ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Άσκηση 1

(i) Να προσδιορισθούν όλες οι δυνατές ομάδες G με $|G| = 8$ προσδιορίζοντας τον αντίστοιχο πίνακα πολλαπλασιασμού.

(ii) Για την ομάδα C_8 που προσδιορίσατε στο (i) να βρεθούν οι υποομάδες και οι κλάσεις συζυγίας.

(iii) Για την ίδια ομάδα (C_8) να βρεθεί ο πίνακας χαρακτήρων. Κατόπιν να προσδιοριστεί η κανονική αναπαράσταση καθώς και η αποσύνθεσή της σε ΜΙ, ΜΑ αναπαραστάσεις.

Άσκηση 2

Θεωρείστε σωμάτιο μάζας m εγκλωβισμένο στο τετραγωνικό δυναμικό:

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}] \times [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}] \\ \infty & (x,y) \notin [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}] \times [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}] \end{cases}$$

(i) Να βρείτε τις δυνατές ιδιοκαταστάσεις καθώς και τις αντίστοιχες ιδιοτιμές για το σύστημα αυτό.

(ii) Να βρεθεί η Χαμιλτονιανή ομάδα του προβλήματος.

(iii) Να βρεθούν οι διαστάσεις των μη ισοδύναμων, μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων της Χαμιλτονιανής ομάδας καθώς και ο πίνακας χαρακτήρων που τους αντιστοιχεί.

(iv) Να ταξινομηθούν οι ιδιοκταστάσεις που προσδιορίσατε στην ερώτηση (ι) ως προς την αναπαράσταση της Χαμιλτονιανής ομάδας στην οποία ανήκουν.

Άσκηση 3

Έστω G πεπερασμένη ομάδα με $|G| = n$. Θεωρείστε την αρίθμηση των στοιχείων της G: $\{g_j, j = 1, .., n\}$. Έστω $\mathcal{C}$ ο αριθμός των κλάσεων συζυγίας της G με $m = 1, .., \mathcal{C}$ δείκτη που αριθμεί τις διαφορετικές κλάσεις συζυγίας και n_m ο αριθμός στοιχείων της κλάσης m. Επίσης έστω p ο αριθμός των μη ισοδυνάμων, μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων Γ^i (διάστασης d_i) της G.

Δίνεται ο πίνακας U με στοιχεία $U_{ja} = \sqrt{\frac{d_{i_a}}{n}}(\Gamma^{i_a}(g_j))_{\mu_a,\nu_a}$ όπου ο δείκτης a αριθμεί όλες τις δυνατές τριάδες (i_a, μ_a, ν_a).

(i) Βρείτε τις διαστάσεις του πίνακα U.

(ii) Εκφράστε το θεώρημα ορθογωνιότητας για τις μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις χρησιμοποιώντας τον πίνακα U.

(iii) Δείξτε τις σχέσεις:

- $\sum_{i \leq p} d_i \, \mathrm{Tr}\big(\Gamma_i(g_j)\Gamma_i(g_k)^\dagger\big) = n\delta_{jk}$
- $\sum_{g \in m} d_i \Gamma^i(g) = n_m \chi^i_m \mathbf{1}$
- $\sum_{i \leq p} n_m \chi^i_m \left(\chi^i_{m'}\right)^* = n\delta_{mm'}$

(iv) Δείξτε ότι $p = \mathcal{C}$.

Άσκηση 4

Η ομάδα D_n περιγράφει όλες τις συμμετρίες που αφήνουν αναλλοίωτο το κανονικό πολύγωνο τάξης n.

- Βρείτε τις διαστάσεις των μη ισοδύναμων, μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων της D_5 καθώς και τον αντίστοιχο πίνακα χαρακτήρων.
- Βρείτε μία μη αναγώγιμη αναπαράσταση της D_5 με διάσταση $d = 2$.
- Βρείτε τις υποομάδες, αναλλοίωτες υποομάδες και κλάσεις συζυγίας της D_5.
- Δώστε γεωμετρική ερμηνεία των κλάσεων συζυγίας και προσδιορίστε τους υπάρχοντες ομοιομορφισμούς (ή ισομορφισμούς) της D_5 με την οικογένεια των ομάδων μετάθεσης S_n.

Άσκηση 5

(i) Να δειχθεί ότι αν η ομάδα G έχει αναλλοίωτη υποομάδα H τότε μία αναπαράσταση της ομάδας πηλίκο G/H είναι και αναπαράσταση της G.

(ii) Το CO_2 είναι ένα μόριο που προσεγγιστικά έχει μία γραμμική διάταξη. Στη θεμελιώδη του κατάσταση το άτομο C είναι στο κέντρο της απόστασης μεταξύ των 2 ατόμων O. Η αντίστοιχη ομάδα συμμετρίας V_4 αποτελείται από 4 στοιχεία: τον ταυτοτικό μετασχηματισμό (I), τον καθρεπτισμό ως προς τον άξονα κατα μήκος του μορίου, τον καθρεπτισμό ως προς άξονα κάθετο στη διεύθυνση του μορίου που περνάει από το άτομο C και τέλος την στροφή 180^o γύρω από την τομή των δύο αξόνων καθρεπτικής συμμετρίας. Θεωρείστε μία περιγραφή του συστήματος όπου οι επίπεδες ταλαντώσεις των ατόμων που απαρτίζουν το μόριο περιγράφονται από ένα διάνυσμα $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ του $\mathbb{R}^6$. Βρείτε τη δράση των στοιχείων της V_4 στα ανύσματα της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^6$ και από εκεί καθορίστε μία αναπαράσταση διάστασης $d = 6$ της ομάδας αυτής. Βρείτε την ανάλυση της αναπαράστασης αυτής σε μη ισοδύναμες, μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις. Τέλος βρείτε τον πίνακα χαρακτήρων της V_4.

Άσκηση 7

Δίνεται η Χαμιλτονιανή:

$$\mathbf{H} \; = \; \begin{pmatrix} E_1 & h_{12} & h_{13} \\ h_{12}^* & E_2 & h_{23} \\ h_{13}^* & h_{23}^* & E_3 \end{pmatrix}$$

Θεωρείστε ότι η $\mathbf{H}$ μετατίθεται με την ομάδα C_3. Προσδιορίστε τα $h_{i,j}$ έτσι ώστε η $\mathbf{H}$ να μετατίθεται με την κανονική αναπαράσταση της C_3. Κατόπιν βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις της $\mathbf{H}$ και ταξινομείστε τες ως προς τις ΜΙ, ΜΑ αναπαραστάσεις της C_3.

Άσκηση 8

Έστω

$$g = \begin{pmatrix} u & -v^* \\ v & u^* \end{pmatrix} \quad ; \quad u, v \in \mathbb{C} \quad ; \quad |u|^2 + |v|^2 = 1$$

Δείξτε ότι $g \in \mathrm{SU}(2)$.

Δίνονται επίσης τα ανύσματα βάσης: $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ του $\mathbb{C}^2$ που μετασχηματίζονται με την δισδιάστατη αναπαράσταση $\Gamma^2(g) = g$ για κάθε $g \in \mathrm{SU}(2)$.

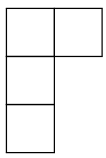
Βρείτε τα ανύσματα $\Gamma^2(g)|\uparrow\rangle$ και $\Gamma^2(g)|\downarrow\rangle$ ως γραμμικό συνδυασμό των $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$.

Θεωρείστε τώρα τον $\mathbb{C}^2 \bigotimes \mathbb{C}^2$ με βάση τα ανύσματα $|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \bigotimes |\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ και $|\downarrow\downarrow\rangle$ που μετασχηματίζονται με την $\Gamma^{2\bigotimes 2}(\mathrm{SU}(2))$.

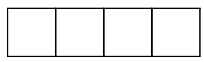
- Αναπτύξτε τα ανύσματα $\Gamma^{2\bigotimes 2}|\uparrow\uparrow\rangle$, $\Gamma^{2\bigotimes 2}|\uparrow\downarrow\rangle$ κ.λ.π. στην ανωτέρω βάση.
- Δείξτε ότι το άνυσμα $|0,0\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$ μετασχηματίζεται με την μονοδιάστατη, τετριμμένη αναπαράσταση $\Gamma^1(\mathrm{SU}(2))$ ενώ τα ανύσματα $|1,1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$, $|1,0\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$, $|1,-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$ μετασχηματίζονται με την τρισδιάστατη αναπαράσταση $\Gamma^3(\mathrm{SU}(2))$, ενώ ισχύει $\Gamma^{2\bigotimes 2} = \Gamma^1 \bigoplus \Gamma^3$.
- Βρείτε την ακριβή μορφή των πινάκων που αντιστοιχούν στις αναπαραστάσεις Γ^1 και Γ^3.

Άσκηση 9

1. Να βρεθεί σε ποια ομάδα $SU(N)$ τα Young tableaux:



και



   αντιστοιχούν σε μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις που έχουν την ίδια διάσταση. Ποια είναι η διάσταση αυτή;

2. Χρησιμοποιώντας την τεχνική των Young tableaux βρείτε για την $SU(N)$ ομάδα την αποσύνθεση της αναγώγιμης αναπαράστασης $\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}$ σε μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις. Εφαρμόστε το αποτέλεσμα που θα βρείτε στην ομάδα του προηγούμενου ερωτήματος.

Άσκηση 10

1. Χρησιμοποιώντας την τεχνική των Young tableaux δείξτε για την $SU(N)$ ομάδα ότι η αναγώγιμη αναπαράσταση $\overline{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{N}$ αναλύεται στο ευθύ άθροισμα $(\mathbf{N^2} - \mathbf{1}) \oplus \mathbf{1}$.

2. Επίσης δείξτε ότι η αναπαράσταση $\mathbf{N^2-1}$ είναι αυτοσυζυγής:

$$\overline{\mathbf{N^2-1}} = \mathbf{N^2-1}$$

3. Χρησιμοποιώντας τα Young tableaux δείξτε ότι η αναγώγιμη αναπαράσταση $\mathbf{8}\otimes\mathbf{8}$ της ομάδας $SU(3)$ αναλύεται στο ευθύ άθροισμα:

$$\mathbf{27}\oplus\mathbf{10}\oplus\overline{\mathbf{10}}\oplus\mathbf{8}\oplus\mathbf{8}\oplus\mathbf{1}.$$