Κύρια σημεία διαλέξεων Μη Γραμμικής Δυναμικής 2026

Π. Ι., Θ.Α., Φ. Χ.

3 Απριλίου 2026

Διάλεξη 1- Πέμπτη 12/2

1. Δυναμικά συστήματα είναι μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν πως εξελίσσονται με τον χρόνο οι καταστάσεις που χαρακτηρίζουν το σύστημα. Μαρκοβιανά συστήματα είναι αυτά στα οποία οι μελλοντικές καταστάσεις του συστήματος για χρόνους $t \geq t_0$ εξαρτώνται μόνο από την κατάσταση του συστήματος στον χρόνο t_0 (αυτό ισχύει για κάθε t_0). Τα θεμελιώδη φαινόμενα στη φυσική περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις οι οποίες χ.ε.γ. (χωρίς έλλειψη της γενικότητας) μπορούν να θεωρηθούν ως πρωτοτάξιες διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες και ορίζουν μαρκοβιανά δυναμικά συστήματα. Δυναμικά συστήματα ορίζονται και από αναδρομικές σχέσεις (απεικονήσεις) π.χ. το δυναμικό σύστημα $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, το οποίο δεν είναι μαρκοβιανό.

2. Ενώ στα μαθηματικά η έννοια της γραμμικότητας ενός τελεστή έχει σαφές νόημα, η έννοια του γραμμικού δυναμικού συστήματος είναι ασαφής διότι εξαρτάται από την επιλογή των μεταβλητών. Π.χ. ο αρμονικός ταλαντωτής με μεταβλητή τη θέση x διέπεται από τη γραμμική εξίσωση $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, αν όμως λάβουμε ως μεταβλητή την $y = x^2$ το δυναμικό σύστημα με μεταβλητή την y δεν είναι πλέον γραμμικό. Σε τι αναφερόμαστε λοιπόν όταν λέμε ότι έχουμε μη γραμμική δυναμική; Αναφερόμαστε στα φαινόμενα που προκαλούνται από την αλληλεπίδραση καταστάσεων. Αυτές οι αλληλεπιδράσεις είναι που καθορίζουν τη διαμόρφωση των καταστάσεων ισορροπίας και τις οργανωμένες δομές που εμφανίζονται στη φύση.

3. Πειραματικά η μη γραμμικότητα ενός συστήματος ελέγχεται με τον κατά πόσον ικανοποιείται η υπέρθεση των διαφόρων λύσεων του συστήματος. Π.χ. το δυναμικό σύστημα που περιγράφει τη κίνηση σωματιδίου που κινείται ελεύθερα σε ένα διάστημα με ελαστικά ανακλώμενα τοιχώματα δεν είναι γραμμικό.

4. Γενικά τα μόνα συστήματα που μπορούν να λυθούν είναι τα γραμμικά. Αν η μεταβλητή είναι η $N \times 1$ κατάσταση ψ, και το δυναμικό σύστημα είναι το $\dot{\psi} = \mathbf{A}\psi$, όπου $\mathbf{A}$ πίνακας $N \times N$, και αν στον χρόνο $t = 0$ η κατάσταση του συστήματος είναι $\psi(0)$ στον χρόνο t θα

είναι $\psi(t) = e^{\mathbf{A}t}\psi(0)$, όπου $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}t^2/2! + \cdots$ ή $e^{\mathbf{A}t} = \lim_{n\to\infty}(\mathbf{I} + \mathbf{A}t/n)^n$. Αυτό σημαίνει ότι οι καταστάσεις του συστήματος t μονάδες το χρόνου αργότερα συνδέονται με τις αρχικές καταστάσεις με ένα γραμμικό μετασχηματισμό, ο πίνακας του οποίου είναι ο $\Phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\mathbf{A}t}$ έτσι ώστε $\Phi(t) : \psi(0) \to \psi(t)$. Ο $\Phi(t)$ λέγεται διαδότης (propagator) του συστήματος. Όταν γνωρίζουμε τον διαδότη γνωρίζουμε την εξέλιξη του συστήματος.

5. Αν ξέρουμε ότι ένα σύστημα είναι γραμμικό και ξέρουμε ότι η διάστασή του είναι N τότε κάνοντας προωθήσεις N καταλλήλως επιλεγμένων αρχικών καταστάσεων κατά χρόνο t και παρατηρώντας το αποτέλεσμα μπορούμε να υπολογίσουμε τον διαδότη και λαμβάνοντας τον λογάριθμό του διαδότη να προσδιορίσουμε τον πίνακα $\mathbf{A}$, που ονομάζεται γεννήτορας (generator) της δυναμικής.

6. Σημείο ισορροπίας του δυναμικού συστήματος $\dot{x} = v(x)$ είναι η κατάσταση x_e, όταν είναι $v(x_e) = 0$. Και αυτό διότι αν $x(0) = x_e$ η $x(t) = x_e$, για κάθε t, είναι λύση του δυναμικού συστήματος. Βεβαίως, αυτό προϋποθέτει ότι η λύση του δυναμικού συστήματος $\dot{x} = v(x)$ με αρχική συνθήκη $x(0) = x_e$ είναι μοναδική, κάτι που είναι βέβαιο μεν σε συστήματα που περιγράφουν ορθά φυσικά φαινόμενα, αλλά δεν είναι βέβαιο σε αφηρημένα μαθηματικά δυναμικά συστήματα. Π.χ. το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, $x(0) = 0$ έχει άπειρες άλλες λύσεις εκτός από την $x(t) = 0$.

7. Εν γένει οι λύσεις των δυναμικών συστημάτων ισχύουν μόνο για περιορισμένα χρονικά διαστήματα. Π.χ. η λύση του δυναμικού συστήματος $\dot{x} = 1 + x^2$ με $x(0) = 0$, $x(t) = \tan(t)$ ισχύει μόνο στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$, ενώ η λύση του $\dot{x} = x^2$ με $x(0) = 1/a$ που είναι $x = 1/(a-t)$ ισχύει μόνο στο διάστημα (a, ∞), εφόσον $a < 0$. Γενικά τα μόνα δυναμικά συστήματα των οποίων οι λύσεις ισχύουν για όλους του χρόνους είναι τα γραμμικά συστήματα, όλα τα άλλα εν γένει έχουν λύσεις που δεν επεκτείνονται σε όλους τους χρόνους, εκτός αν περιγράφουν ορθά φυσικά φαινόμενα.

8. Εν γένει οι μόνες διαφορικές εξισώσεις που μπορούν να λυθούν είναι οι γραμμικές εξισώσεις (και αυτές βέβαια που με αλλαγή μεταβλητής μετατρέπονται σε γραμμικές). Συνεπώς αναγκαστικά οι λύσεις των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων προσδιορίζονται με αριθμητικές ολοκληρώσεις. Αν έχω το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = v(x)$ με $x(0) = x_0$ τότε όλοι οι όροι του αναπτύγματος Taylor $x(t) = x(0) + t\dot{x}(0) + t^2\ddot{x}(0)/2! + \cdots$ προσδιορίζονται και αν η σειρά συγκλίνει προσδιορίζεται και η λύση. Αριθμητικά επιτυγχάνεται προσέγγιση της λύσης κάνοντας καταλλήλως χρονικά μικρά βήματα και αντικαθιστώντας την εξέλιξη του δυναμικού συστήματος με την αναδρομική σχέση: $x_{n+1} = x_n + v(x_n)$, $n = 1, 2, \cdots$ με $x_1 = x_0$ και $x_n = x(t_n)$, $x_{n+1} = x(t_n + \delta)$, όπου δ το χρονικό βήμα. Η μεθοδος αυτή ολοκλήρωσης ονομάζεται forward Euler.

Διάλεξη 2- Τρίτη 17/2

1. Για να έχει το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = v(x)$, $x(0) = x_0$, μοναδική λύση για χρόνους $|t| < M$ όταν το x_0 δεν είναι σημείο ισορροπίας απλώς απαιτείται η συνέχεια της ταχύτητας $v(x)$. Αν όμως το x_0 είναι σημείο ισορροπίας η μοναδικότητα εξασφαλίζεται αν ο χρόνος για να φτάσει στο σημείο ισορροπίας από κάποιο μη σημείο ισορροπίας (είτε ολοκληρώνοντας θετικά ή αρνητικά στον χρόνο) είναι άπειρος. Τότε η λύση με αρχική συνθήκη το σημείο ισορροπίας είναι μοναδική. Αυτό ικανοποιείται αν η $v(x)$ συνάρτηση είναι διαφορίσιμη. Μια ασθενέστερη συνθήκη που βεβαιώνει ότι το σημείο ισορροπίας προσεγγίζεται σε άπειρο χρόνο είναι η $v(x)$ να είναι Lipschitz, δηλαδή να υπάρχει σταθερά k έτσι ώστε να ικανοποιείται η $|v(x) - v(y)| < k|x - y|$, για x και y σε μία περιοχή. Αν η $v(x)$ είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο θα είναι και Lipschitz, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει, π.χ. η $v(x) = |x|$ είναι Lipschitz στο $x = 0$ αλλά δεν είναι διαφορίσιμη σε αυτό το σημείο (όμως η συνθήκη Lipschitz συνεπάγεται προφανώς τη συνέχεια). Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η συνθήκη Lipschitz συνεπάγεται ότι ο χρόνος για να φτάσει στο σημείο ισορροπίας είναι άπειρος, διότι αν χ.ε.γ. το $x = 0$ είναι σημείο ισορροπίας και επειδή η $v(x)$ είναι Lipschitz θα είναι $|v(x)| < k|x|$, δηλαδή η ταχύτητα είναι μικρότερη από τη γραμμική και επειδή με γραμμικά μεταβαλλόμενη ταχύτητα απαιτείται άπειρος χρόνος να φτάσει στο σημείο ισορροπίας συνεπάγεται ο χρόνος για να φτάσει κανείς στο σημείο ισορροπίας με ταχύτητα $v(x)$ είναι και αυτός άπειρος. Αν η συνάρτηση δεν είναι Lipschitz τότε η λύση μπορεί να μη είναι μοναδική π.χ. η $v(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι Lipschitz και η $\dot{x} = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, με $x(0) = 0$ δεν έχει μοναδική λύση. Αλλά όταν δεν είναι Lipschitz μπορεί η λύση να είναι είναι μοναδική, π.χ. η $\dot{x} = v(x)$ ορισμένη στην ημιευθεία $x \geq 0$ με $v(x) = x \log(K/x)$ όταν $x > 0$ και $v(x) = 0$ όταν είναι $x = 0$ δεν είναι Lipschitz αλλά έχει μοναδική λύση: μόνο την $x(t) = 0$ όταν $x(0) = 0$.

2. Το δυναμικό σύστημα που εξαρτάται και από την παράμετρο a: $\dot{x} = v(x, a)$ με $x(0) = x_0$ θα έχει λύση τη συνάρτηση $x(t, x_0, a)$. Η λύση $x(t, x_0, a)$ θα είναι συνεχής συνάρτηση της x_0 αν η $v(x, a)$ είναι Lipschitz ως προς x και θα είναι συνεχής συνάρτηση της παραμέτρου αν η $v(x, a)$ είναι συνεχής συνάρτηση της παραμέτρου. Αυτή είναι ιδιαιτέρως σημαντική ιδιότητα.

3. Η λύση του δυναμικού συστήματος $\dot{x} = v(x)$ με $x(0) = x_0$ είναι τυπικά η $x(t) = x_0 + \int_0^t ds\, v(x(s))$. Γράφω τις αναδρομικές σχέσεις $x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t ds\, v(x_n(s))$ για $n = 1, 2, \cdots$ με $x_1(t) = x_0$. Αν η ακολουθία συναρτήσεων $x_n(t)$ συκλίνει, $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$, τότε η $x(t)$ είναι η λύση του δυναμικού συστήματος. Η επαναληπτική αυτή κατασκευή της λύσης του δυναμικού συστήματος ονομάζεται Picard-Lindelöf. Αυτή είναι μιά διαταρακτική μέθοδος προσδιορισμού της λύσης που στη Φυσική είναι πολύ χρήσιμη παράγοντας τη σειρά Born-Oppenheimer.

4. Γραφική λύση της $\dot{x} = v(x)$ (βλ. Strogatz). Οταν το x λαμβάνει τιμές στην ευθεία το σύστημα θα καταλήξει αναγκαστικά σε κάποιο σημείο ισορροπίας (αν δεν απειριστεί). Ετσι χαρακτηρίζονται πλήρως τα μονοδιάστατα συστήματα επί της ευθείας: καταλήγουν σε σημεία ισορροπίας.

5. Αν τα γράψουμε στη μορφή $dx/dt = -dV/dx$ όπου $V(x)$ ενα δυναμικό, βλέπουμε οτι οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν Αριστοτέλεια δυναμική. Μάλιστα επειδή η τιμή του δυναμικού κατά την εξέλιξη του συστήματος είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου, διότι $dV/dt = (dV/dx)(dx/dt) = -(dx/dt)^2 \leq 0$, το σύστημα καταλήγει ασυμπτωτικά στα ευσταθή ελάχιστα του δυναμικού αν αρχικά δεν ήταν σε σημείο ισοορροπίας (σε ολοκληρώσεις πίσω στον χρόνο καταλήγει βέβαια σε ασταθές μέγιστο του δυναμικού).

6. Στην forward Euler ολοκλήρωση του δυναμικού συστήματος του αρμονικού ταλαντωτή $\dot{x} = \mathbf{A}x$ με $x(0) = x_0$ και γεννήτορα της δυναμικής
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$
το συνεχές σύστημα μετατρέπεται στην αναδρομική σχέση $x_{n+1} = x_n + \delta\mathbf{A}x_n = (\mathbf{I} + \delta\mathbf{A})x_n$ $n = 1, 2, \cdots$, $x_1 = x_0$, όπου $\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος πίνακας και δ το χρονικό βήμα. Η λύση είναι βεβαια $x_{n+1} = (\mathbf{I} + \delta\mathbf{A})^n x_1$ (γεωμετρική σειρά) η οποία αναγκαστικά απειρίζεται για οποιοδήποτε χρονικό βήμα με ρυθμό $(\sqrt{1+\delta^2})^n$, δεδομένου ότι η απόλυτη τιμή των ιδιοτιμών του πίνακα $\mathbf{I} + \delta\mathbf{A}$ είναι $\sqrt{1+\delta^2} > 1$. Η αστάθεια αυτή μπορεί να αποτραπεί με backward Euler ολοκλήρωση $x_{n+1} = x_n + \mathbf{A}x_{n+1}$.

Διάλεξη 3-4- Πέμπτη, 19/2. Παρασκευή, 20/2

1. Διακλαδώσεις: Strogatz-1994: 3.4 (p. 55-61)

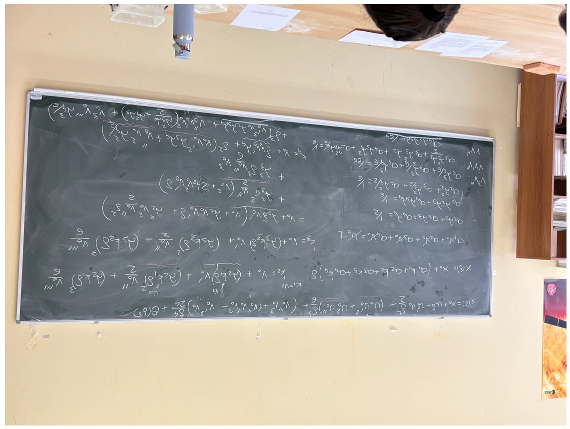
2. Απεικονίσεις: Strogatz-1994: 10.0,10.1 (p. 348-352)

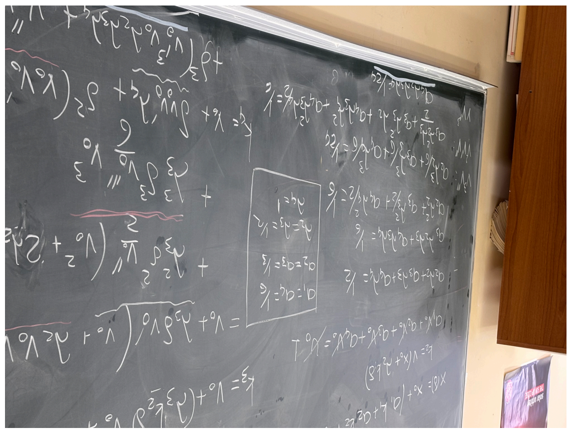
3. Το παράδειγμα που έκανα της απεικόνισης Poincaré στην χρονοεξαρτώμενη αλίευση είναι από το βιβλίο των Hirsch-Smale-Devaney 1.3,1.4,1.5 (p. 7-15), που ανάρτησα στα βιβλία.

Διάλεξη 5- Τρίτη, 24/2

1. Διακλάδωση θέσης ισορροπίας χάντρας σε περιστρεφόμενη στεφάνη. Μετάβαση από Νευτώνεια σε Αριστοτέλεια μηχανική: Strogatz-1994: 3.45 (p. 61-69)

2. Μονοδιάστατα δυναμικά συστήματα στον κύκλο. Το φαινόμενο του συγχρονισμού : Strogatz-1994: 4.0-4.5 (p. 93-106)





3. Παράδειγμα συγχρονισμού: https://www.youtube.com/watch?v=Aaxw4zbULMs

Διάλεξη 5- Παρασκευή, 27/2

1. Αναλυτική παρουσιάση κατασκευής αριθμητικών ολοκληρώσεων που μπορούν να πετύχουν ακρίβεια $O(\delta^4)$. Μέθοδος Runge-Kutta 4 (Strogatz-1994 2.8 p. 32-36) και Feynman.

Διάλεξη 6- Παρασκευή, 6/3

Ανάλυση Φουριερ σε διακριτό πλέγμα και περιοδικό χωρίο. Εφαρμογή στη διαδοση κύματος σε μέσο με διασπορά. Διαβάστε για την ανάλυση Φουριερ από το βιβλίο Trefethen (το έχω ανεβάσει στα βιβλία) Κεφ. 2 σ. 9-11, Κεφ. 3 σ. 17-19. Επίσης έχω αναρτήσει στις Σημειώσεις ένα δικό μου κείμενο για την ανάλυση Φουριερ σε πλέγματα.

Διάλεξη 7- Παρασκευή, 13/3

Strogatz 1994 Κεφ. 5

Κανονική μορφή 2Χ2 πίνακα που έχει μία μόνο ιδιοτιμη λ. Θα δείξουμε ότι ο πίνακας είναι όμοιος με έναν από τους πίνακες

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \ .$$

Ο $\mathbf{A}_1$ αντιστοιχεί στη περίπτωση όπου υπάρχει πλήρης βάση ιδιοκαταστάσεων που καλύπτουν τον διδιάστατο χώρο. Τότε μάλιστα αν x και y είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες ιδιοκαταστάσεις με ιδιοτιμή λ τότε κάθε δίανυσμα του χώρου θα είναι και αυτό ιδιοκατάσταση με ιδιοτιμή λ. Αν δε λάβουμε τον πίνακα $\mathbf{U} = [x, y]$ με κολώνες τα δύο αυτά διανύσματα, τότε επειδή $\mathbf{A}[x, y] = [\mathbf{A}x, \mathbf{A}y] = [x, y]\mathbf{\Lambda}$, με $\mathbf{\Lambda} = \lambda\mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος) τον διαγώνιο πίνακα των ιδιοτιμών, τότε θα είναι

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}_1 \, .$$

Ας έρθουμε τώρα στη δεύτερη πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση όταν δεν έχουμε πλήρη βάση ιδιοκαταστάσεων, δηλαδή υπάρχει μόνο ένα διάνυσμα x που να είναι ιδιοκατάσταση του $\mathbf{A}$, δηλαδή μόνο ένα διάνυσμα ικανοποιεί την $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})x = 0$, με ιδιοτιμή $\lambda = T/2$ όπου $T = \mathrm{trace}(\mathbf{A})$. Πρώτα ας δείξουμε ότι υπάρχει αναγκαστικά μία ιδιοκατάσταση x. Αυτό βέβαια είναι προφανές διότι στην ιδιοτιμή $\lambda = T/2$ που προσδιορίσθηκε ώς λύση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου αντιστοιχεί και ένα διάνυσμα x που θα είναι η αντιστοιχούσα ιδιοκατάσταση. Ένας άλλος πιο ενδιαφέρον τρόπος να το δείτε αυτό είναι ο εξής: το χαρακτηριστικό πολυώνυμο στην περίπτωση αυτή είναι $(\lambda - T/2)^2 = 0$. Το θεωρημα Cayley-Hamilton αποδεικνύει ότι και ο πίνακας $\mathbf{A}$ ικανοποιεί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, άρα ισχύει ότι $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2 = 0$ (το $\lambda = T/2$ τώρα είναι η τιμή της ιδιοτιμής και όχι η μεταβλητή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου). Επιλέγουμε ένα τυχαίο διάνυσμα z. Αν είμαστε τυχεροί και είναι $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})z = 0$ τότε το z είναι η ιδιοκατάσταση x που ζητούσαμε. Αν δεν είμαστε τυχεροί και είναι $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})z \neq 0$ τότε το $x = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})z$ είναι αναγκαστικά ιδιοκατάσταση του $\mathbf{A}$ διότι είναι $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})x = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2 z = 0$. Επομένως υπάρχει διάνυσμα x που ικανοποιεί την

$$\mathbf{A}x = \lambda x \, , \tag{2}$$

αλλά δεν υπάρχει άλλο. Τώρα αν λάβω μία οποιαδήποτε άλλη γραμμικά ανεξάρτητη με το x κατάσταση z και δράσω πάνω στο z με τον $\mathbf{A}$, τότε υποστηρίζω ότι θα είναι αναγκαστικά

$$\mathbf{A}z = \mu x + \lambda z, \;\; \mu \neq 0 \, . \tag{3}$$

Συνεπώς αν λάβω το διάνυσμα $y = z/\mu$ θα έχω

$$\mathbf{A}y = x + \lambda y \, . \tag{4}$$

Πράγματι, εφόσον το z είναι γραμμικά ανεξάρτητο από το x θα είναι $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})z \neq 0$, αλλά το $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})z$ όπως είδαμε είναι ιδιοκατάσταση του $\mathbf{A}$, και συνεπώς πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του x, που είναι η μοναδική ιδιοκατάσταση, δηλαδή είναι $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})z = \mu x$, $\mu \neq 0$ και έτσι έχει αποδειχθεί η (3). Τώρα οι (2), (4) ορίζοντας $\mathbf{U} = [x, y]$ μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\mathbf{A}x = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \;,\;\; \mathbf{A}y = \mathbf{U} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \;,$$

και επομένως είναι

$$\mathbf{AU} = [\mathbf{A}x, \mathbf{A}y] = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \;.$$

Καταλήγουμε έτσι ότι ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι όμοιος με τον πίνακα Jordan $\mathbf{A}_2$.

Διάλεξη 8- Παρασκευή, 20/3

Ευστάθεια ασυμπτωτική και ευστάθεια κατά Lyapunov. Χαρακτηριστικός εκθέτης Lyapunov: οι πολυωνυμικές αυξήσεις έχουν μηδενικό εκθέτη Lyapunov.

Διάλεξη 9- Τρίτη, 24/3

Νόμοι διατηρησης. Διατύπωση της ταχύτητας ομάδας των Landau, Whitham, Lighthill. KPP - μοντέλο για διερεύνηση δυνατότητας ειρηνικής συνύπαρξης. Κεφάλαιο 6 Strogatz.

Παραθέτω μερικές σημειώσεις:

Νόμοι διατήρησης σε πεδία

Στη κλασσική μηχανική των σωματιδίων ορίσαμε διατηρήσιμες ποσότητες όπως την ενέργεια, ορμή, κ.λ.π. τις ποσότητες, $Q(t)$, που δεν μεταβάλλονται κατά τη χρονική εξέλιξη του συστήματος, και που ικανοποιούν δηλαδή

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \,. \tag{5}$$

Στη μηχανική αυτές οι μεταβλητές του συστήματος, θέσεις και ορμές, καθώς και κάθε ποσότητα που σχηματίζεται από αυτές είναι συναρτήσεις μόνο του χρόνου κατά τη χρονική εξέλιξη του συστήματος.

Στη μηχανική των πεδίων οι μεταβλητές είναι συναρτήσεις και του χρόνου και των χωρικών διαστάσεων. Ας θεωρήσουμε ότι το πεδίο εκτείνεται σε μία χωρική διάσταση, είναι δηλαδή ένα πεδίο 1-διάστασης, π.χ. το φυσικό σύστημα να είναι μία χορδή που εκτελεί εγκάρσιες ταλαντώσεις πλάτους $\eta(x, t)$. Υπό αυτή την έννοια η μηχανική των σωματιδίων είναι μηχανική πεδίων 0-διάστασης.

Πως μπορούμε να περιγράψουμε το νόμο διατήρησης σε αυτό το πεδίο; Θα μπορούσαμε να πούμε ότι κατά την κίνηση η ποσότητα $Q(t) = \int_{\mathcal{D}} dx\, q(x, t)$, όπου $\mathcal{D}$ το χωρίο του καταλαμβάνεται από το πεδίο, είναι χρονικά σταθερή. Η ποσότητα αυτή λέγεται το συνολικό "φορτίο" (ή φορτίο Noether). Ένας όμως τέτοιος καθολικός (global) νόμος διατήρησης δεν είναι ικανοποιητικός διότι τέτοιος νόμος διατήρησης δεν περιγράφει τη διατήρηση των ποσοτήτων όπως εξελίσσονται χωροχρονικά. Π.χ. θεωρήστε το πεδίο φορτίου $q(x,t)$:

$$q(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{for } t \leq 0 \\ \alpha\delta(x-x_1) - \alpha\delta(x-x_2), & \text{for } t > 0. \end{cases}$$

Ενώ το Q του πεδίου αυτού διατηρείται είναι εμφανές ότι ο νόμος αυτός διατήρησης δεν συνεπάγεται τη διατήρηση της ποσότητας αυτής σε τοπικό επίπεδο, δεδομένου ότι στην περίπτωση αυτή ξαφνικά δημιουργούνται φορτία στα σημεία x_1 και x_2. Είναι εμφανές δηλαδή ότι ένας καθολικός νόμος διατήρησης, όπως αυτός του συνολικού φορτίου Q δεν περιγράφει ικανοποιητικά τη διατήρηση ποσοτήτων στα πεδία. Οι νόμοι διατήρησης στα πεδία πρέπει να έχουν τοπική διατύπωση και απαιτούν για τη διατύπωσή τους δύο πεδία: την πυκνότητα της διατηρήσιμης ποσότητα $q(x,t)$ και τη ροή της διατηρήσιμης ποσότητας $f(x,t)$, τα οποία πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0\,. \tag{6}$$

Η εξίσωση συνέχειας είναι η διατύπωση του νόμου διατήρησης του πεδίου. Ο τοπικός αυτός νόμος διατήρησης βεβαιώνει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ποσότητας $\int_a^b dx\, q(x,t)$ στο χωρίο $[a,b]$, για κάθε $a < b$, είναι ίσος με τον ρυθμό f με τον οποίον το q εισέρχεται στο σύνορο a και εξέρχεται στο σύνορο b, δηλαδή είναι:

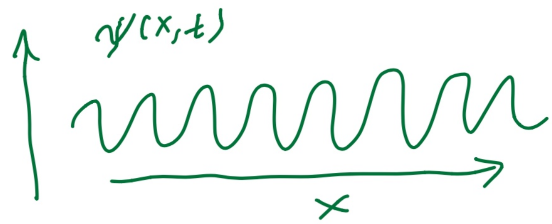
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b dx\, q(x,t) = f(a,t) - f(b,t). \tag{7}$$

Η διατύπωση του νόμου διατήρησης στην ολοκληρωτική μορφή είναι ισχυρότερος διότι απαιτεί μόνο την ολοκληρωσιμότητα των συναρτήσεων q και f, άλλως οι (6) και (7) είναι ισοδύναμες διατυπώσεις. Βεβαίως, ο τοπικός νόμος διατήρησης (6) συνεπάγεται τον καθολικό (5) (με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες), ενώ όπως είδαμε δεν ισχύει το αντίστροφο.

Το συναφές πεδίο f προσδιορίζεται από το φυσικό πρόβλημα. Εάν το πεδίο είναι η πυκνότητα ενός ρευστού που κινείται με ταχύτητα $v(x,t)$ τότε η διατήρηση της μάζας απαιτεί το $f = \rho v$. Σε άλλες περιπτώσεις το f προσδιορίζεται από τις εξισώσεις του πεδίου και ένας συστηματικός τρόπος προσδιορισμού της πυκνότητας q και f γίνεται μέσω του θεωρήματος της Noether που έχετε δεί για πεδία 0-διάστασης. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να προσδιορίσουμε το νόμο διατήρησης της ενέργειας, ορμής κλπ μίας χορδής ή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Ταχύτητα ομάδας

Θεωρήστε μονοδιάστατο πεδίο $\psi(x,t)$ που εμφανίζει κορυφώσεις, όπως στο Σχήμα 1, οι οποίες έχουν δεδομένη κατεύθυνση κίνησης, έστω τη θετική. Θεωρούμε ότι ο κυματισμός του



Σχήμα 1

πεδίου είναι πολύ πυκνός ώστε να μπορούμε να ορίσουμε ως συνεχείς μεταβλητές τον αριθμό των κορυφών του πεδίου ανά cm, $k(x,t)$, και τον αριθμό των κορυφών ανά second, $\omega(x,t)$, που περνούν προς τη θετική κατεύθυνση από το σημείο x. Θεωρούμε επίσης ότι οι κορυφές παραμένουν κορυφές, ούτε διασπώνται, ούτε δημιουργούνται, ούτε εξαφανίζονται, έτσι ώστε ο αριθμός των κορυφών του πεδίου να διατηρείται.

α) Γράψτε την εξίσωση συνέχειας που συνεπάγεται η διατήρηση του αριθμού των κορυφών.

β) Το k είναι ο τοπικός κυματαριθμός, και το ω η τοπική συχνότητα του κυματισμού. Αν γνωρίζουμε ότι για το πεδίο αυτό υπάρχει σχέση $\omega(k)$ γράψτε την εξίσωση που διέπει το k.

γ) Σύμφωνα με το β) που θα βρίσκεται στον χρόνο t ένας δεδομένος κυματαριθμός k_0;

<u>Απάντηση</u>

Στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ έχουμε

$$\int_\alpha^\beta k dx \tag{8}$$

κορυφές, δεδομένου ότι $k(x,t)$ είναι η πυκνότητα των κορυφών. Ο ρυθμός μεταβολής του αριθμού των κορυφών σε αυτό το διάστημα ισούται με τη διαφορά του ρυθμού κορυφών που εισέρχονται και εξέρχονται από αυτό το διάστημα, που είναι

$$\omega(\alpha,t) - \omega(\beta,t) = -\int_\alpha^\beta \frac{\partial\omega}{\partial x} dx \ . \tag{9}$$

Άρα από τις υποθέσεις η <u>τοπική διατήρηση</u> του αριθμού των κορυφών απαιτεί την εξής ισότητα:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\alpha^\beta k dx = \int_\alpha^\beta \frac{\partial k}{\partial t} dx = -\int_\alpha^\beta \frac{\partial\omega}{\partial x} dx \, . \tag{10}$$

Εξ'αυτού συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x}\right) dx = 0 \, , \tag{11}$$

για κάθε $\alpha < \beta$. Συνεπώς πρέπει η ολοκληρωτέα ποσότητα να μηδενίζεται (χρειάζεται μόνο συνέχεια εδώ των παραγώγων) καί έτσι αποδεικνύεται ότι το k και ω ικανοποιούν τη γνωστή σχέση συνέχειας:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0\,. \tag{12}$$

Αν δε η $\omega(k)$ είναι συνάρτηση του k τότε το k εξελίσσεται χωροχρονικά σύμφωνα με την

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \omega'(k)\frac{\partial k}{\partial x} = 0 \ \ , \tag{13}$$

όπου $\omega'(k) = d\omega/dk$. Η εξίσωση αυτή εκφράζει ότι επί των σημείων του χωρόχρονου (x,t) που ικανοποιούν τη σχέση

$$x = \omega'(k)t + x_0 \ \ , \tag{14}$$

ο κυματαριθμός έχει τη σταθερή τιμή k και το σημείο x_0 είναι το σημείο στο χώρο που στον χρόνο $t = 0$ η πυκνότητα κορυφών (ο κυματάριθμος) είναι k.
Συνεπώς σταθερές τιμές του k διαδίδονται με την ταχύτητα ομάδας $\omega'(k)$.

Από τη (12) προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{(x_0,t_0)}^{(x,t)} k dx - \omega dt \tag{15}$$

είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που ενώνει το σημείο του χωρόχρονου (x_0, t_0) με το (x,t) και επομένως ορίζει μία συνάρτηση $\varphi(x,t)$ η οποία έχει ως παραγώγους τον κυματάριθμο και τη συχνότητα:

$$k = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \ \ , \ \ \omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \ \ . \tag{16}$$

Το $\varphi(x,t)$ είναι η τοπική φάση των κυμάτων. Πχ. αν $\varphi(x,t) = kx - \omega t$ έχουμε την κλασσική φάση ένος μονοχρωματικού κύματος. Επειδή τώρα

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial t}dt \tag{17}$$

η σταθερή φάση $d\varphi = 0$ διαδίδεται με ταχύτητα

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\varphi} = -\frac{\partial\varphi/\partial t}{\partial\varphi/\partial x} = \frac{\omega}{k}\,, \tag{18}$$

που είναι η γνώριμη φασική ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η φάση ενός κύματος (πχ. μία κορυφή).

Συνεπώς οι κορυφές του κυματισμου διαδίδονται με τη φασική ταχύτητα ω/k.

Διάλεξη 10- Παρασκευή, 27/3

ΦΧ θέτει δύο ερωτήματα: προσδιορίστε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\ddot{x}+\gamma\dot{x}=1/x$, $\gamma \geq 0$, με $x(0)=0$ $\dot{x}(0)=0$, επίσης διατυπώστε την ηλεκτροδυναμική σε ένα κόσμο που περιορίζεται στην επιφάνεια μίας σφαίρας.

Κατά τα άλλα: συνέχεια με το κεφάλαιο 6 του Strogatz, παραδείγματα ζωγραφικής στις 2-διαστάσεις, συντηρητικά δυναμικά συστήματα και το θεώρημα Hartman-Grobman.

Εάν με $||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x}}$ συμβολίσουμε το μέτρο διανυσμάτων (γενικότερα καταστάσεων), που αναφέρεται επίσης ως ευκλείδειο ή L_2 μέτρο, τότε μπορούμε να ορίσουμε το αντίστοιχο μέτρο ενός πίνακα Φ (ή γενικότερα ενός τελεστή) ως τη μέγιστη τιμή του $||\Phi\mathbf{x}||_2$ όταν το $\mathbf{x}$ κείται επί της μοναδιαίας σφαίρας $||\mathbf{x}||_2 = 1$. Αυτό σημαίνει ότι το $||\Phi||_2$ είναι η τετραγωνική ρίζα της μέγιστης ιδιοτιμής του θετικού πίνακα $\Phi^\dagger\Phi$.

Διάλεξη 11- Παρασκευή, 3/4

Συζήτηση ότι σε ένα ρευστό με τοιχώματα η ανάλωση ενέργειας δεν μηδενίζεται στο όριο που το ηξώδες ν τείνει στο μηδέν - δηλαδή η περιγραφή φαινομένων με τις εξισώσεις Euler δεν θα προκύψει λαμβάνοντας το όριο $\nu \to 0$ στις αντίστοιχες εξισώσεις με ιξώδες Navier-Stokes. Αξίζει να διαβάστε τα εδάφια 41-3, 41-4, 41-5 του κεφαλαίου 41 των Feynman Lectures of Physics.

Απόδειξη της πρότασης: Η μεταβολή του όγκου ενός χωρίου $\mathcal{D}$ όγκου V τα σημεία του οποίου που εξελίσσονται σύμφωνα με την $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ είναι ανά πάσα στιγμή

$$\frac{dV}{dt} = \int_{\mathcal{D}} d^n x \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} \, .$$

Επίσης αποδείξαμε ότι η συνεκτικότητα του χωρίου δεν αλλοιώνεται κατά την εξέλιξη (δεν μπορεί να κοπεί στα δύο ή να αποκτήσει τρύπες).

Επίσης αποδείξαμε τις προτάσεις: Αν $\mathbf{A}$ πίνακας και $\mathbf{I}$ μοναδιαίος πίνακας τότε

$$\det(\mathbf{I} + \varepsilon\mathbf{A}) = 1 + \varepsilon \, \mathrm{trace}(\mathbf{A}) + O(\varepsilon^2) \, ,$$

και

$$\det(e^{\mathbf{A}t}) = e^{\mathrm{trace}(\mathbf{A})t} \, .$$