



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση Μη Γραμμικής Δυναμικής

02/10/2025

Σύνολο μορίων 115

1. (α) Ο διαδότης μιας περιόδου γραμμικού δυναμικού συστήματος περιόδου 2π είναι

$$\Phi(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Είναι το σύστημα ευσταθές; Υπολογίστε τον χαρακτηριστικό εκθέτη Lyapunov του συστήματος. Θα μπορούσε ο διαδότης αυτός να περιγράφει την εξέλιξη των διαταραχών περί μία περιοδική τροχιά;.

[5]

(β) Ο ταλαντωτής $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \epsilon \cos t)x = 0$ είναι ευταθής όταν είναι $\epsilon = 0$ και δεν υπάρχει χρονοεξάρτηση. Αν όμως γίνει έστω και κατ'ελάχιστον χρονοεξαρτώμενος τότε μπορεί να καταστεί ασταθής για ορισμένες τιμές της φυσικής συχνότητας του ταλαντωτή ω_0 . Προσδιορίστε αυτές τις υποψήφιες συχνότητες στις οποίες θα μπορούσε να καταστεί ο ταλαντωτής ασταθής εξηγώντας με σαφήνεια τον λόγο για τον οποίον στις υπόλοιπες συχνότητες είναι αδύνατον να καταστεί ασταθής μόλις το ϵ λάβει μη μηδενική τιμή..

[10]

2. Θεωρήστε το δυναμικό σύστημα

$$\ddot{x} = x - x^3 + \epsilon(1 - \alpha x^2)\dot{x}.$$

όπου α και ϵ πραγματικές σταθερές και $0 \leq \epsilon \ll 1$.

(α) Για την τιμή $\epsilon = 0$ σχεδιάστε στον χώρο των φάσεων $(x, \dot{x})$ τη ροή του δυναμικού συστήματος, σημειώνοντας ευκρινώς τα σημεία ισορροπίας μαζί με τις ευσταθείς και ασταθείς πληθότητες των.

[5]

(β) Προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας για κάθε τιμή του ϵ και προσδιορίστε τη γραμμική ευστάθεια τους συναρτήσει των $0 < \epsilon \ll 1$ και α . Για ποιές τιμές των παραμέτρων αυτών η γραμμική μελέτη της ευστάθειας έχει και μη γραμμική ισχύ;

[5]

(γ) Ποιός είναι ο δείκτης Poincaré των σημείων ισορροπίας; Προσδιορίστε στον χώρο των φάσεων $(x, \dot{x})$ τις δυνατές χωροθετήσεις των οριακών κύκλων όταν είναι $0 < \epsilon \ll 1$.

[5]

Απάντηση

(β) Τα μόνα σημεία ισορροπίας για κάθε ϵ είναι τα $(0, 0)$, $(\pm 1, 0)$. Το $(0, 0)$ είναι πάντα σάγμα. Τα $(\pm 1, 0)$ είναι κέντρα όταν είναι $\epsilon = 0$ και μετατρέπονται όταν είναι $0 < \epsilon \ll 1$ σε ευσταθείς σπείρες αν είναι $\alpha > 1$ και σε ασταθείς σπείρες αν είναι $\alpha < 1$. Για $\alpha = 1$ τα $(\pm 1, 0)$ είναι κέντρα, αλλά η γραμμική ανάλυση δεν μπορεί να καθορίσει το είδος της ισορροπίας στην περίπτωση αυτή.

3. Θεωρήστε το δυναμικό σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - y - (x^3 + xy^2 - x)(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + \mu y - (y^3 + x^2y - y)(x^2 + y^2),\end{aligned}$$

όπου μ πραγματική παράμετρος.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει πάντα σημείο ισορροπίας στην αρχή των αξόνων και προσδιορίστε την ευστάθειά του όταν είναι $\mu \neq 0$. [5]

(β) Γράψτε το σύστημα σε πολικές συντεταγμένες και προσδιορίστε αν υπάρχουν και άλλα σημεία ισορροπίας. [5]

(γ) Προσδιορίστε την ευστάθεια τώρα του σημείου ισορροπίας $(0, 0)$ όταν είναι $\mu = 0$ και προσδιορίστε την εξέλιξη των διαταραχών στο $(0, 0)$ σε αυτήν την περίπτωση σχεδιάζοντας τις τυπικές τροχιές τους. [5]

(δ) Προσδιορίστε τον αριθμό των περιοδικών τροχιών του συστήματος συναρτήσει της παραμέτρου μ κατασκευάζοντας το διάγραμμα διακλάδωσης των ακτίνων των οριακών κύκλων συναρτήσει της παραμέτρου μ . [5]

(ε) Σχεδιάστε για κάθε περιοχή του διαγράμματος διακλάδωσης τη ροή του δυναμικού συστήματος. [5]

(στ) Το δυναμικό σύστημα βρίσκεται σε ένα περιβάλλον εξωτερικού θορύβου ο οποίος δεν αλλοιώνει την κατευατή δυναμική του συστήματος. Πως θα γράφατε το δυναμικό σύστημα τότε; Τι θα συμβεί στα σημεία ισορροπίας του συστήματος; [5]

(ζ) Περιγράψτε τη φυσική συμπεριφορά του συστήματος όταν υπάρχει ελάχιστος θόρυβος (ώστε να μην μπορούν να πραγματοποιηθούν ακριβώς καταστάσεις ισορροπίας) και η παράμετρος μ μεταβάλλεται αργά εκτελώντας τον κύκλο $1 \rightarrow -1 \rightarrow 1$. [5]

(η) Σχεδιάστε συναρτήσει του χρόνου στο οποίον επιτελείται ο ο κύκλος αυτός τη μεταβολή του πλάτους των διαταραχών λόγω του περιβαντολογικού θορύβου. [5]

Απάντηση

(α) ευσταθής σπείρα όταν $\mu < 0$ και ασταθής σπείρα όταν $\mu > 0$.

(β)

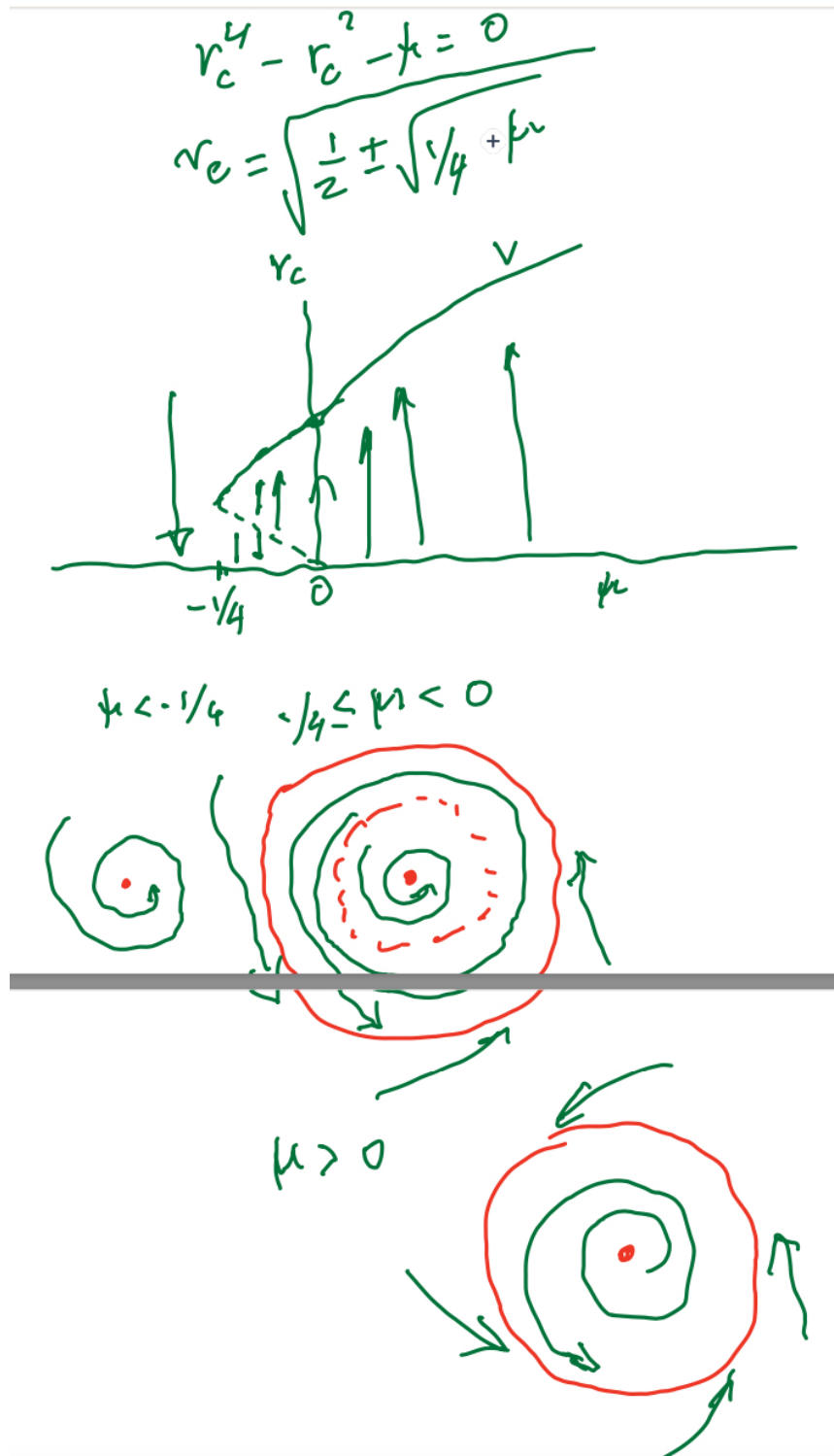
$$\dot{r} = r(\mu + r^2 - r^4) \quad , \quad \dot{\theta} = 1 \quad .$$

Άρα δεν υπάρχουν άλλα σημεία ισορροπίας.

(γ) Όταν $\mu = 0$ το $(0, 0)$ είναι ευσταθές και όλες οι τροχιές καταλήγουν στον οριακό κύκλο $r = 1$, ο οποίος είναι ευσταθής.

(στ) Προσθέτουμε στις μια ή και στις δύο εξισώσεις συναρτήσεις του χρόνου $f(t), g(t)$. Επομένως σημεία ισορροπίας παύουν να υπάρχουν, αλλά αν θόρυβος είναι ασθενής δηλαδή είναι $|f(t)| \ll 1$, $|g(t)| \ll 1$ τότε το δυναμικό σύστημα θα βρίσκεται στην περιοχή των ελκυστών (σταθερά σημεία ισορροπίας ή ευσταθείς οριακοί κύκλοι στην περίπτωση αυτή) του δυναμικού συστήματος.

(η) Αναμένεται ιδιαίτερη μεγέθυνση του πλάτους του θορύβου μόνον στις περιοχές $\mu \rightarrow -1/4_+$ και όταν $\mu \rightarrow 0_-$.



Σχήμα 1: Απάντηση στα (δ) και (ε)

4. Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.):

$$u_t + uu_x + \alpha u^2 = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (α) Να επιλυθεί το παραπάνω Π.Α.Τ. με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών και [10]
 - (β) Να διερευνηθεί αν —και υπό ποιες συνθήκες— σχηματίζεται κρουστικό κύμα. [10]
 - (γ) Αν σχηματίζεται κρουστικό κύμα, να προσδιοριστεί ο χρόνος θραύσης. [5]
5. Κύματα πίεσης στο αίμα που διατρέχει μακρές αρτηρίες περιγράφεται από το ακόλουθο απλοποιημένο υδροδυναμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} A_t + (Av)_x &= 0, \\ v_t + vv_x &= -p_x, \\ p &= (A - 1) + A_{tt}, \end{aligned}$$

όπου $A(x, t)$ είναι η διατομή της αρτηρίας (που αλλάζει με το χώρο και το χρόνο λόγω της διέλευσης του αίματος, ενώ απουσία ροής αίματος είναι $A = 1$), $v(x, t)$ η ταχύτητα του αίματος, και $p(x, t)$ η πίεση.

- (α) Να βρεθεί μια κατάσταση ισορροπίας του συστήματος. [5]
- (β) Θεωρώντας μικρές διαταραχές γύρω από την κατάσταση ισορροπίας, να προσδιοριστεί η σχέση διασποράς. [10]
- (γ) Ναδειχθεί ότι για μακρά κύματα (με κυματαριθμό $k \rightarrow 0$) η σχέση διασποράς ταυτίζεται με αυτήν της εξίσωσης KdV. [5]