



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Πρώτο τεστ Μη Γραμμικής Δυναμικής

• 24/4/2026 •

Σύνολο μορίων 145

1. Για το δυναμικό σύστημα :

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x^3 + x,$$

- (α) προσδιορίστε και σχεδιάστε τις αναλλοίωτες διευθύνσεις της γραμμικής δυναμικής περί το σημείο ισορροπίας $(x_e, y_e) = (0, 0)$. [5]
- (β) προσδιορίστε τη γραμμική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $(x_e, y_e) = (1, 0)$. [5]
- (γ) προσδιορίστε δύο συμμετρίες του δυναμικού συστήματος. [5]
- (δ) σχεδιάστε τη μη γραμμική προέκταση των αναλλοίωτων πολλαπλότητων του σημείου $(x_e, y_e) = (0, 0)$ δικαιολογώντας το σχέδιο σας μέσω των συμμετριών. [5]
- (ε) σχεδιάστε τώρα όλη τη ροή που επάγει το δυναμικό σύστημα. [10]

2. Το δυναμικό σύστημα με την πραγματική παράμετρο μ :

$$\dot{r} = \mu r + r^3 - r^5, \quad r \geq 0,$$

εμφανίζει διακλάδωση στις τιμές $\mu = -1/4$ και $\mu = 0$.

(α) Σχεδιάστε πρόχειρα το \dot{r} συναρτήσει του r όταν είναι $\mu < -1/4$, $\mu = 1/4$, $-1/4 < \mu < 0$ και $\mu > 0$ σημειώνοντας την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας. [5]

(β) Σχεδιάστε το διάγραμμα της διακλάδωσης. [10]

Θεωρήστε τώρα το δυναμικό σύστημα στο επίπεδο εκφρασμένο σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) :

$$\dot{r} = \mu r + r^3 - r^5, \quad \dot{\theta} = 1.$$

(γ) Σχεδιάστε για $\mu < -1/4$, $\mu = 1/4$, $-1/4 < \mu < 0$ και $\mu > 0$ τη ροή στο επίπεδο σημειώνοντας ευκρινώς τις ευσταθείς περιοδικές τροχιές και με διάστικτες γραμμές τις ασταθείς περιοδικές τροχιές. [15]

3. Για το δυναμικό σύστημα του αρμονικού ταλαντωτή:

$$\dot{\psi} = \mathbf{A}_1 \psi, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_1^2 > 1,$$

(α) σχεδιάστε τη ροή στον χώρο των φάσεων [2]

- (β) γράψτε τον διαδότη $e^{A_1 t}$ [5]
- (γ) υπολογίστε την ορίζουσα του $e^{A_1 t}$. Τι σημαίνει φυσικά το αποτέλεσμα αυτό; [3]
- (δ) εάν A_2 είναι ο αντίστοιχος πίνακας αρμονικού ταλαντωτή με συχνότητα $\omega_2 \neq \omega_1$, ποία η φυσική σημασία των μετασχηματισμών $e^{A_2 t} e^{A_1 t}$ και $e^{A_1 t} e^{A_2 t}$; [5]
- (ε) δείξτε ότι οι πίνακες $e^{A_2 t} e^{A_1 t}$, $e^{A_1 t} e^{A_2 t}$ και $e^{(A_1 + A_2)t}$ δεν είναι ίσοι αλλά παρολαυτά δείξτε ότι οι ορίζουσες των τριών αυτών πινάκων είναι ίσες. [5]
4. (α) Ορίστε για ένα κυματικό πεδίο που διαδίδεται στην ευθεία την έννοια του τοπικού κυματάριθμου k και την έννοια της τοπικής συχνότητας ω . [3]
- (β) Γράψτε την εξίσωση συνέχειας που συνδέει τις δύο αυτές ποσότητες, αναφέροντας μονολεκτικά τις υποθέσεις σας για την κατασκευή. [5]
- (γ) Αν ικανοποιείται η εξίσωση διασποράς $\omega(k)$ δείξτε ότι κάθε τοπικός κυματάριθμος k διαδίδεται με την ταχύτητα της ομάδας $v_g(k) = d\omega/dk$. [5]
- (δ) Παρατηρούμε κορυφή κυματισμού με τοπικό κυματάριθμο k . Με τι ταχύτητα κινείται αυτή η κορυφή; [2]
5. Σε ένα μονοδιάστατο κόσμο ο πληθυσμός $\varphi(x, t) \geq 0$ κατανέμεται στην ευθεία x και εξελίσσεται σύμφωνα με τη δυναμική
- $$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi - \varphi^3 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$
- (α) Μονολεκτικά περιγράψτε τι περιγράφει η εξίσωση αυτή. [5]
- (β) Προσδιορίστε την ευστάθεια της κατάστασης ισορροπίας $\varphi_e(x, t) = 0$. [5]
- (γ) Εξηγήστε μονολεκτικά γιατί διαταραχές της κατάστασης ισορροπίας $\varphi_e(x, t) = 0$ μικρού μήκους αποσβένονται. Τι σημαίνει αυτό για την ανάπτυξη πληθυσμού; [15]
6. Η ταχύτητα v των αυτοκινήτων που κινούνται επί μίας ευθείας προσδιορίζεται από την πυκνότητα $0 \leq \rho(x, t) \leq 1$ των αυτοκινήτων σύμφωνα με τον νόμο $v = 1 - \rho$. Όταν είναι $\rho = 0$ ο δρόμος είναι άδειος και η ταχύτητα 1 και όταν είναι $\rho = 1$ το ένα αυτοκίνητο έχει κολλήσει στο επόμενο και η ταχύτητα 0. Θεωρούμε ότι τα αυτοκίνητα σχηματίζουν ένα συνεχές που χαρακτηρίζεται από την πυκνότητα ρ και ο δρόμος δεν έχει ούτε εξόδους ούτε εισόδους έτσι ώστε να μην χάνονται ή προστίθενται αυτοκίνητα.
- (α) Γράψτε τον νόμο διατήρησης που διέπει την εξέλιξη του πεδίου της πυκνότητας $\rho(x, t)$. [5]
- Θεωρήστε ότι η πυκνότητα των αυτοκινήτων αρχικά ήταν
- $$\rho(x, 0) = \begin{cases} 1/4, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$
- (β) Σχεδιάστε σε χωροχρονικό διάγραμμα τις χαρακτηριστικές καμπύλες στις οποίες η πυκνότητα των αυτοκινήτων είναι σταθερή, αγνοώντας ότι μπορεί να υπάρχουν τομές των καμπυλών αυτών. Τι συμβαίνει όταν τέμνονται οι χαρακτηριστικές; [5]

(γ) Προφανώς, επειδή δεν κινούνται τα αυτοκίνητα στην περιοχή $x \geq 0$ δημιουργείται κρουστικό κύμα. Προσδιορίστε την ταχύτητα του κρουστικού κύματος και σχεδιάστε σε χωροχρονικό διάγραμμα τις χαρακτηριστικές με το κρουστικό. Σχεδιάστε επίσης την $\rho(x, 1)$. Γιατί είναι χρήσιμο το αποτέλεσμα αυτό;

[15]