453 (γ) Υπολογίστε τον ρυθμό ανάλωσης της ενέργειας dE/dt .

454 (δ) Ποιός είναι ο ρυθμός ανάλωσης ενέργειας στο όριο $\nu \rightarrow 0$;

455 Απ.

456 Ο ρυθμός ανάλωσης είναι

$$\frac{dE}{dt} = -\nu \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx$$

457 επομένως αν το $\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx$ είναι φραγμένο τότε στο όριο $\nu \rightarrow 0$ ο ρυθμός ανάλωσης μηδενίζε-

458 ται. Η λύση της εξίσωσης διάχυσης είναι

$$u(x, t) = e^{tv\partial^2/\partial x^2} u(x, 0) .$$

459 Επομένως αν αναλύσω την $u(x, 0)$ στις ιδιοκαταστάσεις του $v\partial^2/\partial x^2$ τότε έχω τη λύση. Οι
460 ιδιοκαταστάσεις του $v\partial^2/\partial x^2$ στην άπειρη ευθεία είναι οι $e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$ (έχει διααιρεθεί με $\sqrt{2\pi}$ για
461 να είναι οι ιδιοκαταστάσεις ορθοκανονικές) με αντίστοιχες ιδιοτιμές $-vk^2$, οπότε αν

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk a(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} ,$$

462 τότε

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk a(k) e^{-vk^2 t} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} .$$

463 Η συνέχεια της $u(x, 0)$ εξασφαλίζεται απλώς με την απόλυτη σύγκλιση του ολοκληρώματος
464 της $a(k)$. Αλλά για κάθε $t > 0$ λόγω της εκθετικής μείωσης των συντελεστών $a(k)e^{-vk^2 t}$ η $u(x, t)$
465 είναι απείρως παραγωγίσιμη ασχέτως με το τι ήταν η $u(x, 0)$ και τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx u_x(x, t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk k^2 |a(k)|^2 e^{-2vk^2 t} \leq \int_{-\infty}^{\infty} dk k^2 |a(k)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx u_x(x, 0)^2 ,$$

466 με την επιφύλαξη ότι το $\int_{-\infty}^{\infty} dx u_x(x, 0)^2$ μπορεί να είναι άπειρο. Επομένως αν $\int_{-\infty}^{\infty} dx u_x(x, 0)^2 <$
467 ∞ τότε

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{dE}{dt} = 0 ,$$

468 όπως αναμένει κανείς διότι η διάχυση εξομαλύνει το πεδίο.

469 Τι συμβαίνει αν η αρχική κατάσταση είναι ασυνεχής, πχ. $u(x, 0) = \Theta(x)$, τότε η λύση είναι

$$u(x, t) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4vt}}\right) , \quad u_x(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi vt}} e^{-x^2/(4vt)} .$$

470 και

$$\frac{dE}{dt} = -v \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx = -v \frac{1}{2\pi vt} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2/(2vt)} = -\frac{v}{2\pi vt} \sqrt{2\pi vt} = -\sqrt{\frac{v}{2\pi t}} ,$$

471 το οποίο τείνει στο μηδέν όπως $v \rightarrow 0$.

472 Τι συμβαίνει τώρα αν

$$u(x, 0) = \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk a(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} , \quad a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} .$$

473 Η αρχική βέβαια κατάσταση έχει άπειρη ενέργεια και δεν είναι πραγματοποιήσιμη. Τότε

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-vk^2 t} \frac{e^{ikx}}{2\pi}, \quad u_x(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk (ik) e^{-vk^2 t} \frac{e^{ikx}}{2\pi},$$

474

$$\frac{dE}{dt} = v \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx \approx -\frac{1}{v^{1/2} t^{3/2}}$$

475 που αποκλίνει όπως το $v \rightarrow 0$. Στην περίπτωση αυτή η u_x απειρίζεται όπως $v \rightarrow 0$ και η $\int u_x^2 dx$
 476 αυξάνεται τόσο γρήγορα που δεν μπορεί να ομαλοποιηθεί από τη διάχυση. Στην περίπτωση
 477 αυτή το όριο $v \rightarrow 0$ είναι ανώμαλο και οι λύσεις δεν συγκλίνουν στις λύσεις με $v = 0$.

478 Για την Τετάρτη 14/5

479 25. Ένα πεδίο διαχέεται σε μία διάσταση. Όμως το πεδίο είναι ανομοιογενές και ο συντε-
 480 λεστής διάχυσης είναι μία θετική συνάρτηση, $\nu(x)$, του x . Γράψτε την εξίσωση διάχυσης
 481 για αυτό το πεδίο έτσι ώστε η ενέργεια του πεδίου $E = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx$ να μειώνεται μονότονα.

482 26. Σχεδιάστε με αριθμητική ολοκλήρωση στο επίπεδο $x, \dot{x}$ τις τροχιές του

$$\ddot{x} + x + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0.$$

483 για $\varepsilon = 0.1$ και αρχικές συνθήκες $x(0) = 0.1, \dot{x}(0) = 0$ και $x(0) = 4, \dot{x}(0) = 0$ για ικανό хро-
 484 νικό διάστημα ώστε να φανεί η ασυμπτωτική περιοδική τροχιά του συστήματος. Πόση
 485 ενέργεια εισχώρησε στο σύστημα σε κάθε περίπτωση.

486 27. Προσδιορίστε την εξέλιξη των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων στα σημεία ισορ-
 487 ροπίας $x(0) = \pm\pi, \dot{x}(0) = 0$ του εκκρεμούς με τριβή $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \sin x = 0, \gamma = 0.1$. (Υπ.
 488 προσδιορίστε στη γραμμική προσέγγιση τις πολλαπλότητες και συνεχίστε τις με αριθ-
 489 μητική ολοκλήρωση πίσω στον χρόνο για την ευσταθή και μπροστά στον χρόνο για την
 490 ασταθή.)

491 28. Έχουμε ειρηνική συνύπαρξη για τους πληθυσμούς που ικανοποιούν τις

492 $(\alpha) \dot{x} = x(2 - x - 2y), \dot{y} = y(1 - x - y);$

493 $(\beta) \dot{x} = x(1 - x - y), \dot{y} = y(1 - x - y);$

494 29. Ο ταλαντωτής

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \left(\dot{x} - \frac{1}{3} \dot{x}^3 \right), \quad \varepsilon > 0 \tag{38}$$

495 έχει έναν οριακό κύκλο στο επίπεδο (x, y) όπου $y = \dot{x}$.

(α) Δείξτε ότι η περιοδική αυτή τροχιά δεν μπορεί να βρίσκεται εντός του δίσκου $x^2 + y^2 < 1$.

(β) Χρησιμοποιώντας ενεργειακά επιχειρήματα προσδιορίστε τον οριακό κύκλο για $\varepsilon \ll 1$.

Για την Πέμπτη 22/5

31. Όταν το $\varepsilon \ll 1$ ο οριακός κύκλος της Van-derPol

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon y(x^2 - 1)\end{aligned}$$

είναι σε καλή προσέγγιση $x = 2 \cos t$, $y = -2 \sin t$. Διαταραχές περί τον οριακό κύκλο διέπονται από πίνακα $\mathbf{A}(t)$. Για την τιμή $\varepsilon = 0.1$:

(α) κάνοντας επαρκή χρονική διαμέριση υπολογίστε τον διαδότη $\Phi(2\pi)$ μίας περιόδου του $\mathbf{A}(t)$ με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

(β) υπολογίστε την ορίζουσα του $\Phi(2\pi)$ και το ίχνος του και μέσω αυτών υπολογίστε τις ιδιοτιμές του. Πως συγκρίνονται οι τιμές που βρήκατε με τα αναλυτικά αποτελέσματα όταν είναι $\varepsilon \ll 1$.

32. Κατασκευάστε ένα δυναμικό σύστημα που έχει δύο οριακούς κύκλους, ένας μέσα στον άλλο, με τον εσωτερικό να διαγράφεται ωρολογιακά και τον εξωτερικό αντιωρολογιακά. Προσδιορίστε στο παράδειγμα σας τα σημεία ισορροπίας. (Υπ. είναι εύκολη η κατασκευή σε πολικές συντεταγμένες).

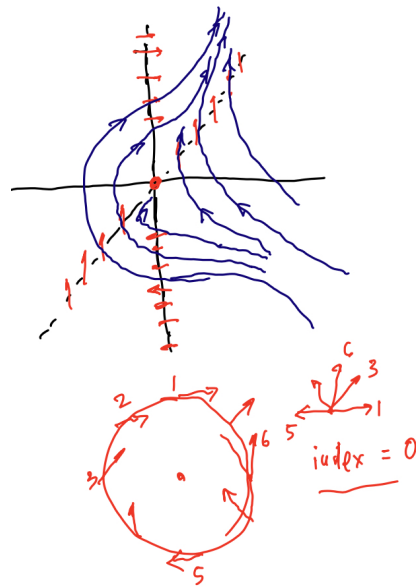
Απ. π.χ. με μόνο σημείο ισορροπίας το $(x, y) = (0, 0)$

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(r-1)(r-4) \\ \dot{\theta} &= r(r-2)\end{aligned}$$

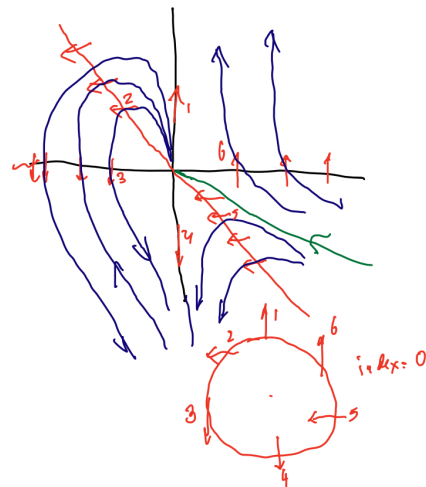
33. Σχεδιάστε τη ροή και υπολογίστε τον δείκτη του σημείου ισορροπίας των δυναμικών συστημάτων:

(α) $\dot{x} = y - x, \dot{y} = x^2$

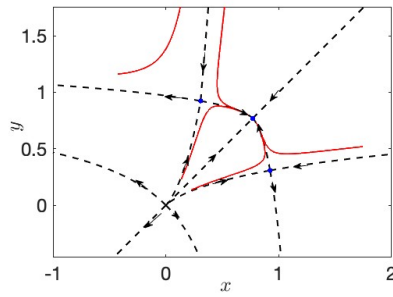
(β) $\dot{x} = xy, \dot{y} = x + y$



Σχήμα 17: Άσκηση 33α: Ο δείκτης είναι μηδενικός διότι η ροή έχει παντού $\dot{y} \geq 0$ και επομένως η ροή δεν μπορεί να κάνει κύκλο. Το σημείο ισορροπίας έχει προκύψει από σύγκρουση καταβόθρας (με δείκτη +1) με σάγμα (δείκτης -1) και έτσι $+1 + (-1) = 0$.



Σχήμα 18: Άσκηση 33β: Ο δείκτης είναι μηδενικός. Το σημείο ισορροπίας έχει προκύψει από σύγκρουση σάγματος (με δείκτη -1) με πηγή (δείκτης +1) και έτσι $-1 + (+1) = 0$.



Σχήμα 19: Άσκηση 35: Οι διάστικτες γραμμές είναι οι ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες υπολογισμένα αριθμητικά.

34. Ένα δυναμικό σύστημα έχει 3 οριακούς κύκλους, γ_1 , γ_2 , γ_3 , με τον γ_1 και γ_2 εντός του γ_3 . Προσδιορίστε τις δυνατές διατάξεις των κύκλων και σημειώστε τον ελάχιστο αριθμό σημείων ισορροπίας και το είδος τους που θα μπορούσε να επιτρέψει αυτήν την διάταξη.
35. (ΦΧ) Υπολογίστε τη μη γραμμική επέκταση των ασταθών και ευσταθών πολλαπλοτήτων του δυναμικού συστήματος

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 13x(1-x) - 3y \\ \dot{y} &= 13y(1-y) - 3x.\end{aligned}$$

και εξ' αυτού σχεδιάστε όλη τη ροή. Εξετάστε τις επιπτώσεις για την ειρηνική συνύπαρξη μεταξύ ίσων. Η παραδοχή για την αλληλεπίδραση είναι ρεαλιστική;

Υπ. Τα σημεία ισορροπίας είναι

$$(x_e, y_e) = (0, 0), \left(\frac{10}{13}, \frac{10}{13}\right), \left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}\right), \left(\frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right).$$

Για την Τετάρτη 28/5

36. Θεωρήστε τον ταλαντωτή

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0,$$

του οποίου η συχνότητα $\omega^2(t)$ μεταβάλλεται περιοδικά με περίοδο $T = 2\pi$ μεταξύ δύο συχνοτήτων, έτσι ώστε στο διάστημα $[0, 2\pi)$ να είναι:

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_0(1 + \varepsilon) & , \quad 0 \leq t < \pi, \\ \omega_0(1 - \varepsilon) & , \quad \pi \leq t < 2\pi. \end{cases}$$

532 (α) Προσδιορίστε τον διαδότη $\Phi(2\pi, \omega_0, \varepsilon)$ μία περιόδου (δεν χρειάζεται να πολλα-
533 πλασιάσετε τους πίνακες) και επιβεβαιώστε ότι είναι συνεχής συνάρτηση των ε και ω_0 .

534 (β) Σχεδιάστε τις ισοϋψείς του μέγιστου εκθέτη Lyapunov στην περιοχή $0 \leq \varepsilon \leq 1$,
535 $0.3 \leq \omega_0 \leq 2.3$ στο επίπεδο (ω_0, ε) .

536 (γ) Εάν η σειρά των συχνοτήτων αλλάξει και γίνει

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_0(1 - \varepsilon) & , \quad 0 \leq t < \pi , \\ \omega_0(1 + \varepsilon) & , \quad \pi \leq t < 2\pi , \end{cases}$$

537 εξηγήστε τον λόγο που παρότι ο διαδότης μίας περιόδου δεν είναι ο ίδιος με αυτόν της
538 (α) οι εκθέτες Lyapunov είναι ακριβώς οι ίδιοι.

539 (δ) Θα παρατηρήσετε ότι το διάγραμμα εμφανίζει “πλεξούδες”, δηλαδή εμφανίζο-
540 νται σημεία ευστάθειας σε περιοχές $\varepsilon > 0$ που μικρή αλλαγή των παραμέτρων καθιστά
541 τον ταλαντωτή ασταθή. Εξηγήστε τον λόγο εμφανίζονται αυτά τα σημεία ευστάθειας.

542