



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση Μη Γραμμικής Δυναμικής

25/6/2026

“Words are like leaves; and where most abound,
Much fruit of sense beneath is rarely found.”
Alexander Pope, *An Essay on Criticism* (1711)¹

Σύνολο μορίων 160

1. Θεωρήστε το δυναμικό σύστημα στο επίπεδο εκφρασμένο σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) :

$$\dot{r} = \mu r - ar^3, \quad \dot{\theta} = 1,$$

όπου $a \neq 0$ μία μη μηδενική σταθερά και μ μία παράμετρος που λαμβάνει όλες τις πραγματικές τιμές. Σχεδιάστε τη ροή του δυναμικού συστήματος στις εξής περιπτώσεις

(α) $\mu < 0 < a$ [5]

(β) $0 < \mu, a$ [5]

(γ) $\mu, a < 0$ [5]

(δ) $a < 0 < \mu$ [5]

(ε) Όταν υπάρχει οριακός κύκλος συμβολίζουμε με R την ακτίνα του οριακού κύκλου. Σχεδιάστε τη μεταβολή του R με το μ όταν συμβαίνει υποκρίσιμη διακλάδωση Hopf. [5]

2. Θεωρήστε το δυναμικό σύστημα στο επίπεδο

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x(1-x) - \mu y, \quad 2 > \mu \geq 0,$$

(α) Τι θα μπορούσε να περιγράψει το σύστημα αυτό; [5]

(β) Προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας και τη γραμμική ευστάθεια τους. Ποιό από τα σημεία ισορροπίας έχει και ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες; [5]

(γ) Όταν είναι $2 > \mu > 0$, σχεδιάστε τις καμπύλες μηδενικής κλίσης. Σχεδιάστε επίσης προσεγγιστικά τις ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες καθώς και τη μη γραμμική εξέλιξη τους (μην υπολογίσετε τις ιδιοκαταστάσεις). Σχεδιάστε με άλλο χρώμα και μερικές καμπύλες στα χωρία που ορίζουν οι ασταθείς πολλαπλότητες, [10]

(δ) Επαναλάβετε το (γ) στην περίπτωση $\mu = 0$. [10]

¹Οι λέξεις μοιάζουν με τα φύλλα· κι εκεί που αυτές περισσεύουν, σπάνια βρίσκει κανείς από κάτω καρπό με κάποια ουσία.

3. Θεωρήστε το Χαμιλτονιανό σύστημα στο επίπεδο με Χαμιλτονιανή συνάρτηση $H(x, y)$:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Υποθέστε ότι η συνάρτηση $H(x, y)$ έχει παραγώγους κάθε τάξης.

(α) Δείξτε ότι οι τροχιές του συστήματος είναι καμπύλες $H(x, y) = H(x_0, y_0)$ όπου (x_0, y_0) οι αρχικές τιμές των μεταβλητών. [5]

(β) Ένα αρχικά κυκλικό χωρίο στο επίπεδο $x - y$ εξελίσσεται με την παραπάνω δυναμική. Γράψτε την εξίσωση που διέπει την εξέλιξη του εμβαδού του χωρίου και προσδιορίστε το εμβαδόν του χωρίου αν αρχικά ήταν A_0 . [5]

(γ) Εξηγήστε τον λόγο για τον οποίο ένα αρχικά κυκλικό χωρίο δεν μπορεί να εξελιχθεί σε δύο χωριστά χωρία ή να λάβει τη μορφή του σχήματος 8; [10]

(δ) Έστω ότι το (x_e, y_e) είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος. Γράψτε τον πίνακα που διέπει τη γραμμική εξέλιξη των διαταραχών περί το σημείο ισορροπίας (θεωρούμε ότι οι δεύτερης τάξης παράγωγοι της Χαμιλτονιανής δεν μηδενίζονται στο σημείο αυτό) και δείξτε ότι το σημείο αυτό θα είναι κέντρο ή σάγμα. [5]

(ε) Υποθέστε ότι το (x_e, y_e) είναι κέντρο και γύρω από αυτό υπάρχει απειρία περιοδικών τροχιών (δεν χρειάζεται να το αποδείξετε αυτό). Προσδιορίστε τη γραμμική ευστάθεια των τροχιών αυτών, προσδιορίστε δηλαδή τους εκθέτες Lyapunov των διαταραχών στις περιοδικές αυτές τροχιές. Τι συμπεραίνετε για τη μη γραμμική ευστάθεια των τροχιών αυτών; [15]

4. Ένα μοντέλο που περιγράφει κρουστικά κύματα είναι η εξίσωση Burgers με γενική μη γραμμικότητα

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = \nu\rho_{xx}, \quad \nu > 0, \quad (1)$$

Η $c(\rho)$ είναι συνεχής συνάρτηση και η $F(\rho)$ το ολοκλήρωμά της, έτσι ώστε $dF(\rho)/d\rho = c(\rho)$. Η ρ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \rho(x, t) = \rho_L, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x, t) = \rho_R, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \partial\rho/\partial x = 0, \quad \rho_L > \rho_R > 0.$$

(α) Να δειχθεί ότι λύσεις οδευόντων κυμάτων της (1) με ταχύτητα v , της μορφής $\rho = \rho(\xi)$, $\xi = x - vt$, ικανοποιούν το μονοδιάστατο δυναμικό σύστημα:

$$\nu\rho' = F(\rho) - v\rho + C, \quad C = \text{const.} \quad (2)$$

[5].

(β) Από τη (2) να προσδιοριστούν η ταχύτητα v , και η σταθερά C . Για την ταχύτητα v να δειχθεί ότι ικανοποιεί τη συνθήκη άλματος Rankine–Hugoniot. [5]

(γ) Θεωρήστε τώρα ότι $c(\rho) = \rho$. Να δειχθεί ότι η λύση της (2) είναι μονότονη και να προσδιοριστεί το είδος της μονοτονίας (αύξουσα ή φθίνουσα). Γράψτε τη μορφή του κρουστικού κύματος $\rho(x, t)$ στη μορφή ενός ολοκληρώματος. [10]

(δ) Μπορείτε τώρα να δείξετε ότι η λύση είναι μονότονη όταν το $c(\rho)$ είναι οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση; (Υπ. σκεφθείτε τι συμβαίνει γενικά σε μονοδιάστατα δυναμικά συστήματα.) [15]

5. Έστω η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS) για τη μιγαδική συνάρτηση $u(x, t)$

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2u = 0,$$

με συνοριακές συνθήκες $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0$.

(α) Να δειχθεί ότι αν $u(x, t)$ είναι μία λύση της NLS, τότε και η

$$\Phi(x, t) = u(x - vt, t) \exp[i(kx - \omega t)], \quad k = v, \quad \omega = k^2/2, \quad (3)$$

είναι επίσης λύση της NLS. Σημαίνει αυτό ότι η NLS παραμένει αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς Γαλιλαίου; [10]

(β) Έστω στάσιμη λύση της NLS της μορφής $u(x, t) = f(x) \exp(-i\mu t)$ με $f(x)$ πραγματική συνάρτηση και μ πραγματικό. Για ποιες τιμές του μ προκύπτει λύση όπου $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ και η οποία μέσω του μετασχηματισμού (3) μπορεί να παράξει λύσεις σολιτονικού τύπου; [10]

(γ) Σχεδιάστε τη μορφή της $f(x)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες της (β). [10]