

Ασκήσεις-Παρατηρήσεις Μη Γραμμικής Δυναμικής 2026

Θ. Α., Π. Ι. & Φ. Χ.

16 Μαΐου 2026

1 Για την Πέμπτη 19/2

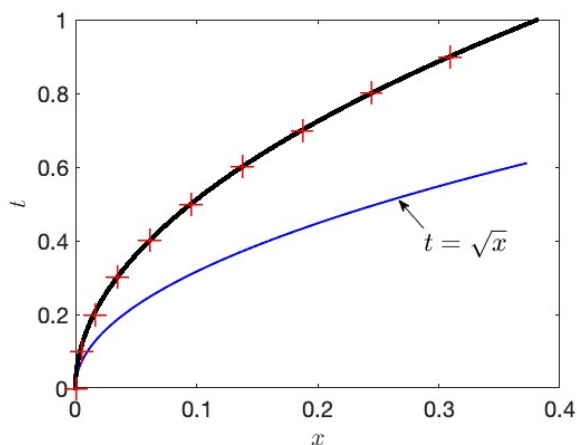
- 2 1. Οι πίνακες 2×2 ορίζουν ένα διανυσματικό χώρο ως προς την πράξη της πρόσθεσης
3 πινάκων και πολλαπλασιασμού πινάκων με τους πραγματικούς αριθμούς. Ποιά η διά-
4 σταση του διανυσματικού αυτού χώρου; Θεωρήστε τώρα τον υποχώρο που σχηματίζεται
5 από τις δυνάμεις ενός πίνακα 2×2 , A , δηλαδή του υποχώρου με στοιχεία τα $I \stackrel{\text{def}}{=} A^0, A,$
6 A^2, \dots . Ποιά είναι η μέγιστη διάσταση που μπορεί να έχει αυτός ο υποχώρος;
- 7 2. Πόσο είναι το $e^{\varepsilon d/dt} x(t)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$;
- 8 3. Σωματίδιο πέφτει κατακόρυφα από κάποιο ύψος στο ομογενές πεδίο βαρύτητας και ανα-
9 κλάται ελαστικά στο δάπεδο. Κατασκευάστε διάγραμμα της θέσης του σωματιδίου συ-
10 ναρτήσει του χρόνου και εξετάστε αν το πρόβλημα αυτό είναι γραμμικό. Προσδιορίστε
11 την εξάρτηση της περιόδου της κίνησης από την ενέργεια του σωματιδίου.
- 12 4. Λύστε αριθμητικά με τη μέθοδο του Euler το συνεχές δυναμικό σύστημα $\dot{x} = x - x^2$ με
13 αρχική τιμή $x(0) = 0.1$ και σχεδιάστε τη λύση $x(t)$ συναρτήσει του χρόνου. Επιλέξτε
14 διάφορα χρονικά βήματα από $\delta = 0.1$ μέχρι και $\delta = 3$. Για ποια βήματα η διακριτή λύση
15 σας έχει ορθή ασυμπτωτική συμπεριφορά; Τι συμπεριφορές παρατηρείτε; Τι βήμα θα
16 επιλέγατε αν θέλατε να επιτύχετε σχετικά πιστή εξέλιξη (η συνεχής λύση είναι $x(t) =$
17 $x_0 / (x_0 + (1 - x_0)e^{-t})$).

18 Για την Παρασκευή 27/2

- 19 5. Εξετάστε με τη μέθοδο Picard την ύπαρξη λύσεων των δυναμικών συστημάτων που ακο-
20 λουθούν και αν υπάρχουν να τις προσδιορίσετε:

21 $(\alpha) \dot{x} = -H(x)$ με $x(0) = 0$, όπου

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$



Σχήμα 1: Άσκηση 5β: Παρότι η Picard δεν συγκλίνει (συγκλίνει σίγουρα η Picard όταν η συνάρτηση είναι Lipschitz, και η δεδομένη δεν είναι στο $x = 0$) υπάρχει λύση, η οποία πρέπει να βρίσκεται μέσα στη σφήνα που σχηματίζει η $t > \sqrt{x}$, $x > 0$, και ο ημιάξονας $x = 0$, $t > 0$. Αυτό είναι αναμενόμενο διότι η συνάρτηση είναι συνεχής και σύμφωνα με τον Peano υπάρχει λύση. Η λύση είναι $x = at^2$, $a = (3 - \sqrt{5})/2$. Τη λύση την προσδιορίζουμε και με αριθμητική ολοκλήρωση την οποία σχεδιάζουμε στο παραπάνω σχήμα. Με μαύρη γραμμή με μέθοδο Euler και βήμα $dt = 0.001$, με σταυρούς η αντίστοιχη λύση με Runge-Kutta 4 και βήμα $dt = 0.1$. Μάλιστα η λύση είναι και μοναδική διότι στην περιοχή της λύσης, $t > \sqrt{x}$, $x > 0$, η $2t - 2\sqrt{x}$ είναι μονοτόνως φθίνουσα συνάρτηση του x .

22 (β) $\dot{x} = 2t - 2\sqrt{\max(0, x)}$, με $x(0) = 0$. **Λύση:** βλ. Σχήμα 1.

23 6. Η εξίσωση Gompertz για την εξέλιξη του πληθυσμού των καρκινικών κυττάρων με $x \geq 0$
 24 είναι: $\dot{x} = v(x)$ με πεδίο ταχυτήτων:

$$v(x) = \begin{cases} -x \log(x) & , \quad x > 0, \\ 0 & , \quad x = 0. \end{cases} \quad (1)$$

25 (α) Σε τι διαφέρει η εξέλιξη με την Gompertz από την εξέλιξη με τη λογιστική. Ποιές
 26 διαφορετικές παρατηρήσεις θα δικαιολογούσαν τέτοια μοντελοποίηση;

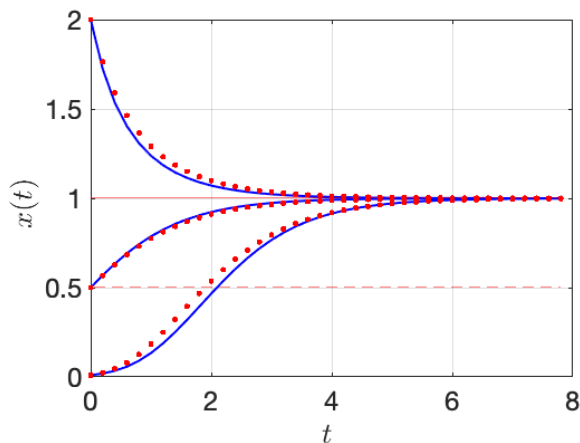
27 (β) Προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας και την ευστάθειά τους.

28 (γ) Η $v(x)$ που δίνεται από την (1) της Gompertz είναι Lipschitz στο $x = 0$, δηλαδή
 29 ικανοποιεί την ανισότητα $|v(x)| < K|x|$, όπου K μία σταθερά στην περιοχή του $x = 0$;

30 (δ) Είναι η λύση μοναδική για $x(0) = 0$; Εάν ναι εξηγήστε τον λόγο. Τι συμπεραίνετε
 31 για την αναγκαιότητα της συνθήκης Lipschitz για την ύπαρξη μοναδικών λύσεων;

32 (ε) Προσδιορίστε την αναλυτική λύση όταν $x(0) = x_0$, με $x_0 > 0$ και προσδιορίστε
 33 την ασυμπτωτική τιμή του x .

34 (στ) Υπολογίστε αριθμητικά με τη μέθοδο Euler την εξέλιξη των πληθυσμών που
 35 συνεπάγεται η Gompertz για τις αρχικές τιμές $x(0) = 0.01$, $x(0) = 0.5$, $x(0) = 2$. Επιλέξτε
 36 κατάλληλο χρονικό βήμα ώστε να είναι σχετικά ακριβής η εξέλιξη που θα πετύχετε αριθ-



Σχήμα 2: Οι συνεχείς μπλε γραμμές η λύση της Gompertz με την Euler με βήμα $\delta = 0.2$. Η αναλυτική λύση με κόκκινες τελείες. Η προσέγγιση στην αναλυτική λύση είναι ικανοποιητική και με αυτό το βήμα.

37 μητικά. Σχεδιάστε την εξέλιξη του πληθυσμού με τον χρόνο. Σχεδιάστε τις αναλυτικές
 38 λύσεις στο ίδιο διάγραμμα για να διαπιστώσετε οπτικά την ακρίβεια της αριθμητικής
 39 λύσης σας.

40 (ζ) Για ποιά χρονικό βήμα δ της διακριτοποίησης του συνεχούς δυναμικού συστήμα-
 41 τος με τη μέθοδο του Euler η συμπεριφορά του διακριτού δυναμικού συστήματος είναι
 42 ασταθής; Μπορείτε να προσδιορίσετε ακριβώς την τιμή του δ που επιφέρει αυτήν την
 43 αστάθεια;

44 Λύση

45 (β) Τα σημεία ισορροπίας είναι $x_e = 0$ που είναι ασταθές και το $x_e = 1$ που είναι ευσταθές.

46 (γ) Η $-x \log(x)$ δεν είναι Lipschitz στο $x = 0$ διότι αν ήταν θα υπήρχε $K > 0$ ώστε:

$$|x \log x| \leq K|x|, \quad (2)$$

47 που θα απαιτούσε: $|\log x| < K$, που είναι άτοπο διότι η $\log x$ δεν είναι φραγμένη στο
 48 $x = 0$.

49 (δ) Η λύση είναι μοναδική, παρότι η $-x \log(x)$ δεν είναι Lipschitz στο $x = 0$, διότι απαι-
 50 τείται άπειρος χρόνος για να φτάσει στο $x(0) = 0$:

$$T_{x \rightarrow \varepsilon} = \int_x^\varepsilon -\frac{dx}{x \log x} = \int_\varepsilon^x \frac{d(\log x)}{\log x} = \log(\log x / \log \varepsilon) \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3)$$

51 Το σημείο ισορροπίας $x_e = 0$ είναι απομονωμένο. Συνεπώς η συνθήκη Lipschitz είναι
 52 ικανή συνθήκη για την ύπαρξη μοναδικής λύσης, αλλά δεν είναι αναγκαία. Ικανή και
 53 αναγκαία συνθήκη μοναδικότητας των λύσεων είναι ο χρόνος μετάβασης στα σημεία
 54 ισορροπίας να είναι άπειρος (υποθέτουμε επίσης για την ύπαρξη τη συνέχεια του πε-

55 δίου ταχυτήτων που και αυτό δεν είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη
56 λύσεων).

57 (ε) $x(t) = (x(0))e^{-t}$. Η σύγκριση της αναλυτικής λύσης με την αριθμητική στο Σχ. 1 επι-
58 βεβαιώνει ότι δεν έχει γίνει λάθος και στη μία και στην άλλη.

59 (στ,ζ) Η διακριτοποίηση οδηγεί στην αναδρομική σχέση $x_{n+1} = x_n(1 - \delta \log(x_n)) = f(x_n)$,
60 που έχει και αυτή ως σταθερά σημεία τα $x_e = 1$ και $x_e = 0$. Η ευστάθεια του κάθε x_e
61 κρίνεται από το αν είναι $|f'(x_e)| < 1$ όπου $f'(x) = 1 - \delta - \delta \log(x)$. Είναι $f'(1) = 1 - \delta$.
62 Συνεπώς αν $\delta < 2$ και $\log(x_0) < 1/\delta$ ο ελκυστής του συνεχούς δυναμικού συστήματος
63 και της διακριτοποιημένης προσέγγισης είναι ο ίδιος.

64 7. Κατασκευάστε το διάγραμμα διακλάδωσης ως προς την παράμετρο a των δυναμικών
65 συστημάτων στην ευθεία και χαρακτηρίστε το είδος της διακλάδωσης

66 $(\alpha) \dot{x} = a - 3x^2$

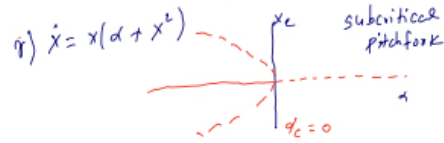
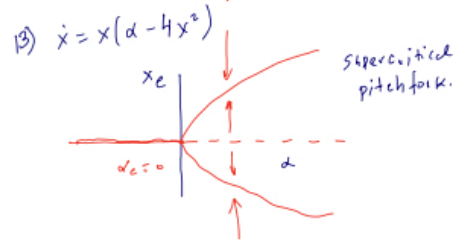
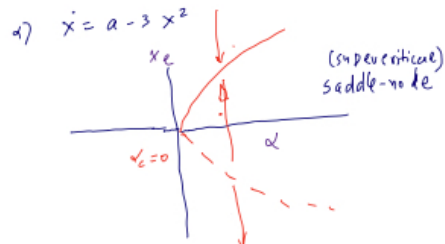
67 $(\beta) \dot{x} = ax - 4x^3$

68 $(\gamma) \dot{x} = ax + x^3$

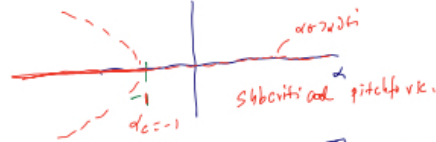
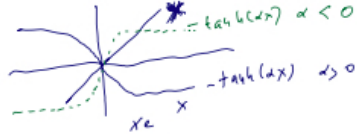
69 $(\delta) \dot{x} = x + \tanh(ax)$

70 $(\epsilon) \dot{x} = 5 - ax^2$

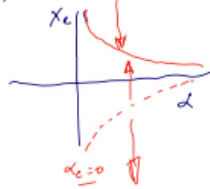
71 $(\sigma\tau) \dot{x} = ax - x/(1+x)$



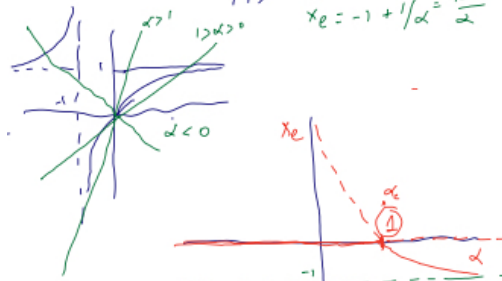
d) $\dot{x} = x + \tanh(ax) \approx x(1+a)$ $x \rightarrow 0$

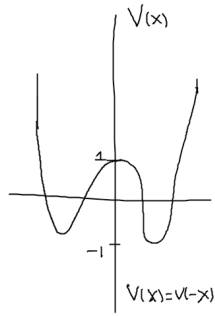


e) $\dot{x} = 5 - ax^2$ $x = \pm \sqrt{5/a}$ $a \geq 0$



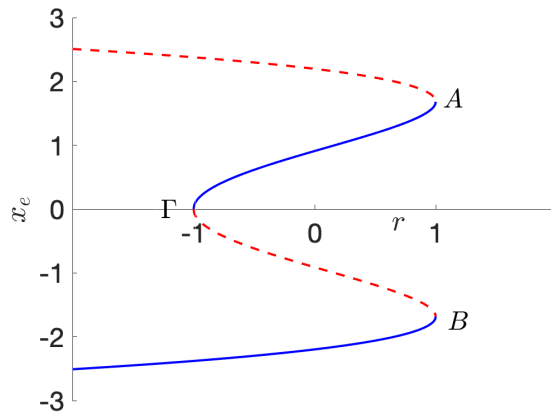
f) $\dot{x} = ax - \frac{x}{1+x}$ $x < -1$ $\dot{x} = (a-1)x$
 $x_e = 0$
 $x_e = -1 + 1/a = \frac{1-a}{a}$





- 72 8. Σχεδιάστε το διάγραμμα διακλάδωσης $x_e(a)$ (x_e τα σημεία ισορροπίας όταν η παράμε-
- 73 τρος έχει την τιμή a) που αναμένεται να εμφανίσει το δυναμικό σύστημα: $\dot{x} = v(x) + a$
- 74 ($x \in \mathbb{R}$), με το συμμετρικό πεδίο ταχυτήτων $v(x)$ του σχήματος. Σημειώστε με διάστικτη
- 75 γραμμή τα ασταθή σημεία ισορροπίας και με συνεχή γραμμή τα ευσταθή και αναφέ-
- 76 ρατε το είδος των διακλαδώσεων που εμφανίζονται.

77



Σχήμα 3: Με μπλε συνεχή γραμμή σημειώνονται τα ευσταθή σημεία ισορροπίας, με κόκκινη διάστικτη γραμμή σημειώνονται τα ασταθή σημεία ισορροπίας. Οι διακλαδώσεις στα A και B στο $r = 1$ είναι υποκρίσιμες saddle-node, στο Γ στο $r = -1$ είναι υπερκρίσιμη saddle-node.

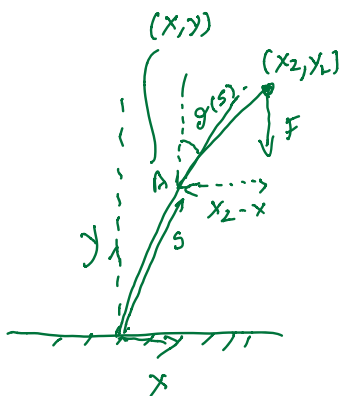
78 Για την Παρασκευή 6/3

- 79 9. Ο Euler υπολόγισε το κρίσιμο φορτίο που θα λυγίσει μια ελαστική ράβδο. Έδειξε ότι
- 80 εξίσωση που διέπει το χρονοανεξάρτητο σχήμα της ράβδου σε στατική ισορροπία είναι
- 81 η

$$D\ddot{\theta} + F \sin \theta = 0 \quad , \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(L) = 0 \quad . \quad (4)$$

82 Η τελεία συμβολίζει παραγωγή ως προς το μήκος τόξου (βλ. Σχ. 4) επί της ράβδου, π.χ.

83 $\dot{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} d\theta/ds$. Το s είναι το μήκος τόξου της ράβδου από το κατώτερο σημείο της, όπου $s = 0$,



Σχήμα 4: Η ράβδος του Euler

84 ενώ η ράβδος θεωρείται ότι έχει αναλλοίωτο σταθερό μήκος L , δηλαδή η ράβδος δεν συρ-
 85 ρυκνώνεται υπό το βάρος που έχει εναποτεθεί σε αυτήν, και συνεπώς η παραπάνω εξί-
 86 σωση ορίζεται στο διάστημα $s \in [0, L]$. Η $D > 0$ είναι η ελαστική σταθερά της ράβδου.
 87 Η γωνία θ είναι η γωνία που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της καμπύλης της ρά-
 88 βδου με την κατακόρυφο. Αυτή η εξίσωση διέπει το σχήμα ισορροπίας της ράβδου όταν
 89 ασκείται δύναμη F στο άνω άκρο της. Εμείς θα θεωρήσουμε ότι $F > 0$, που αντιστοιχεί σε
 90 πιεστική δύναμη. Η συνοριακή συνθήκη στο κατώτερο άκρο, $\theta(0) = 0$, προκύπτει επειδή
 91 θεωρούμε ότι η ράβδος στο κάτω άκρο στηρίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να παραμένει
 92 κατακόρυφη, ενώ $\dot{\theta}(L) = 0$, επειδή το ανώτερο άκρο είναι μεν ελεύθερο να μετακινηθεί
 93 αλλά δεν μπορεί να καμπυλωθεί διότι δεν υπάρχει τάση από ελαστικό υλικό που μπορεί
 94 να καμπυλώσει το άκρο αυτό.

95 (α) Θεωρήστε ότι η ράβδος έχει λυγίσει ελάχιστα και το σχήμα ισορροπίας της ρά-
 96 βδου ικανοποιεί τη γραμμική εξίσωση:

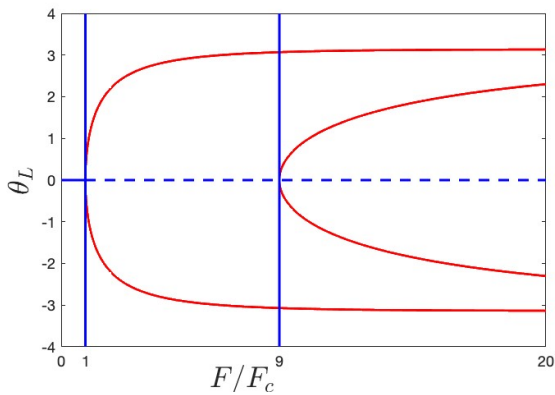
$$D\ddot{\theta} + F\theta = 0 \quad , \quad (5)$$

97 με $\dot{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} d\theta/ds$ και συνοριακές συνθήκες:

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(L) = 0 \quad . \quad (6)$$

98 Η εξίσωση αυτή ισχύει για μικρές παραμορφώσεις από την κατακόρυφο.

99 Προσδιορίστε για κάθε τιμή της F την $\theta(s)$. Αν χρησιμοποιήσουμε την $\theta_L \stackrel{\text{def}}{=} \theta(L)$ ως ενδει-
 100 κτική συντεταγμένη που ορίζει την κατάσταση ισορροπίας της ράβδου, για ποιές τιμές
 101 του F αναμένετε διακλάδωση; Σε διάγραμμα (F, θ_L) σχεδιάστε το διάγραμμα διακλάδω-
 102 σης της γραμμικής εξίσωσης (5). Ποία είναι η πρώτη κρίσιμη τιμή της δύναμης F_c που
 103 οδηγεί στο λυγισμό της ράβδου; Σχεδιάστε το σχήμα της ράβδου στις διάφορες διακλα-



Σχήμα 5: Οι δύο πρώτοι κλάδοι της υπερκρίσιμης δικρανικής (pitchfork) διακλάδωσης της δοκού του Euler που οδηγεί σε σπάσιμο συμμετρίας.

104 δώσεις.

105 Λύση:

106 Η (5) με συνοριακές συνθήκες (6) επιδέχεται μόνο τη λύση $\theta = 0$ εκτός αν είναι $\sqrt{F/D} =$
 107 $n\pi/(2L)$ για $n = 1, 3, 5, \dots$, δηλαδή όταν η δύναμη που ασκείται έχει την τιμή:

$$F = \frac{n^2 \pi^2 D}{4L^2}, n = 1, 3, 5, \dots$$

108 Αυτό σημαίνει ότι αυξάνοντας τη δύναμη που ασκούμε επί της ράβδου, δεν θα καμφθεί
 109 η ράβδος (δεν θα αλλάξει η κατάσταση ισορροπίας από το $\theta = 0$), μέχρι η δύναμη γί-
 110 νει η δύναμη λυγισμού που πρόβλεψε ο Euler: $F_c = \pi^2 D / (4L^2)$. Σε αυτή την περίπτωση
 111 η γραμμική θεωρία προβλέπει άπειρες καταστάσεις ισορροπίας της ράβδου, δεδομένου
 112 ότι η $\theta_e(s) = a \sin(\pi s / (2L))$ για κάθε θετικό πλάτος a ικανοποιεί την εξίσωση ισορροπίας.
 113 Αυτός ο εκφυλισμός αίρεται με την εισαγωγή των μη γραμμικών όρων. Το ίδιο συμβαί-
 114 νει και στις επόμενες κρίσιμες τιμές όπου η κατάσταση ισορροπίας που προβλέπεται
 115 για την n -οστή κατάσταση είναι η $\theta_e(s) = a \sin(n\pi s / (2L))$, $n = 1, 3, 5, \dots$ για κάθε θετικό
 116 a . Σύμφωνα με τη γραμμική θεώρηση στις ενδιάμεσες τιμές τυπικά η κατάσταση ισορ-
 117 ροπίας είναι και πάλι $\theta = 0$. Το διάγραμμα διακλάδωσης των καταστάσεων ισορροπίας
 118 σύμφωνα με τη γραμμική θεωρία έχει σχεδιασθεί στο Σχ. 5 με μπλε. Η μη γραμμική διόρ-
 119 θωση είναι σχεδιασμένη με κόκκινο. Προσέξτε ότι στο πλαίσιο αυτής της ανάλυσης δεν
 120 μπορούμε να αποφανθούμε για την ευστάθεια ή αστάθεια των καταστάσεων διότι δεν
 121 έχουμε τις εξισώσεις που διέπουν τη χρονική εξέλιξη της δοκού που θα μας επέτρεπαν
 122 μελέτη της ευστάθειας ή αστάθειας. Οπότε τυπικά δεν μπορούμε να χαρακτηρίσουμε
 123 ως ασταθή τις καταστάσεις $\theta = 0$ για $F > F_c$. Για το ότι είναι ασταθείς οι καταστάσεις

124 αυτές μπορούμε να το υποστηρίξουμε έμμεσα συγκρίνοντας τη δυναμική ενέργεια

$$V[\theta] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^L \frac{1}{2} D\dot{\theta}^2 ds + Fy_L = \int_0^L \left(\frac{1}{2} D\dot{\theta}^2 + F \cos\theta \right) ds ,$$

125 στην κατάσταση $\theta = 0$ για $F > F_c$ και δείχνοντας ότι είναι μεγαλύτερη από την κατά-
126 σταση που προβλέπεται από την μη γραμμική θεώρηση. Για $F > 9F_c$ προβλέπονται δύο
127 καταστάσεις κάμψης (μπορείτε να τις βρείτε;), αυτή που θα υπερισχύσει είναι αυτή με
128 τη χαμηλότερη ενέργεια (ποια είναι;).

129 Η άσκηση αυτή θα συνεχισθεί την επόμενη βδομάδα.

130 10. Δείξτε ότι η λύση της $\dot{x} = ax + f(t)$ με $x(0) = x_0$ είναι η

$$x = e^{at} x_0 + \int_0^t ds e^{a(t-s)} f(s) .$$

131 Όταν είναι $f(t) = \cos(t)$ και $a = 1$ τι αναμένεται να συμβεί αν αρχικά είναι $x(0) = x_0$;
132 Τώρα προσδιορίστε την απεικόνιση Poincaré μίας περιόδου. Προσδιορίστε τα σταθερά
133 σημεία της απεικόνισης, καθώς και την ευστάθειά τους. Ποιό είναι το φυσικό νόημα των
134 σταθερών σημείων; Σχεδιάστε τη τροχιά για μία περίοδο που αντιστοιχεί στο σταθερό
135 σημείο καθώς και μερικές άλλες τροχιές γύρω από αυτήν.

136 Η αναδρομική σχέση για την εξέλιξη του συστήματος από περίοδο σε περίοδο είναι

$$x_{n+1} = e^{2\pi a} x_n + \frac{a}{1+a^2} (e^{2\pi a} - 1) .$$

137 και περιοδική τροχιά προκύπτει όταν είναι

$$x_e = -\frac{a}{1+a^2} ,$$

138 η οποία είναι εμφανώς ασταθής εφόσον $a > 0$. Δεν υπάρχουν περιοδικές τροχιές περιό-
139 δου 2,3,....

140 11. α) Θεωρήστε το μη αυτόνομο μονοδιάστατο δυναμικό σύστημα $\dot{x} = v(x,t)$ επί της ευ-
141 θείας, με $v(x,t)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς τα ορίσματά της και την $v(x,t)$ πε-
142 ριοδική συνάρτηση ως προς t με περίοδο 1. Αν υπάρχουν ξ και η με $\xi > \eta$ ώστε $\forall t$ να
143 είναι $v(\xi,t) < 0$ και $v(\eta,t) > 0$, δείξτε ότι το δυναμικό σύστημα εκτελεί περιοδική κίνηση
144 για κάποια αρχική κατάσταση x_0 , $\eta < x_0 < \xi$.
145 (β) Υπάρχουν περιοδικές τροχιές στο δυναμικό σύστημα $\dot{x} = x^2 - 1 - \cos(2\pi t)$; Αν υπάρ-
146 χουν εντοπίστε τες κατασκευάζοντας αριθμητικά την αντιστοιχούσα απεικόνιση Poincaré
147 και προσδιορίστε την ευστάθειά τους.

148 Αν $P(x)$ η εξέλιξη του x κατα μία περίοδο, τότε θα είναι $P(\xi) < \xi$ και $P(\eta) > \eta$. Η συνάρ-

149 τηση $f(x) = x - P(x)$ είναι συνεχής και αλλάζει πρόσημο στο $[\eta, \xi]$. Συνεπώς υπάρχει
 150 τουλάχιστον μία ρίζα της $f(x) = x - P(x)$ στο $[\eta, \xi]$, η x_0 , που αντιστοιχεί σε περιοδική
 151 τροχιά.

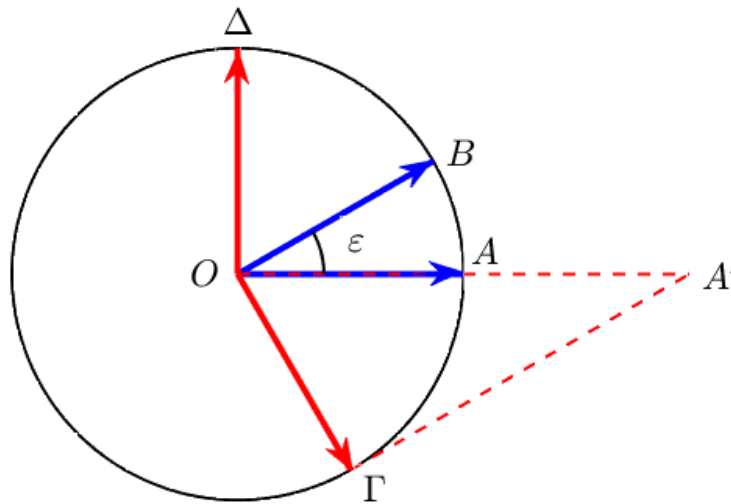
152 12. Τα δύο μη ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} \cos \epsilon \\ \sin \epsilon \end{pmatrix}$$

153 με $\epsilon \neq \pm\pi/2, \pm\pi$ σχηματίζουν μία πλήρη βάση του πραγματικού χώρου των δύο διαστά-
 154 σεων και κάθε διάνυσμα $|\psi\rangle$ του χώρου μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των
 155 δύο αυτών διανυσμάτων βάσης, δηλαδή είναι

$$|\psi\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |2\rangle.$$

156 Κατασκευάστε γεωμετρικά το μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου που διεγείρει τα μέγι-
 157 στα το $|1\rangle$ (δηλαδή το μοναδιαίο διάνυσμα που μεγιστοποιεί το α .) Πόσο είναι το πλάτος
 158 της διέγερσης όταν είναι $\epsilon \ll 1$. Τι συμβαίνει όταν είναι $\epsilon = \pi/2$.

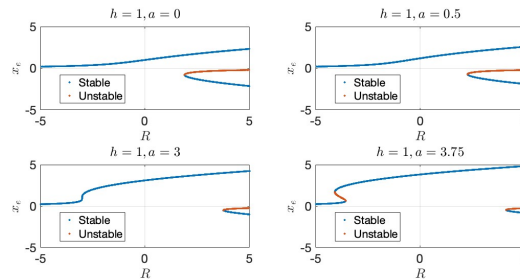


Σχήμα 6: Άσκηση 12. Η μέγιστη διέγερση του διανύσματος $\vec{OA} \stackrel{\text{def}}{=} |1\rangle$ επιτυγχάνεται από το διάνυσμα \vec{OG} , το οποίο είναι το διάνυσμα που είναι $\perp \vec{OB} \stackrel{\text{def}}{=} |2\rangle$, και αναλύεται στη βάση $|1\rangle, |2\rangle$ ως $\vec{OG} = (1/\sin \epsilon) |1\rangle + \cot \epsilon |2\rangle$. Δηλαδή η μέγιστη διέγερση του $|1\rangle$ που μπορεί να πετύχει ένα μοναδιαίο διάνυσμα είναι $1/\sin \epsilon$. Τα $\vec{OG}/\sin \epsilon$ και $\vec{OD}/\sin \epsilon$ είναι η διορθωγώνια βάση των $|1\rangle, |2\rangle$, και αντιστοιχούν (είναι ερμιτιανά αναστρόφα δηλαδή) των $\langle 1|, \langle 2|$ αντίστοιχα, με την ιδιότητα δηλαδή $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$, όπου $i, j = 1, 2$.

159 13. (α) Λύστε με Runge-Kutta 4 τον αρμονικό ταλαντωτή $\ddot{x} + x = 0$ με $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$

160 και διάφορα βήματα δ για μία περίοδο, $T_f = 2\pi$, και δείξτε ότι το σφάλμα $|x(T_f) -$
 161 $\cos(T_f)| = O(\delta^4)$. Συγκρίνατε το σφάλμα που προκύπτει αν κάνετε ολοκλήρωση με μέ-
 162θοδο Euler και Feynman.

163 (β) Λύστε με Runge-Kutta 4 τον μη γραμμικό ταλαντωτή $\ddot{x} + x + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0$ με
 164 $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$ και $\varepsilon = 0.1$ και σχεδιάστε την τροχιά στο επίπεδο (x, \dot{x}) με βήμα κατάλ-
 165 ληλο ώστε η λύση να είναι ακριβής (δεδομένου ότι εδώ δεν έχετε αναλυτική λύση, αυτό
 166 κρίνεται με το αν η λύση δεν μεταβληθεί όταν το χρονικό βήμα γίνει μισό). Το ερώτημα
 167 είναι που θα καταλήξει η τροχιά (ποιος είναι ο ελκυστής). Μπορείτε με απλά φυσικά
 168 επιχειρήματα να είχατε προβλέψει την τροχιά στην οποία καταλήγει ο ταλαντωτής;



Σχήμα 7: Άσκηση 15. Το σχέδιο διακλάδωσης για διαφορετικές τιμές του $a > 0$, για τιμές μικρότερες της κρίσιμης τιμής $a_c = 3h^{1/3}$, και μεγαλύτερες. Η διακλάδωση για $R > 0$ εμφανίζεται στο a_c επειδή στο γράφημα των σημείων ισορροπίας $R(x_e) = x_e^2 - ax_e - h/x_e$ θα πρέπει η $dR/dx_e = 0$ να έχει διπλή ρίζα όταν είναι $a = a_c$. Επειδή $dR/dx_e = (2x_e^3 - ax_e^2 + h)/x_e^2$ αυτό σημαίνει ότι η $2x_e^3 - ax_e^2 + h$ πρέπει να έχει διπλή ρίζα η οποία θα πρέπει να βρίσκεται στο σημείο καμπής της $2x_e^3 - ax_e^2 + h$, που είναι στο $x_c = a/3$ και έτσι αν είναι $2(x_c - a/3)^2(x_c - b) = 2x_c^3 - ax_c^2 + h$ θα πρέπει να είναι $h = a^3/27$.

169 Για την Παρασκευή 13/3

170 15. Σχεδιάστε το διάγραμμα διακλάδωσης ως προς την παράμετρο R του δυναμικού συστή-
 171ματος $\dot{x} = h + Rx + ax^2 - x^3$ με x στην ευθεία στις περιπτώσεις:

172 (α) $a = 0, h > 0$.

173 (β) $h > 0, a > 3h^{1/3}$.

174 16. (Συνέχεια της Άσκησης 9) Η εξίσωση ισορροπίας του σχήματος της ράβδου (4) προκύ-
 175πτει από την απαίτηση να είναι ελάχιστο το συναρτησοειδές της συνολικής δυναμικής
 176(ελαστικής και εξωτερικής δύναμης) ενέργειας

$$V[\theta] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^L \frac{1}{2} D\theta^2 ds + Fy_L = \int_0^L \left(\frac{1}{2} D\theta^2 + F \cos \theta \right) ds, \quad (7)$$

177 δεδομένου ότι, αν θ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στη ράβδο με την κατακό-
 178ρυφο y διεύθυνση (βλ. σχήμα 4), οι συντεταγμένες (x, y) της ράβδου προκύπτουν από
 179τις εξισώσεις:

$$\dot{x} = \sin \theta, \quad \dot{y} = \cos \theta, \quad (8)$$

180 και $y_L = \int_0^L \cos \theta ds$. Θυμίζουμε ότι x είναι η οριζόντια διεύθυνση, με $(x, y) = (0, 0)$ το
 181 κάτω πακτωμένο άκρο της ράβδου. Ο πρώτος όρος στην (7) δίνει την ελαστική ενέργεια η
 182 οποία είναι ανάλογη του τετραγώνου της καμπυλότητας της ράβδου (ο όρος $\dot{\theta}$ είναι ίσος
 183 με την καμπυλότητα της ράβδου) και ο δεύτερος είναι το έργο της ασκούμενης δύναμης.

184 (α) Δείξτε από πρώτες αρχές, ορίζοντας προσεκτικά το είδος των μεταβολών, ότι στασι-
 185 μοποίηση της (7) οδηγεί στην (4). Ποία η διαφορά με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε
 186 για την κατασκευή των εξισώσεων Euler-Lagrange μέσω της αρχής του Χάμιλτον στη
 187 Μηχανική;

188 Η διαφορά από την αρχή του Χάμιλτον είναι ότι αρκεί η στασιμοποίηση να γίνει ως προς
 189 μεταβολές, $\delta\theta$, που ικανοποιούν μόνο $\delta\theta(0) = 0$, δεν απαιτείται περιορισμός στη τιμή των
 190 διαταραχών στο ελεύθερο άκρο.

191 (β) Υπολογισμός της διακλάδωσης λυγισμού της ράβδου του Euler στη μη γραμμική θεώρηση.
 192 Η εξίσωση του σχήματος της ράβδου (4) είναι ίδια με αυτήν του επίπεδου εκκρεμούς και
 193 οι λύσεις διατηρούν την “ενέργεια”:

$$\frac{1}{2}D\dot{\theta}^2 - F \cos \theta = -F \cos \theta_L, \quad (9)$$

194 όπου $\theta_L = \theta(L)$. [Προσέξτε ότι το συναρτησοειδές της συνολικής δυναμικής ενέργειας (4)
 195 που ελαχιστοποιούμε προκειμένου να βρούμε το σχήμα της ράβδου, που διέπεται τελικά
 196 από την (3) δεν είναι η διατηρούμενη ποσότητα. Η $V(\theta)$ είναι το αντίστοιχο της δράσης με
 197 αλλαγμένο το πρόσημο της κλασικής δυναμικής ενέργειας από αυτήν που υπεισέρχεται
 198 στη διατηρούμενη ενέργεια.] Από τη διατήρηση αυτή, όπως υπολογίζουμε στο εκκρεμές
 199 την περίοδο συναρτήσει του πλάτους της ταλάντωσης, υπολογίζουμε εδώ το σχήμα της
 200 ράβδου προσδιορίζοντας το μήκος τόξου της ράβδου $s(\theta)$ και τις συντεταγμένες (x, y)
 201 της ράβδου, Από την (9) προκύπτει ότι

$$L = \sqrt{\frac{D}{2F}} \int_0^{\theta_L} \frac{d\theta}{\sqrt{-\cos \theta_L + \cos \theta}}. \quad (10)$$

202 Κάνοντας την κλασική αντικατάσταση $\sin(\theta/2) = \sin(\theta_L/2) \sin \phi$ έχουμε

$$L = \sqrt{\frac{D}{F}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_L/2) \sin^2 \phi}}, \quad (11)$$

203 και για μικρά θ_L δείξτε ότι είναι:

$$L = \sqrt{\frac{D}{F}} \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2(\theta_L/2) + \frac{9}{64} \sin^4(\theta_L/2) + \dots \right), \quad (12)$$

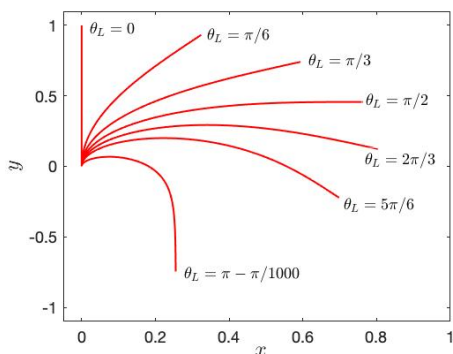
204 και μέσω αυτής αποδείξτε ότι για μικρά θ_L ότι:

$$F = F_c \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2(\theta_L/2) + \frac{11}{32} \sin^4(\theta_L/2) + \dots \right), \quad (13)$$

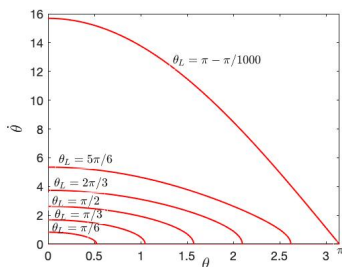
205 όπου F_c η κρίσιμη τιμή της δύναμης που υπολογίσατε από τη γραμμική προσέγγιση.
 206 Εξ' αυτού αποδείξτε ότι η διακλάδωση στο κρίσιμο σημείο λυγισμού είναι υπερκρίσιμη
 207 δικρανική διακλάδωση (supercritical pitchfork bifurcation) και σχεδιάστε τους δύο πρώ-
 208 τους κλάδους που εμφανίζονται στα F_c και $9F_c$

209

210 (γ) (προαιρετικό) Σχεδιάστε το σχήμα τις δοκού σε διαδοχικές τιμές ενέργειας μετά την
 211 πρώτη διακλάδωση. Με ενεργειακά επιχειρήματα προσδιορίστε την ευστάθεια των λύ-
 212 σεων.



Σχήμα 8: Διαδοχικές θέσεις ισορροπίας της δοκού όταν η δοκός συμπιέζεται με αυξανόμενη δύναμη F που αντιστοιχεί στο αντίστοιχο θ_L του πρώτου κλάδου της διακλάδωσης στο F_c (βλ. Σχ. (5)). Η δύναμη που απαιτείται για να επιτευχθεί $\theta_L = \pi$ απειρίζεται.

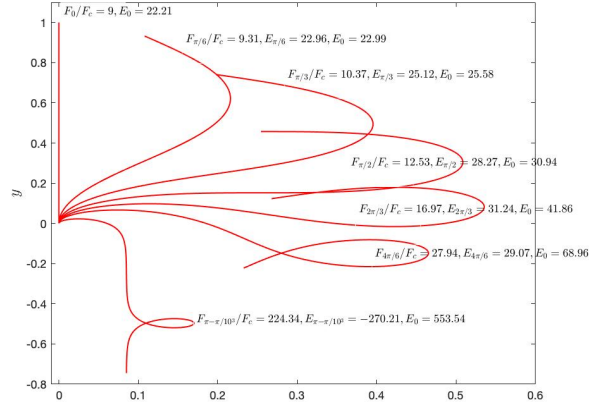


Σχήμα 9: Οι αντιστοιχούσες του Σχ. (8) τροχιές στο επίπεδο $\theta, \dot{\theta}$ (η $\dot{\theta} = \kappa$ είναι η καμπυλότητα της δοκού).

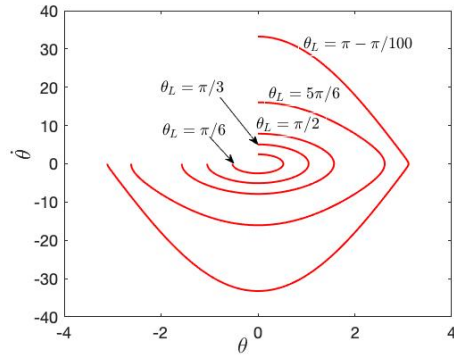
213 Το σχήμα της δοκού μετά το πρώτο σπάσιμο συμμετρίας έχει σχεδιασθεί στα Σχ. (8) και
 214 (9).

215 Σημείωση: Η ενέργεια (7) στην κατάσταση ισορροπίας είναι κάνοντας χρήση την (10)

$$V_{eq} = 2F \int_0^{\theta_L} \cos \theta \frac{ds}{d\theta} d\theta - FL \cos \theta_L$$



Σχήμα 10: Διαδοχικές θέσεις ισορροπίας της δοκού όταν η δοκός συμπιέζεται με αυξανόμενη δύναμη F που αντιστοιχεί στο αντίστοιχο θ_L του δεύτερου κλάδου της διακλάδωσης στο $9F_c$ (βλ. Σχ. (5)). Η δύναμη που απαιτείται για να επιτευχθεί $\theta_L = \pi$ απειρίζεται.



Σχήμα 11: Οι αντιστοιχούσες του Σχ. (10) τροχιές στο επίπεδο $\theta, \dot{\theta}$ (η $\dot{\theta} = \kappa$ είναι η καμπυλότητα της δοκού).

$$= -FL \cos \theta_L + 2\sqrt{DF} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - 2 \sin^2(\theta_L/2) \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_L/2) \sin^2 \phi}} d\phi$$

216 17. Θεωρήστε τη χρονική εξέλιξη ενός κυματοπακέτου γκαουσιανής διαμόρφωσης, πλά-
 217 τους a , με φέρον κύμα κυματαριθμού k_c σε μέσο με σχέση διασποράς $\omega = \sqrt{k}$ (κύματα
 218 σε έναν άπειρου βάθους ωκεανό). Δεδομένου του a και του k_c για πόσο χρόνο το κυματο-
 219 πακέτο εξελίσσεται αυτούσιο με την ταχύτητα της ομάδας του φέροντος κύματος. Επι-
 220 βεβαιώστε τη θεωρητική σας πρόβλεψη κάνοντας προσομοιώσεις με τον κώδικα (ή πα-
 221 ρόμοιο) που αναπτύξαμε στην τάξη. Τι συμβαίνει στο πακέτο μετά την πάροδο μεγάλου
 222 χρόνου;

223 Επειδή για γκαουσιανή διαμόρφωση το πλάτος των κυματαριθμών έχει εύρος $k - k_c \approx$
 224 $1/a$ αναμένεται το κυματοπακέτο να εξελίσσεται συγκροτημένο μέχρι χρόνους $t\omega''(k_c)(k -$
 225 $k_c)^2/2 \approx t\omega''(k_c)/2(a^2) \approx O(1)$ δηλαδή μέχρι χρόνους $t = O(2a^2/\omega''(k_c))$. Επομένως θέ-

226 λουμε μεγάλα a και αν βεβαίως μπορούμε να επιλέξουμε k_c τέτοιο ώστε $\omega''(k_c) = 0$ θα
227 μεγιστοποιήσουμε τον χρόνο αυτόν.

228 Για την Παρασκευή 20/3

229 18. Strogatz (1994): Τις τρεις ασκήσεις on Love Affairs: 5.3.2, 5.3.3 και 5.3.4, p. 144.

230 19. Προσδιορίστε τις ιδιοτιμές και ιδιοκαταστάσεις των ακόλουθων πινάκων

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & R \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

231 και υπολογίστε τους διαδότες $e^{\mathbf{A}t}$, $e^{\mathbf{B}t}$ και $e^{\mathbf{C}t}$.

232 20. Θεωρήστε το δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} = \mathbf{A}x, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.1 & R \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

233 με x διδιάστατο πραγματικό διάνυσμα που περιγράφει τη διαταραχή από κατάσταση
234 ισορροπίας και αντίστοιχο σύστημα

$$\dot{x} = \mathbf{S}x, \quad (15)$$

235 όπου \mathbf{S} ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών του \mathbf{A} . Η ενέργεια των διαταραχών ορίζεται
236 σε κάθε περίπτωση ως $E = x^\dagger x$ (\dagger είναι ο ερμιτιανός ανάστροφος). Με χρήση Matlab
237 (όπου χρειάζεται)

238 (α) Προσδιορίστε τις ιδιοτιμές και ιδιοκαταστάσεις του \mathbf{A} για $R = 10$ (εντολή $[U,S]=\text{eig}(A)$).

239 (β) Πάλι για $R = 10$ σχεδιάστε για 40 μονάδες του χρόνου την εξέλιξη της ενέργειας
240 του (14) αν η αρχική διαταραχή του συστήματος είναι η μοναδιαίου μέτρου ιδιοκατά-
241 σταση που κυριαρχεί ασυμπτωτικά.

242 (γ) Σχεδιάστε τώρα την εξέλιξη για 40 μονάδες του χρόνου την εξέλιξη της ενέργειας
243 του (14) όταν είναι $R = 10$ και η αρχική διαταραχή του συστήματος είναι η μοναδιαίου
244 μέτρου διαταραχή που διεγείρει το περισσότερο την ιδιοκατάσταση με τη μεγαλύτερη
245 ιδιοτιμή. Συγκρίνατε την ενέργεια των διαταραχών στον τελικό χρόνο με αυτήν του (β).

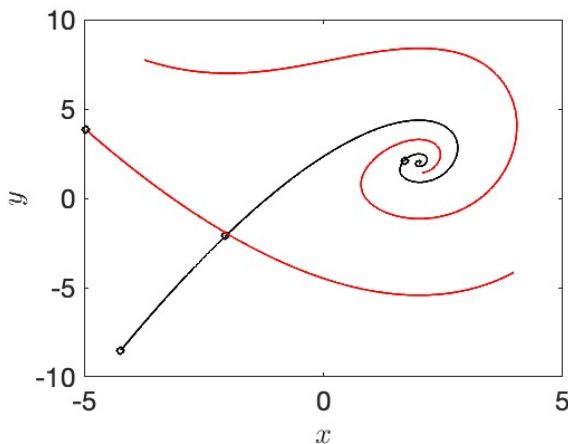
246 (δ) Σχεδιάστε τώρα στο ίδιο διάγραμμα την εξέλιξη 100 τυχαίων αρχικών συνθηκών
247 μοναδιαίου μέτρου (σημειώνοντας με άλλο χρώμα την εξέλιξη των (β) και (γ)).

248 (ε) Σχεδιάστε τώρα σε άλλο διάγραμμα την εξέλιξη 100 τυχαίων αρχικών συνθηκών
249 μοναδιαίου μέτρου του (15) (σημειώνοντας με άλλο χρώμα την εξέλιξη των ιδιοκαταστά-
250 σεων του συστήματος).

251 (στ) Τι συμπεραίνετε για την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας του δυναμικού συ-
252 στήματος αν $R \rightarrow \infty$ και για την ισοδυναμία των δύο αναπαράστασεων του δυναμικού
253 συστήματος;

254 Για την Παρασκευή 27/3

255 21. Από Strogatz (1994): Τις δύο ασκήσεις 6.3.1, 6.3.5 p. 182 στο επίπεδο. Επιπλέον σχεδιάστε
256 τη ροή της 6.3.5 επί της επιφάνειας μίας σφαίρας, όπου x είναι η πολική γωνία και y η
257 αζιμουθιακή.



Σχήμα 12: Άσκηση 6.3.1 Strogatz

258 22. (Μετάβαση από τη στρωτή στην τυρβώδη κατάσταση ενός ρευστού). Θεωρήστε ότι οι
259 διαταραχές της ταχύτητας σε μία στρωτή ροή ικανοποιούν την ακόλουθη δυναμική:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/R & 1 \\ 0 & -2/R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \sqrt{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (16)$$

260 Το x είναι διαταραχή της ταχύτητας στη διεύθυνση της στρωτής ροής, και το y η διατα-
261 ραχή της ταχύτητας στη κάθετη διεύθυνση. Το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ ανταποκρίνεται
262 σε μηδενική διαταραχή από τη στρωτή ροή, η οποία είναι σύμφωνα με την (16) ασυμ-
263 πτωτικά ευσταθής στη γραμμική προσέγγιση για κάθε τιμή του αριθμού Reynolds, R . Η
264 ενέργεια των διαταραχών ορίζεται ως η ποσότητα $E = x^2 + y^2$.

265 (α) Γράψτε την εξίσωση εξέλιξης της ενέργειας. Τι παρατηρείτε;

266 (β) Ποία είναι η φυσική δράση του μη γραμμικού όρου;

267 (γ) (Μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης) Θεωρήστε αρχικές διαταραχές ενέργειας $E_0 \leq$
268 1. Εκτιμήστε για $R = 4$ την αρχική ενέργεια διαταραχών που απαιτείται για να μεταβεί
269 το ρευστό στην “τυρβώδη κατάσταση”, δηλαδή να μην καταλήξει στη στρωτή ροή $(0,0)$.
270 Τι συμβαίνει όταν είναι $R = 2$;

271 (δ) Μπορείτε να προσδιορίσετε ποία είναι η τυρβώδης κατάσταση της παραπάνω
272 δυναμικής και τη κρίσιμη τιμή R_c στην οποία γίνεται μετάβαση στη τυρβώδη κατάσταση
273 σε αυτήν την αναπαράσταση της δυναμικής του ρευστού.

274 (ε) Πως θα κατασκευάζατε αριθμητικά τη μη γραμμική εξέλιξη των ευσταθών πολ-
275 λαπλοτήτων του σημείου $(0, 0)$; Μπορείτε να το επιτύχετε;

276 Για την Παρασκευή 3/4

277 23. Θεωρήστε μονοδιάστατη διάδοση κυμάτων της θάλασσας με $\omega = \sqrt{gk}$, g η επιτάχυνση
278 της βαρύτητας. Παρατηρούμε τον κυματισμό που φτάνει στην ακτή που προκλήθηκε
279 από έκρηξη σε κάποιο σημείο στη θάλασσα που είναι σε απόσταση L από την ακτή.
280 Στις 12 το μεσημέρι παρατηρούμε κύματα μήκους κύματος 7 m , και μισή ώρα αργότερα
281 κύματα 2 m . Πόσο μακριά από την ακτή έγινε η έκρηξη;

282 **Λύση:** κάθε δεδομένο k κινείται (ασυμπτωτικά) με την ταχύτητα ομάδας (πως ορίζεται
283 το k ;) οπότε:

$$L = \frac{\delta t}{\frac{1}{c_g(\lambda=2)} - \frac{1}{c_g(\lambda=7)}} = 3450\text{ m}$$

284 24. Θεωρήστε τον ταλαντωτή $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ με $\omega_0^2 \neq 1$, και με μέτρο των διαταραχών την ενέργεια
285 $E = (\dot{x}^2 + x^2)/2$. Προσδιορίστε την κατάσταση που προκαλεί στιγμιαία τον μέγιστο
286 ρυθμό αύξησης της ενέργειας $(dE/dt)/E$ και την κατάσταση που προκαλεί στιγμιαία
287 τον ελάχιστο ρυθμό αύξησης της ενέργειας. Ερμηνεύστε το αποτέλεσμα γεωμετρικά.

288 25. (ΦΧ) Το δυναμικό σύστημα

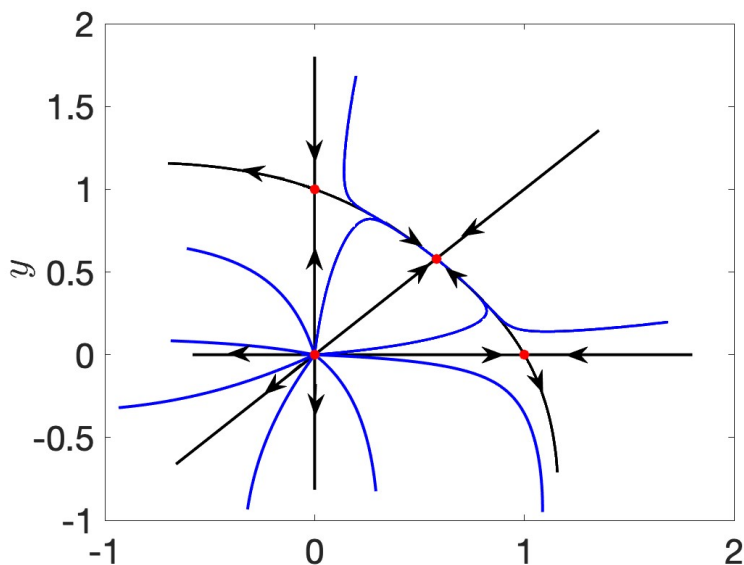
$$\dot{x} = x(1 - x) - (5/8)xy(x + y),$$

$$\dot{y} = y(1 - y) - (5/8)xy(x + y),$$

289 περιγράφει τον ανταγωνισμό δύο πληθυσμών. Υπάρχουν μόνο τέσσερα σημεία ισορρο-
290 πίας: δύο συμμετρικά, το $A(0, 0)$ και το $B((-2 + 2\sqrt{6})/5, (-2 + 2\sqrt{6})/5) \approx (0.6, 0.6)$ και
291 δύο ασύμμετρα το $\Gamma(0, 1)$ και το $\Delta(1, 0)$. Δεν υπάρχουν άλλα σημεία ισορροπίας.

292 (α) Περιγράψτε τι παριστάνουν οι όροι του δυναμικού συστήματος και τι υποθέσεις
293 έχουν γίνει στον όρο της αλληλεπίδρασης.

294 (β) Υποστηρίζει κάποιος ότι υπάρχει ένας οριακός κύκλος ακτίνας < 0.5 γύρω από
295 την αρχή. Εξηγήστε γιατί αυτό είναι αδύνατο (δεν απαιτείται τα x και y να είναι θετικά).



Σχήμα 13: Άσκηση 25: Μαύρες γραμμές οι ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες. Μπλε γραμμές άλλες τροχιές. Το $(0, 0)$ είναι ακτινωτή πηγή.

296

(γ) Σχεδιάστε τη ροή στην περιοχή όλων των σημείων ισορροπίας. (Ο Ιακωβιανός πίνακας του σημείου B είναι $\approx [-0.8, -0.6; -0.6, -0.8]$).

297

298

(δ) Σχεδιάστε τη μη γραμμική εξέλιξη όλων των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων των σημείων ισορροπίας.

299

300

(ε) Σχεδιάστε τη ροή σε όλο το επίπεδο. Ποια είναι ασυμπτωτική συμπεριφορά αυτών των δύο πληθυσμών;

301

302

Απάντηση

303

1. Το ερώτημα που τίθεται είναι τι συμβαίνει όταν δύο πανομοιότυποι πληθυσμοί που εξελίσσονται λογιστικά αλληλεπιδρούν ανταγωνιστικά. Η αρνητική επίδραση της αλληλεπίδρασης λαμβάνεται ανάλογη της πιθανότητας να αλληλεπιδράσουν οι δύο πληθυσμοί (ο όρος xy) αλλά και ανάλογος του συνολικού πληθυσμού ($x + y$).

304

305

306

307

2. Δεν μπορεί να υπάρχει τέτοιος κύκλος διότι η τροχιά του θα έτεμνε εγκάρσια τις ευθείες $x = 0$, $y = 0$, $x = y$ που είναι αδύνατο διότι η ροή σε αυτές είναι στην κατεύθυνση της κάθε ευθείας (οι καμπύλες αυτές είναι αναλλοίωτες: αν $x(0) = 0$ τότε και $x(t) = 0$, αν $y(0) = 0$ τότε και $y(t) = 0$, αν $x(0) = y(0)$ τότε και $x(t) = y(t)$).

308

309

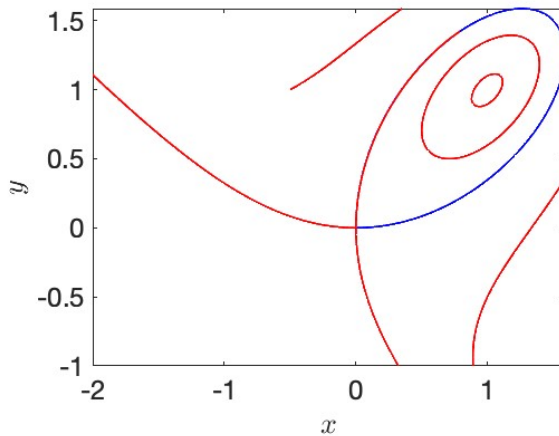
310

311

(3,4,5) Στο Σχ. 1. Οι πληθυσμοί θα καταλήξουν στην κατάσταση ισορροπίας B και θα συνυπάρξουν με ίσους πληθυσμούς, αλλά λίγο λιγότερους από όταν δεν αλληλεπιδρούσαν.

312

313



Σχήμα 14: Άσκηση 26. Η ασταθής πολλαπλότητα του σημείου $(0,0)$ στη διεύθυνση $(0,1)$ καταλήγει στην ευσταθή πολλαπλότητα του ίδιου σημείου στην διεύθυνση $(1,0)$. Σχηματίζει δηλαδή ομοκλινική τροχιά. Το κέντρο παραμένει κέντρο διότι το σύστημα είναι συμμετρικό στους μετασχηματισμούς $x \rightarrow y, y \rightarrow x$ (κατοπτρική συμμετρία ως προς τη διαγώνιο $y = x$) και αντιστροφή του χρόνου $t \rightarrow -t$.

314 26. Για το δυναμικό σύστημα στο επίπεδο

$$\dot{x} = -x + y^2, \quad \dot{y} = y - x^2$$

315 (α) Προσδιορίστε τις καμπύλες μηδενικής κλίσης και τη ροή σε αυτές.

316 (β) Με αριθμητική ολοκλήρωση προσδιορίστε τη μη γραμμική εξέλιξη των ασταθών
317 και ευσταθών πολλαπλοτήτων του σημείου ισορροπίας $(0,0)$.

318 (γ) Με αριθμητική ολοκλήρωση δείτε ότι το κέντρο $(1,1)$ παραμένει κέντρο και όταν
319 περιλαμβάνονται και οι μη γραμμικοί όροι.

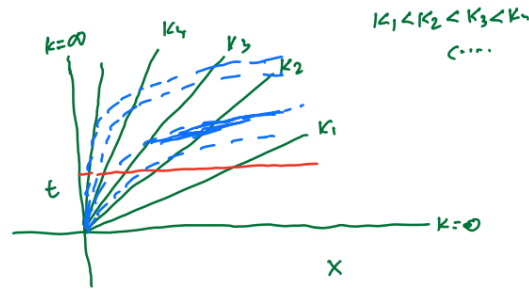
320 (δ) Εξηγήστε τον λόγο που το κέντρο παραμένει κέντρο και συνεπώς υπάρχει απει-
321 ρία περιοδικών τροχιών περί το $(1,1)$.

322 Για την Παρασκευή 24/4

323 27. Ο κυματισμός σε ένα μέσο με σχέση διασποράς $\omega = \sqrt{k}$ έχει αρχικά σχήμα με μία κο-
324 ρυφή (π.χ. σαν μια γκαουσιανή). Λόγω της διασποράς δημιουργούνται πολλές κορυφές.
325 Ασυμπτωτικά οι κορυφές χωρίζουν και ο αριθμός τους σε κάθε διάστημα διατηρείται
326 ανά πάσα στιγμή. Θεωρήστε ότι, αφού έχει γίνει αυτή η αρχική διασπορά και ήδη βρισκό-
327 μαστε στην ασυμπτωτική κατάσταση διατήρησης του αριθμού των κορυφών την οποία
328 χαρακτηρίζουμε $t = 0$, το κυματικό πεδίο εκτείνεται στο διάστημα $[0,1]$ και οι κυμα-
329 τάριθμοι είναι κατανεμημένοι στο διάστημα αυτό μονότονα με το μεγαλύτερα κύματα
330 μπροστά από τα μικρότερα, δηλαδή το $k(x,0)$ των κυμάτων είναι κατανεμημένο έτσι
331 ώστε να είναι $k(x_1,0) < k(x_2,0)$ εφόσον $x_1 > x_2$ (αυτό αναμένεται στη συγκεκριμένη

Ασκ. 27

$$\omega = \sqrt{k} \quad \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2\sqrt{k}} = \frac{x}{t}$$



αρα $k = \frac{t^2}{4x^2}$, $\omega = \frac{t}{2x}$
 ή ανατρέφοντας είναι επίσης $\frac{dk}{dt} = \frac{1}{k} = \frac{t}{2x} \cdot \frac{4x^2}{t^2} = \frac{2x}{t}$

αρα είναι $x = \alpha t^2$, α : ανατρέφει
 όπως στη σχέση.

Δηλαδή για ένα ω οι k_1, ω και ω μεταδίδονται
 με πιο γρήγορα σε α δας; οι κορυφές του κυματικού

μεταδίδονται με πιο γρήγορα $\frac{\omega}{k}$ ή οποία
 όπως αργάει όπως σε ω και μεταδίδονται!

332

σχέση διασποράς). Σχεδιάστε στο χωροχρονικό επίπεδο (x, t) τις τροχιές που διαγράφει κάθε κυματάριθμος και τις τροχιές που διαγράφουν οι κορυφές του κυματικού πεδίου.

333

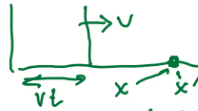
334

28. (ΦΧ) Έστω ότι το πεδίο της ταχύτητας $u(x, t)$ στην ευθεία ικανοποιεί την εξίσωση Hopf $u_t + uu_x = 0$. Είναι η δυναμική αυτή αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου; Τι συμβαίνει όταν το u είναι κάποιο άλλο πεδίο;

335

336

Ασκ. 28



$x = x' + vt$ $\frac{dx}{dt} = v$ $t' = t$
 όπου η ταχύτητα μετακίνησης είναι
 δεδομένη ορι $dt' = dt$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v, \quad u = u' + v$$

Εξα $u_x = u_x' \frac{\partial x'}{\partial x} + u_t' \frac{\partial t'}{\partial x} = u_x'$

$$u_t = u_t' \frac{\partial t'}{\partial t} + u_x' \frac{\partial x'}{\partial t} = u_t' - v u_x'$$

αφ $u_t + u u_x = 0 \rightarrow$
 \downarrow

$$u_t' - v u_x' + u u_x' = 0$$

Αν τὸ u εἶναι μετακίνησης με $u = u' + v$

δὲν εἶναι ἀσφαλῆς αὐτὸ εἶναι

φύσις γαλιλιανική

$$u_t' + u' u_x' = 0 \quad \text{καί}$$

Εἶναι ἀντικρουμένη!

337 29. Έστω $u(x, t)$ το πεδίο ταχυτήτων που εξελίσσεται σύμφωνα με την $u_t + uu_x = 0$ (αυτή
 338 δεν είναι, ούτε μπορεί να είναι, εξίσωση του πεδίου ταχυτήτων ενός ρευστού) με αρχική
 339 κατανομή

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

340 (α) Δείξτε ότι μέχρι τον χρόνο $t = 1$ που η λύση παύει να υπάρχει το πεδίο ταχυτήτων
 341 είναι:

$$u(x, t) = \begin{cases} (1+x)/(1+t), & -1 < x < t, \\ (1-x)/(1-t), & t \leq x < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

342 Σχεδιάστε το $u(x, t)$ στον χρόνο $t = 1^-$.

343 (β) Δείξτε ότι για χρόνους $t > 1$, με τη συνέχιση της λύσης με επούλωση κρουστικού
 344 κύματος, το πεδίο ταχυτήτων λαμβάνει την μορφή:

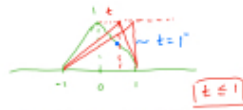
$$u(x, t) = \begin{cases} (1+x)/(1+t), & -1 < x < s(t), \\ 0, & x < -1, x \geq s(t), \end{cases}$$

345 όπου $s(t)$ η θέση της ασυνέχειας του πεδίου ταχυτήτων. Προσδιορίστε τη συνάρτηση $s(t)$.
 346 Σχεδιάστε την ασυμπτωτική μορφή του πεδίου ταχυτήτων.

347 (γ) Δείξτε ότι το κρουστικό κύμα διατηρεί σε όλους τους χρόνους την ορμή $P =$
 348 $\int_{-\infty}^{\infty} dx u$ αλλά όχι της ενέργειας $E = \int_{-\infty}^{\infty} dx u^2$. Σχεδιάστε την εξέλιξη της ενέργειας
 349 για $t \geq 0$.

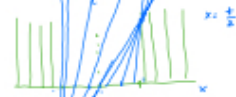
350 (δ) Εξηγήστε τον λόγο που η μέγιστη ταχύτητα του πεδίου της ταχύτητας δεν μειώ-
 351 νεται όταν η αρχική συνθήκη είναι $u(x, 0) = 1, x < 0, u(x, 0) = 0, x \geq 0$.

Arr. 2.9

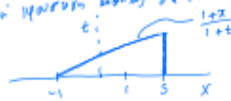


$$u = \frac{1+x}{1+t} \quad -1 \leq x < t$$

$$u = \frac{1-x}{1-t} \quad t \leq x \leq 1$$



Ti kpuwani uka rumpi fela
 Oti mufi $(x, y) = (1/2)$
 Ti xite fela zu rumpi
 To kpuwani kumpi di elu



$$\text{dpt } \frac{ds}{dt} = \frac{u_1 + v_1}{2}, \quad u_1 = 0$$

$$\text{ti } s(t) = \frac{1}{2}, \quad u_1 = \frac{1+s}{1+t}$$

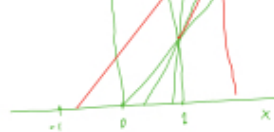
$$\frac{ds}{dt} = \frac{1+s}{2(1+t)}, \quad \frac{ds}{1+s} = \frac{dt}{2(1+t)}$$

$$\log(1+s) - \log 2 = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+t}{2} \right)$$

$$\log \frac{1+s}{2} = \log \sqrt{\frac{1+t}{2}}$$

$$\text{ti } s+1 = \sqrt{2} \sqrt{1+t}$$

$$\text{ti } s(t) = \sqrt{2} \sqrt{1+t} - 1$$



$$\int_{-A}^A u(x,t) = \frac{1}{2}(s+1) \cdot u_{\max}$$

$$= \frac{1}{2}(s+1) \cdot u_{\max}$$

$$u_{\max} = \frac{1+s}{1+t} = \frac{1 + \sqrt{2} \sqrt{1+t} - 1}{1+t} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+t}}$$

$$s+1 = 1 + \sqrt{2} \sqrt{1+t} - 1 = \sqrt{2} \sqrt{1+t}$$

$$\text{ti } \int_{-A}^A u(x,t) = \frac{1}{2}$$

o pas i "wiru" zu kumpi...

$$\int_{-A}^A u^2 dx = \int_{-A}^A \left(\frac{1+x}{1+t} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{(1+t)^2} \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{1+t} x \right]_{-A}^A = \frac{1}{(1+t)^2} \left[\frac{1}{2} (A^2 - (-A)^2) + \frac{2}{1+t} (A - (-A)) \right]$$

$$= \frac{1}{(1+t)^2} \left[\frac{1}{2} (A^2 - A^2) + \frac{4A}{1+t} \right] = \frac{4A}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+t)^2} \left[\frac{1}{2} (A^2 - A^2) + \frac{4A}{1+t} \right] = \frac{4A}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+t)^2} \left[\frac{1}{2} (A^2 - A^2) + \frac{4A}{1+t} \right] = \frac{4A}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+t)^2} \left[\frac{1}{2} (A^2 - A^2) + \frac{4A}{1+t} \right] = \frac{4A}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+t)^2} \left[\frac{1}{2} (A^2 - A^2) + \frac{4A}{1+t} \right] = \frac{4A}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+t)^2} \left[\frac{1}{2} (A^2 - A^2) + \frac{4A}{1+t} \right] = \frac{4A}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+t)^2} \left[\frac{1}{2} (A^2 - A^2) + \frac{4A}{1+t} \right] = \frac{4A}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+t)^2} \left[\frac{1}{2} (A^2 - A^2) + \frac{4A}{1+t} \right] = \frac{4A}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+t)^2} \left[\frac{1}{2} (A^2 - A^2) + \frac{4A}{1+t} \right] = \frac{4A}{(1+t)^2}$$

352 30. Θεωρήστε ότι το πεδίο ταχυτήτων $u(x, t)$ ικανοποιεί την εξίσωση διάχυσης $u_t = \nu u_{xx}$,
353 $\nu > 0$, και έστω ότι αρχικά $u(x, 0) = \delta(x)$. Η ενέργεια του πεδίου είναι $E = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx$.

354 (α) Εξηγήστε τον λόγο που το πρόβλημα όπως έχει τεθεί δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί.
355

356 (β) Ανεξάρτητα από το (α) προσδιορίστε την $u(x, t)$, $t > 0$.

357 (γ) Υπολογίστε τον ρυθμό ανάλωσης της ενέργειας dE/dt .

358 (δ) Ποιός είναι ο ρυθμός ανάλωσης ενέργειας στο όριο $\nu \rightarrow 0$;

359 Απ.

360 Ο ρυθμός ανάλωσης είναι

$$\frac{dE}{dt} = -\nu \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx$$

361 επομένως αν το $\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx$ είναι φραγμένο τότε στο όριο $\nu \rightarrow 0$ ο ρυθμός ανάλωσης
362 μηδενίζεται. Η λύση της εξίσωσης διάχυσης είναι

$$u(x, t) = e^{t\nu\partial^2/\partial x^2} u(x, 0).$$

363 Επομένως αν αναλύσω την $u(x, 0)$ στις ιδιοκαταστάσεις του $\nu\partial^2/\partial x^2$ τότε έχω τη λύση. Οι
364 ιδιοκαταστάσεις του $\nu\partial^2/\partial x^2$ στην άπειρη ευθεία είναι οι $e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$ (έχει διαιρεθεί με $\sqrt{2\pi}$
365 για να είναι οι ιδιοκαταστάσεις ορθοκανονικές) με αντίστοιχες ιδιοτιμές $-\nu k^2$, οπότε αν

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk a(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}},$$

366 τότε

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk a(k) e^{-\nu k^2 t} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}.$$

367 Η συνέχεια της $u(x, 0)$ εξασφαλίζεται απλώς με την απόλυτη σύγκλιση του ολοκληρώ-
368 ματος της $a(k)$. Αλλά για κάθε $t > 0$ λόγω της εκθετικής μείωσης των συντελεστών
369 $a(k)e^{-\nu k^2 t}$ η $u(x, t)$ είναι απείρως παραγωγίσιμη ασχέτως με το τι ήταν η $u(x, 0)$ και τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx u_x(x, t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk k^2 |a(k)|^2 e^{-2\nu k^2 t} \leq \int_{-\infty}^{\infty} dk k^2 |a(k)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx u_x(x, 0)^2,$$

370 με την επιφύλαξη ότι το $\int_{-\infty}^{\infty} dx u_x(x, 0)^2$ μπορεί να είναι άπειρο. Επομένως αν $\int_{-\infty}^{\infty} dx u_x(x, 0)^2 <$

371 ∞ τότε

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{dE}{dt} = 0,$$

372 όπως αναμένει κανείς διότι η διάχυση εξομαλύνει το πεδίο.

373 Τι συμβαίνει αν η αρχική κατασταση είναι ασυνεχής, πχ. $u(x, 0) = \Theta(x)$, τότε η λύση
374 είναι

$$u(x, t) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4vt}}\right), \quad u_x(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi vt}} e^{-x^2/(4vt)}.$$

375 και

$$\frac{dE}{dt} = -v \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx = -v \frac{1}{2\pi vt} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2/(2vt)} = -\frac{v}{2\pi vt} \sqrt{2\pi vt} = -\sqrt{\frac{v}{2\pi t}},$$

376 το οποίο τείνει στο μηδέν όπως $v \rightarrow 0$.

377 Τι συμβαίνει τώρα αν

$$u(x, 0) = \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk a(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

378 Η αρχική βέβαια κατάσταση έχει άπειρη ενέργεια και δεν είναι πραγματοποιήσιμη. Τότε

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-vk^2 t} \frac{e^{ikx}}{2\pi}, \quad u_x(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk (ik) e^{-vk^2 t} \frac{e^{ikx}}{2\pi},$$

379

$$\frac{dE}{dt} = v \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx \approx -\frac{1}{v^{1/2} t^{3/2}}$$

380 που αποκλίνει όπως το $v \rightarrow 0$. Στην περίπτωση αυτή η u_x απειρίζεται όπως $v \rightarrow 0$ και η
381 $\int u_x^2 dx$ αυξάνεται τόσο γρήγορα που δεν μπορεί να ομαλοποιηθεί από τη διάχυση. Στην
382 περίπτωση αυτή το όριο $v \rightarrow 0$ είναι ανώμαλο και οι λύσεις δεν συγκλίνουν στις λύσεις
383 με $v = 0$.

384 31. Σχεδιάστε τη ροή των δυναμικών συστημάτων:

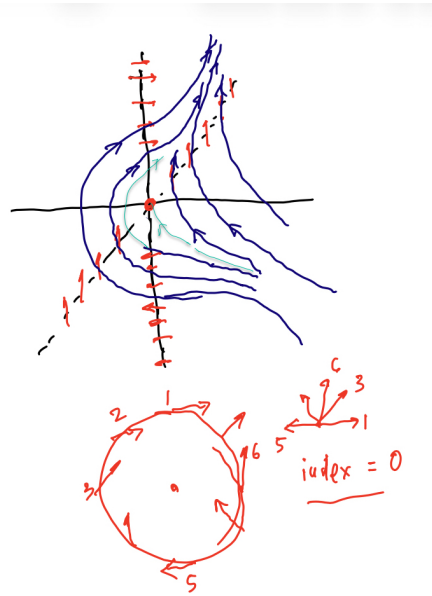
385 (α) $\dot{x} = y - x, \dot{y} = x^2$

386 (β) $\dot{x} = xy, \dot{y} = x + y$

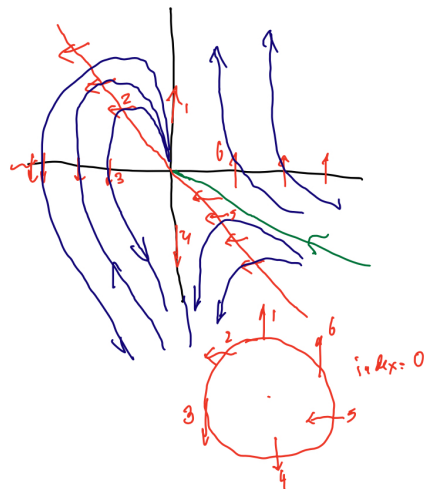
387 (γ) $\dot{x} = x^2 - y^2, \dot{y} = 2xy$

388 Για την Τρίτη 5/5

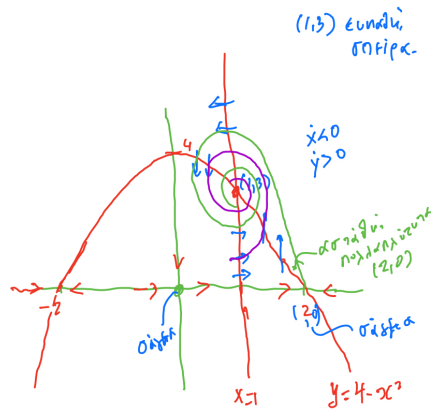
389 32. Από Strogatz (1994): άσκηση 6.8.1 (μέσω σχεδίου), p. 193



Σχήμα 15: Άσκηση 31α: Ο δείκτης είναι μηδενικός διότι η ροή έχει παντού $y \geq 0$ και επομένως η ροή δεν μπορεί να κάνει κύκλο. Το σημείο ισορροπίας έχει προκύψει από σύγκρουση καταβόθρας (με δείκτη +1) με σάγμα (δείκτης -1) και έτσι $+1 + (-1) = 0$.

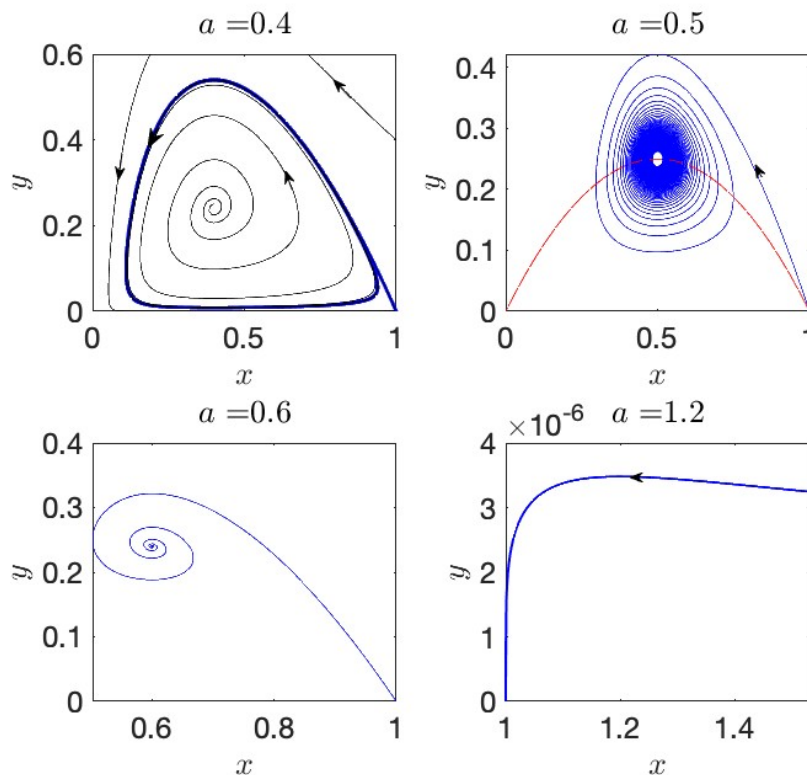


Σχήμα 16: Άσκηση 31β: Ο δείκτης είναι μηδενικός. Το σημείο ισορροπίας έχει προκύψει από σύγκρουση σάγματος (με δείκτη -1) με πηγή (δείκτης +1) και έτσι $-1 + (+1) = 0$.

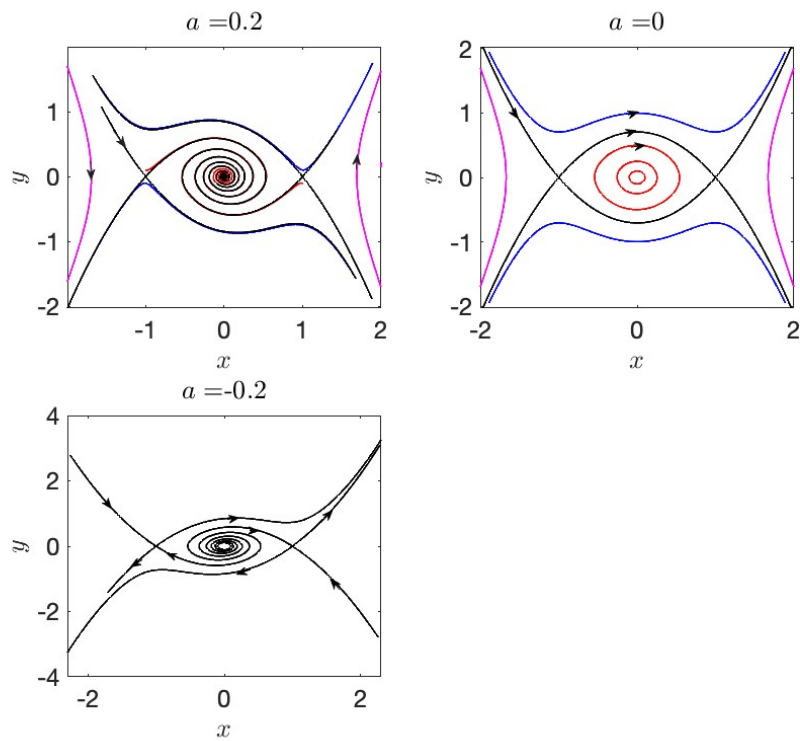


Σχήμα 17: Άσκηση 34

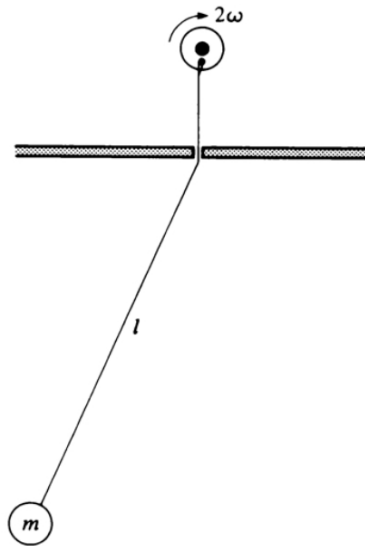
- 390 33. Προσδιορίστε τον δείκτη του σημείου ισορροπίας της ροής του δυναμικού συστήματος
 391 της άσκησης 31γ. Μπορεί να προσδιορισθεί άμεσα από το διάγραμμα ότι είναι 2. Αλλά
 392 και ως εξής: με $z = x + iy$ το δυναμικό σύστημα είναι $\dot{z} = z^2$ (που είναι η ροή ενός
 393 διπόλου). Το διανυσματικό πεδίο είναι $z^2 = |z|^2 e^{2i\theta}$, όπου θ η γωνία με τον άξονα x . Ο
 394 δείκτης μίας καμπύλης περι το $(0,0)$ είναι $I_\gamma = \Delta\theta / (2\pi)$ όπου $\Delta\theta$ η μεταβολή της γωνίας
 395 που σχηματίζει το $z^2 = |z|^2 e^{2i\theta}$ όταν το θ μεταβάλλεται από $0 \rightarrow 2\pi$, που είναι $\Delta\theta = 4\pi$,
 396 άρα ο δείκτης του σημείου ισορροπίας του $\dot{z} = z^2$ είναι 2.
- 397 34. Από Strogatz (1994): άσκηση 6.8.7, p. 193.
- 398 35. Από Strogatz (1994): άσκηση 6.8.8, p. 193.
- 399 36. Από Strogatz (1994): άσκηση 6.8.9, p. 194.
- 400 37. Από Strogatz (1994): άσκηση 6.8.12 p. 194. Γράφω μία καμπύλη ακούντως μεγάλης ακτί-
 401 νας ώστε να περιλαμβάνει όλα τα σημεία ισορροπίας ενώ η παράμετρος α μεταβάλλε-
 402 ται. Τότε ο δείκτης των σημείων ισορροπίας ως προς αυτήν την καμπύλη θα παραμείνει
 403 ο ίδιος όσο μεταβάλλεται το α , που σημαίνει ότι το άθροισμα των δεικτών όλων των
 404 σημείων ισορροπίας παραμένει σταθερό και ανεξάρτητο από την παράμετρο α .
- 405 Για την Παρασκευή 15/5
- 406 38. Από Strogatz (1994): άσκηση 8.2.8, p. 287
- 407 39. Από Strogatz (1994): άσκηση 8.2.11, p. 288.
- 408 40. Θεωρήστε ότι ο οριακός κύκλος στο επίπεδο (x, y) (όπου $y = \dot{x}$) για $\varepsilon = 1/10$ του ταλα-
 409 ντωτή $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ είναι $x = 2 \cos t$.



Σχήμα 18: Άσκηση 38: Όταν είναι $a < 1/2$, όπως για παράδειγμα στο αριστερό πάνω πάνελ στο οποίο έχει σχεδιασθεί η ροή για $a = 0.4$, το σημείο ισορροπίας $(x_e, y_e) = (a, a(1 - a))$ είναι ασταθής σπείρα και σημεία πλησίον του καταλήγουν σπειροειδώς στον οριακό κύκλο στον οποίον συγκλίνουν και όλες οι αρχικές καταστάσεις εκτός του κύκλου (εκτός βεβαίως οι αρχικές καταστάσεις με $(0, y)$, $y \geq 0$ που καταλήγουν στο σημείο ισορροπίας $(0, 0)$, και οι αρχικές καταστάσεις $(x, 0)$ με $x > 0$ που καταλήγουν στο σημείο ισορροπίας $(1, 0)$). Με μπλέ έχει σχεδιασθεί η ασταθής πολλαπλότητα του σάγματος $(1, 0)$ που καταλήγει στον οριακό κύκλο τον οποίον και σκιαγραφεί. Στην κρίσιμη τιμή $a = 1/2$ έχουμε υπερκρίσιμη διακλάδωση Hopf, και η ασταθής σπείρα περί το σημείο $(x_e, y_e) = (a, a(1 - a))$ γίνεται ευσταθής που έχει ως αποτέλεσμα όλες οι καταστάσεις (εκτός αυτών των αξόνων) να καταλήγουν στο σημείο ισορροπίας (βλέπε σχέδιο ροής για $a = 0.6$ στο οποίο έχει σχεδιασθεί η τροχιά της ασταθούς πολλαπλότητας του $(1, 0)$). Στη κρίσιμη τιμή $a = 1/2$ το σημείο ισορροπίας $(x_e, y_e) = (a, a(1 - a))$ στη γραμμική προσέγγιση είναι κέντρο αλλά οι μη γραμμικοί όροι το καθιστούν ευσταθή σπείρα και όλες οι καταστάσεις καταλήγουν εκεί (στο σχήμα για $a = 1/2$ έχει σχεδιασθεί η ασταθής πολλαπλότητα του σάγματος που χαρακτηρίζει όλη τη ροή). Τέλος όταν είναι $a > 1$ το σημείο ισορροπίας $(x_e, y_e) = (a, a(1 - a))$ εξαφανίζεται (είναι αρνητικό) και το σημείο ισορροπίας $(1, 0)$ γίνεται καταβόθρα και όλες οι καταστάσεις καταλήγουν στο $(1, 0)$ (και πάλι έχει σχεδιασθεί η ευσταθής πολλαπλότητα του σημείου αυτού που δεν ταυτίζεται με το $y = 0$).



Σχήμα 19: Άσκηση 39: Το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ που είναι κέντρο όταν είναι $a = 0$ και το σύστημα είναι Χαμιλτονιανό, γίνεται ευσταθής σπείρα όταν είναι $a > 0$ και ασταθής όταν είναι $a < 0$, ενώ η ευστάθεια των δύο άλλων ισορροπιών, που είναι σάγματα, δεν επηρεάζεται. Στο παράδειγμα αυτό δεν υπεισέρχονται οι μή γραμμικοί όροι στην σταθεροποίηση της ασταθούς σπείρας κοντά στο σημείο ισορροπίας και η συμπεριφορά είναι όπως η μετάβαση από ευσταθή σε ασταθή γραμμικό ταλαντωτή.



Σχήμα 20: Άσκηση 41

410 (α) Αν ξ συμβολίζει την διαστάσεων 2×1 διαταραχή στην τροχιά του οριακού κύ-
 411 κλου γράψτε την εξίσωση $\dot{\xi} = \mathbf{A}(t)\xi$ που διέπει τη γραμμική εξέλιξη της ξ .

412 (β) Υπολογίστε τον διαδότη μίας περιόδου αριθμητικά προωθώντας εκθετικά το ξ
 413 βήμα-βήμα, λαμβάνοντας αρκούντως μικρά δ ώστε να επιτύχετε ικανοποιητική σύγκλιση
 414 (αυτό απαιτεί αριθμητικό υπολογισμό).

415 (γ) Υπολογίστε τώρα τις ιδιοτιμές του διαδότη μίας περιόδου και συγκρίνετε της με
 416 τα θεωρητικά αποτελέσματα.

417 (δ) Πως ορίζεται ο χαρακτηριστικός εκθέτης Lyapunov της $\dot{\xi} = \mathbf{A}(t)\xi$ και πως υπο-
 418 λογίζεται από τις ιδιοτιμές του διαδότη που προωθεί τις διαταραχές του οριακού κύκλου
 419 κατά μία περίοδο.

420 Για την Τρίτη 19/5

421 41. Το Σχ. 20 δείχνει ένα μαθηματικό εκκρεμές το οποίο αιωρείται στο επίπεδο του χαρτιού.
 422 Το νήμα που συγκρατεί τη μάζα του εκκρεμούς περνάει από μία οπή και είναι συνδε-
 423 δεμένο έκκεντρα σε ένα μικρό περιστρεφόμενο δίσκο. Έτσι το μήκος του νήματος αυ-
 424 ξομειώνεται κατά τι περιοδικά. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου είναι 2ω
 425 όπου $\omega = \sqrt{g/l}$ η φυσική συχνότητα του εκκρεμούς.

426 (α) Θεωρώντας κινήσεις του εκκρεμούς μικρού πλάτους, ώστε η γωνία που σχηματί-
 427 ζει το νήμα με την κατακόρυφο να εξελίσσεται ως $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$ δείξτε ότι η τάση του
 428 νήματος κατά την αιώρηση του εκκρεμούς σε προσέγγιση $O(\theta_0^2)$ είναι:

$$T = mg \left(1 + \frac{\theta_0^2}{4} - \frac{3}{4}\theta_0^2 \cos(2\omega t) \right),$$

429 έχοντας αμελήσει τη μεταβολή της τάσης από την αυξομείωση του μήκους η οποία απο-
430 δεικνύεται ότι δεν συμβάλλει στην μεταφορά ενέργειας στο εκκρεμές.

431 (β) Δείξτε ότι, αν η αυξομείωση του μήκους είναι $-a_0 \sin(2\omega t)$, ενέργεια εισέρχεται
432 συνεχώς στο σύστημα με αποτέλεσμα η ενέργεια του εκκρεμούς να αυξάνεται με μέσο
433 ρυθμό που δίνεται από την εξίσωση

$$\dot{E} = \frac{E}{\tau_e}, \quad \tau_e = \frac{2}{3} \frac{l}{a_0 \omega}.$$

434 (γ) Αν η δύναμη της τριβής του εκκρεμούς λόγω της κίνησής του στον αέρα είναι ανά-
435 λογη της ταχύτητας τότε η ταλάντωση θα εμφανιστεί μόνον αν ο χρόνος εκθετικής μειώ-
436 σης της ενέργειας του εκκρεμούς από την τριβή τ_d ικανοποιεί τη σχέση $\tau_d > \tau_e$. Βεβαίως,
437 η αντίσταση αναμένεται να είναι μάλλον ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας. Αν
438 υποθέσουμε ότι η τριβή είναι ανάλογη της v^n με $n > 1$ (γραμμένο κατάλληλα ώστε να
439 οδηγήει πάντα σε ανάλωση) τότε δείξτε ότι ανεξαρτήτως του μεγέθους της τριβής το εκ-
440 κρεμές θα αιωρείται και το πλάτος της ταλάντωσης αναμένεται να είναι $\theta_0 \propto a_0^{1/(n-1)}$.

441 Για την Παρασκευή 22/5

442 42. Θεωρήστε τον ταλαντωτή

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0,$$

443 του οποίου η συχνότητα $\omega^2(t)$ μεταβάλλεται περιοδικά με περίοδο $T = 2\pi$ μεταξύ δύο
444 συχνοτήτων, έτσι ώστε στο διάστημα $[0, 2\pi)$ να είναι:

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_0(1 + \varepsilon) & , \quad 0 \leq t < \pi, \\ \omega_0(1 - \varepsilon) & , \quad \pi \leq t < 2\pi. \end{cases}$$

445 (α) Προσδιορίστε τον διαδότη $\Phi(2\pi, \omega_0, \varepsilon)$ μίας περιόδου και επιβεβαιώστε ότι είναι
446 συνεχής συνάρτηση των ε και ω_0 .

447 (β) Σχεδιάστε τις ισοϋψείς του μέγιστου εκθέτη Lyapunov στην περιοχή $0 \leq \varepsilon \leq 1$,
448 $0.3 \leq \omega_0 \leq 2.3$ στο επίπεδο (ω_0, ε) .

449 (γ) Εάν η σειρά των συχνοτήτων αλλάξει και γίνει

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_0(1 - \varepsilon) & , \quad 0 \leq t < \pi, \\ \omega_0(1 + \varepsilon) & , \quad \pi \leq t < 2\pi, \end{cases}$$

450 εξηγήστε τον λόγο που παρότι ο διαδότης μίας περιόδου δεν είναι ο ίδιος με αυτόν της
451 (α) οι εκθέτες Lyapunov είναι ακριβώς οι ίδιοι.

452 (δ) Θα παρατηρήσετε ότι το διάγραμμα εμφανίζει “πλεξούδες”, δηλαδή εμφανίζο-
 453 νται σημεία ευστάθειας σε περιοχές $\varepsilon > 0$ που μικρή αλλαγή των παραμέτρων καθιστά
 454 τον ταλαντωτή ασταθή. Εξηγήστε τον λόγο που εμφανίζονται αυτά τα σημεία ευστά-
 455 θειας.

456 43. Θεωρήστε μία κοινωνία που αποτελείται από δύο άτομα την 1 και τον 2. Έστω x_1, x_2 οι
 457 περιουσίες των που θεωρούνται διαφορίσιμες συναρτήσεις του χρόνου, και μπορεί να
 458 να λαμβάνουν και αρνητικές τιμές. Το κάθε άτομο ανάλογα με την “τύχη” του αυξάνει
 459 ή μειώνει την περιουσία του, όπως περιγράφεται από τις διαφορικές εξισώσεις:

$$\dot{x}_1 = a_1(t)x_1, \quad \dot{x}_2 = a_2(t)x_2.$$

460 Θεωρούμε ότι κατά μέσο όρο δεν υπάρχει συστηματική τύχη στη ζωή και ο χρονικά μέ-
 461 σος ρυθμός μεγέθυνσης περιουσίας είναι μηδενικός:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{a_i(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t a_i(s) ds = 0, \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

462 Υπό αυτές τις συνθήκες, χωρίς καμμία αλληλεπίδραση, ο εκθέτης Lyapunov κάθε ατό-
 463 μου, και συνεπώς και όλης της κοινωνίας είναι μηδέν, και δεν υπάρχει ανάπτυξη σε
 464 αυτήν την κοινωνία. Στην ατομιστική αυτή κοινωνία κοινωνία θα είναι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = x_i(0), \quad i = 1, 2.$$

465 Αντίθετα με το άκρτο ατομικιστικό μοντέλο, ο “καθένας με την τύχη του”, υπάρχει το
 466 απόλυτα αλτρουϊστικό οικονομικό μοντέλο όπου τα άτομα διαχέουν μεταξύ τους την
 467 περιουσία τους σύμφωνα με τον διακριτό τελεστή της διάχυσης, οπότε η οικονομία γίνε-
 468 ται:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2D \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

469 (α) Δείξτε ότι και σε αυτήν την κοινωνία δεν θα υπάρξει ανάπτυξη, οι τελικές πε-
 470 ριουσίες των ατόμων θα εξισωθούν και θα γίνουν ίσες με τη μέση αρχική περιουσία της
 471 κοινωνίας.

472 (β) Θεωρήστε τώρα μία κοινωνία στην οποία υπάρχει ατομική πρωτοβουλία αλλά
 473 και αναδιανομή:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(t) & 0 \\ 0 & a_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2D \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

474 με τα a_i να ικανοποιούν την (17).

475 Για απλότητα αλλαζουμε τις μονάδες του χρόνου και λαμβανουμε το $D = 1$. Θεωρούμε
476 ότι τα $a_i(t)$, $i = 1, 2$, είναι περιοδικές συναρτήσεις, περιόδου T , με εναλλασσόμενες τιμές:
477 στο πρώτο ήμισυ της περιόδου λαμβάνουν τις σταθερές τιμές $a_1 = r_1$ και $a_2 = -r_2$,
478 ενώ στο δεύτερο ήμισυ της περιόδου λαμβάνουν τις σταθερές τιμές $a_1 = -r_1$ και $a_2 = r_2$,
479 $r_i > 0$, $i = 1, 2$. Λαμβάνοντας τιμές για τα a_1 και a_2 σχεδιάστε τον χαρακτηριστικό εκθέτη
480 Lyapunov $\lambda(a_1, a_2, T)$ συναρτήσει του T (υπολογίστε τον αριθμητικά). Αν αλλάξετε τις
481 τιμές των a_1 και a_2 θα αλλάξει η συμπεριφορά του εκθέτη Lyapunov; Τι συμπεραίνετε
482 για την εξέλιξη του πλούτου αυτής της κοινωνίας; Περιγράψτε πως θα καταταμηθεί ο
483 πλούτος μεταξύ των δύο ατόμων.