



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Πρώτο τεστ Μη Γραμμικής Δυναμικής

13/5/2022

Σύνολο μορίων 120

1. Κάνοντας 4 επαναλήψεις με τη μέθοδο Picard προσδιορίστε την εξέλιξη του δυναμικού συστήματος

$$\dot{x} = 1 - tx, \quad x(0) = 0.$$

για μικρούς χρόνους.

[10]

2. Γράψτε από μνήμης τη λύση της $\dot{x} = Ax + f(t)$, $x(0) = x_0$ (δεν χρειάζεται απόδειξη).

[10]

3. α) Σχεδιάστε την απεικόνιση Poincaré $P(x)$ μιας περιόδου του δυναμικού συστήματος

$$\dot{x} + x = 2 \sin(t),$$

(η γενική λύση της δ.ε. με $x(0) = x_0$ είναι $x(t) = e^{-t}x_0 + \sin(t) - \cos(t) + e^{-t}$).

[10]

β) Προσδιορίστε το σταθερό σημείο και την ευστάθειά του.

[10]

γ) Το σταθερό σημείο εντοπίζει μία περιοδική τροχιά. Γράψτε την αναλυτική έκφραση αυτής της τροχιάς. Αν αρχίσετε από κάποιο άλλο σημείο τι εξέλιξη θα έχει το παραπάνω δυναμικό σύστημα;

[10]

4. Η $\varphi(x, t)$ επί της ευθείας, $x \in \mathbb{R}$, ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\varphi_t + \varphi \varphi_x = t, \quad \varphi(x, 0) = x.$$

α) Προσδιορίστε τις χαρακτηριστικές, Θα υπάρξει “θραύση” των λύσεων με αυτήν την αρχική συνθήκη;

[15]

β) Προσδιορίστε την αναλυτική έκφραση του $\varphi(x, t)$.

[15]

5. Η $\varphi(x, t)$ επί της ευθείας, $x \in \mathbb{R}$, ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\varphi_t + \varphi \varphi_x = 0.$$

α) Προσδιορίστε μία ποσότητα που διατηρείται κατά την εξέλιξη.

[10]

β) Για την αρχική συνθήκη $\varphi(x, 0) = \Theta(1 - x) - \Theta(-1 - x)$, όπου $\Theta(x) = 1$ όταν $x \geq 0$ και $\Theta(x) = 0$ όταν $x < 0$, σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές.

[10]

γ) Σχεδιάστε την εξέλιξη της διαταραχής στους χρόνους $t = 1$, $t = 2$, $t = 100$ δεχόμενοι την ασθενή ερμηνεία του δυναμικού νόμου.

[20]