7. Βασικά Θεωρήματα των αναπαραστάσεων πεπερασμένων ομάδων.

Θεώρημα 1. Κάθε αναπαράσταση είναι ισοδύναμη με μοναδιακή αναπαράσταση.

- Έστω $\{A_1, \dots, A_{|G|}\}$ αναπαράσταση της G με $d\times d$ πίνακες.
- Ορίζουμε $\quad \mathbb{H} = \sum_{a=1}^{|G|} A_a A_a^{+}$.

Επειδή ο $\mathbb{H}$ είναι ερμιτιανός θα διαγωνιοποιείται μέσω μοναδιακού πίνακα $U_{\mathbb{H}}$:

$$\mathbb{H}_D = U_{\mathbb{H}} \Big(\sum_{a=1}^{|G|} A_a A_a^{+} \Big) \underbrace{U_{\mathbb{H}}^{+}}_{=U_{\mathbb{H}}^{-1}}$$

- $$\mathbb{H}_D = \sum_{a=1}^{|G|} U_{\mathbb{H}} A_a \underbrace{U_{\mathbb{H}}^{+} U_{\mathbb{H}}}_{= \mathbb{I}} A_a^{+} U_{\mathbb{H}}^{+} \Rightarrow$$

$$\mathbb{H}_D = \sum_{a=1}^{|G|} \tilde{A}_a \tilde{A}_a^{+} , \qquad \tilde{A}_a = U_{\mathbb{H}} A_a U_{\mathbb{H}} .$$

Οι πίνακες $\tilde{A}_a$ αποτελούν αναπαράσταση της G ισοδύναμη με αυτή των A_a.

- Τα στοιχεία του διαγώνιου πίνακα είναι μη αρνητικά

$$\mathbb{H}_{D\,ii} = \sum_{a=1}^{|G|} \sum_{k=1}^{d} (\tilde{A}_a)_{ik} (\tilde{A}^{+})_{ki} = \sum_{a=1}^{|G|} \sum_{k=1}^{d} (\tilde{A}_a)_{ik} (\tilde{A}_a)^{*}_{ik}$$

$$= \sum_{a=1}^{|G|} \sum_{k=1}^{d} |(\tilde{A}_a)_{ik}|^2 \geq 0 \longrightarrow \text{για αντιστρέψιμους πίνακες}$$

Πράγματι εάν ένα $\mathbb{H}_{D_{ii}}$ είναι μηδέν $\Rightarrow$ $(\tilde{A}_g)_{ik} = 0$, $k=1,\dots,d$
$\Rightarrow$ οι πίνακες $\tilde{A}_g$ έχουν μία μηδενική γραμμή $\Rightarrow$ δεν έχουν αντίστροφο.

- Εφ' όσον $\mathbb{H}_{D_{ij}} = D_{ii}\delta_{ij}$ με $D_{ii} > 0$
ορίζεται ο:

$$\mathbb{D}^{1/2}_{ij} = \sqrt{D_{ii}}\,\delta_{ij}$$

με αντίστροφο τον $\mathbb{D}^{-1/2}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{D_{ii}}}\delta_{ij}$

- Ο πίνακες $\mathbb{B}_g = \mathbb{D}^{-1/2}\tilde{A}_g\mathbb{D}^{1/2}$

αποτελούν αναπαράσταση της G ισοδύναμη με την αρχική.

$$\mathbb{B}_g\mathbb{B}_g^{\dagger} = \mathbb{D}^{-1/2}\tilde{A}_g\underbrace{\mathbb{D}^{1/2}\mathbb{D}^{1/2}}\tilde{A}_g^{\dagger}\mathbb{D}^{-1/2} =$$

$$\mathbb{D} = \sum_k \tilde{A}_k\tilde{A}_k^{\dagger}$$

$$\sum_k \mathbb{D}^{-1/2}\underbrace{\tilde{A}_g\tilde{A}_k\tilde{A}_k^{\dagger}\tilde{A}_g^{\dagger}}\mathbb{D}^{-1/2} = \sum_{k'}\mathbb{D}^{-1/2}\tilde{A}_{k'}\tilde{A}_{k'}^{\dagger}\mathbb{D}^{-1/2}$$

Θεώρημα αναδιάταξης

$$= \mathbb{D}^{-1/2}\mathbb{D}\,\mathbb{D}^{-1/2} = \mathbb{I}.$$

Επομένως οι πίνακες $\{\mathbb{B}_1,\dots,\mathbb{B}_{|G|}\}$ αποτελούν αναπαράσταση της G, ισοδύναμη της $\{A_1,\dots,A_{|G|}\}$, η οποία είναι μοναδιακή.

Θεώρημα 2. Κάθε μοναδιακή αναπαράσταση η οποία είναι αναγώγιμη, είναι και πλήρως αναγώγιμη.

- Έστω $\{A\ ,\ =1,\dots,|G|\}$ μοναδιακή αναπαράσταση διάστασης d και
$\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_m,\vec{e}_{m+1},\dots,\vec{e}_d$ ορθοκανονική βάση στον χώρο
τον οποίο δρα η αναπαράσταση με τα

$\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_m$ να παράγουν αναλλοίωτο υπόχωρο δηλαδή:

$$\vec{e}_i\,' = \sum_{j=1}^{d}(A_a)_{ji}\,\vec{e}_j \quad \text{με} \quad (A_a)_{ji}=0 \quad \text{για}$$

$$j\geq m+1,\quad \forall\, a=1,\dots,|G|.$$
$$(i\leq 1,\dots,m)$$

- Θεωρούμε τα

$$\vec{e}_i\,' = \sum_{j=1}^{d}(A_a)_{ji}\,\vec{e}_j \quad \text{για} \quad i\geq m+1.$$

- Επειδή οι πίνακες A_a είναι μοναδιακοί η ορθοκανονική βάση απεικονίζεται σε ορθοκανονική βάση:

$$(e_j,e_k)=\delta_{jk} \Rightarrow (e_j',e_k')=\delta_{jk}.$$

- $$\vec{e}_i\,' = \sum_{j=1}^{m}(A_a)_{ji}\,\vec{e}_j + \sum_{j=m+1}^{d}(A_a)_{ji}\,\vec{e}_j$$

Εφ' όσον ο υπόχωρος $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_m$ είναι αναλλοίωτος και τα $\vec{e}_1\,',\dots,\vec{e}_m\,'$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_m$, θα ισχύει και το αντίστροφο. Τα $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_m$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί μόνο των $\vec{e}_1\,',\dots,\vec{e}_m\,'$ $\Rightarrow$ $(\vec{e}_k,\vec{e}_i\,')=0,\ k\leq m,\ i\geq m+1$

Επομένως:

$$(\vec{e}_k, \vec{e}_i') = 0 = (A_2)_{ki} \quad , \quad k \le m, \; i \ge m+1 .$$

Άρα για όλους τους πίνακες (A_2) έχουμε:

$$(A_2)_{ij} = 0 \quad \text{για} \quad i \le m, \; j \ge m+1$$

και

$$(A_2)_{ij} = 0 \quad \text{για} \quad i \ge m+1, \; j \le m$$

έχουν δηλαδή οι πίνακες την μορφή:

ij με $i \le m$, $j \ge m+1$

$$\begin{array}{c} m\times m \\ \begin{bmatrix} A_2^1 & 0 \\ & \\ 0 & A_2^2 \end{bmatrix} \\ (d-m)\times(d-m) \end{array}$$

ij με $i \ge m+1$, $j \le m$

(Για την απόδειξη έχει χρησιμοποιηθεί η ύπαρξη θετικά ορισμένου (ευκλείδειου ή ερμιτιανού) εσωτερικού γινομένου.)

Θεώρημα 3. (Πρώτο λήμμα του Schur).

Πίνακας ο οποίος μετατίθεται με όλους τους πίνακες μιας μη αναγώγιμης αναπαράστασης, είναι πολλαπλάσιος του ταυτοτικού.

$A(g)$ μη αναγώγιμη αναπαράσταση της G διάστασης d και

$$A(g)M = MA(g) \; ; \quad \forall g \in G \quad \Rightarrow$$

$$M = c\mathbb{I} \quad \text{με } c \in \mathbb{C} \text{ και } \mathbb{I} \text{ ο } d\times d \text{ μοναδιαίος πίνακας.}$$

- Οι $A(g)$ θεωρούνται μοναδιακοί (από το Θ1).

- $MA(g) = A(g)M \Rightarrow A^\dagger(g)M^\dagger = M^\dagger A^\dagger(g)$

$$\Rightarrow A^{-1}(g)M^\dagger = M^\dagger A^{-1}(g) \Rightarrow A(g)M^\dagger = M^\dagger A(g) \quad (\Theta.A.)$$

$$\Rightarrow MA(g) = A(g)M \quad \text{και} \quad M^\dagger A(g) = A(g)M^\dagger.$$

$\Rightarrow$ οι ερμιτιανοί $H_+ = \frac{1}{2}(M + M^\dagger)$, $H_- = -\frac{i}{2}(M - M^\dagger)$ μετατίθενται με τους $A(g)$.

- Οι ερμιτιανοί πίνακες διαγωνιοποιούνται με μοναδιακό μετασχηματισμό

$$U_\pm H_\pm U^\dagger = H_{D\pm} \quad \text{και}$$

$$H_\pm A(g) = A(g) H_\pm \Rightarrow H_{D\pm} \tilde{A}_\pm(g) = \tilde{A}_\pm(g) H_{D\pm}$$

όπου $\tilde{A}_\pm(g) = U_\pm A(g) U_\pm^\dagger$.

μοναδιακή αναπαράσταση ισοδύναμη της $A(g)$

• Επομένως:

$$\left(\mathbb{H}_{D\pm}\tilde{A}_{\pm}(g)\right)_{ij} = \left(\tilde{A}(g)\mathbb{H}_{D\pm}\right)_{ij} \Rightarrow$$

$$\sum_k (\mathbb{H}_{D\pm})_{ik}(\tilde{A}_{\pm}(g))_{kj} = \sum_k (\tilde{A}(g))_{ik}(\mathbb{H}_{D\pm})_{kj} \Rightarrow$$

$$\lambda_{\pm ii}\tilde{A}_{\pm}(g)_{ij} = \lambda_{\pm jj}\tilde{A}(g)_{ij} \Rightarrow$$

όπου $\lambda_{\pm ii}$ τα διαγώνια στοιχεία των $\mathbb{H}_{D\pm}$

$$\Rightarrow \left(\lambda_{\pm ii} \neq \lambda_{\pm jj} \Rightarrow \tilde{A}_{\pm}(g)_{ij} = 0\right)$$

δηλαδή το στοιχείο της τομής της i γραμμής με την j στήλη μηδενίζεται, όπως προφανώς και το στοιχείο της τομής της j γραμμής με την i στήλη

$$\forall g, \qquad A_{\pm}(g)_{ij} = A_{\pm}(g)_{ji} = 0 \quad \text{εάν } \lambda_{\pm i} \neq \lambda_{\pm j} \Longrightarrow$$

η αναπαράσταση είναι αναγώγιμη, άτοπο $\Rightarrow$

$$\lambda_{i\pm} = \lambda_{\pm}, \quad i = 1, \dots, d$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbb{H}_{\pm} = \lambda_{\pm}\mathbb{I} \Rightarrow \mathbb{M} = (\lambda_{+} + i\lambda_{-})\mathbb{I}.$$

Θα7.

Παράδειγμα.

Έστω $d=3$ και $\mathbb{H}_{D_t} = \begin{pmatrix} \lambda_{1t} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2t} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3t} \end{pmatrix}$

Εάν $\lambda_{t1} \neq \lambda_{t2} \Rightarrow A_t(g) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\lambda_{t3} = ?$, έστω ότι $\lambda_{t3} = \lambda_{t1} \neq \lambda_{t2} \Rightarrow$

$$A_t(g) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

και αναδιατάσσοντας τις γραμμές $2 \leftrightarrow 3$

$$A_t(g) \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & 0 \\ a_{31} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

πλήρως αναγώγιμη αναπαράσταση.

Προφανώς εάν και οι τρεις ιδιοτιμές είναι διαφορετικές:

$$A_t(g) \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{ομοίως.}$$

Θεώρημα 4. (Δεύτερο λήμμα του Schur).

Έστω $A(g)$, $B(g)$ μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις, με πίνακες $d_A \times d_A$ και $d_B \times d_B$ αντίστοιχα, ομάδας $\mathcal{G}$. Επίσης έστω πίνακας $d_A \times d_B$, M:

$$A(g)M = MB(g), \quad \forall g \in \mathcal{G}.$$

Τότε:

- Εάν $d_A \neq d_B \Rightarrow M = 0$.
- Εάν $d_A = d_B \Rightarrow$ (είτε $M=0$ είτε $A(g) \cong B(g)$).

- Θεωρούμε τις αναπαραστάσεις μοναδιακές.

μοναδιακοί πίνακες

$$A(g)M = MB(g) \Rightarrow M^{+}A^{+}(g) = B^{+}(g)M^{+} \Rightarrow M^{+}A^{-1}(g) = B^{-1}(g)M^{+} \Rightarrow$$

$$M^{+}A(g) = B(g)M^{+} \qquad \Rightarrow MM^{+}A(g) = MB(g)M^{+}$$
$$= A(g)MM^{+} \Rightarrow$$

οι αντίστροφοι πίνακες είναι οι πίνακες των αντιστρόφων στοιχείων που πάλι είναι όλα τα στοιχεία της ομάδας

$$MM^{+}A(g) = A(g)MM^{+}, \ \forall g \in \mathcal{G}.$$

Επομένως, από το πρώτο λήμμα του Schur έχουμε ότι: $MM^{+} = c\mathbb{I}$ με $c \in \mathbb{C}$.

- $d_A = d_B$.

– $c = 0 \Rightarrow (MM^{+})_{ii} = 0 \Rightarrow \sum_k M_{ik}M^{+}_{ki} = \sum_k |M_{ik}|^2 = 0$

$$\Rightarrow M = 0.$$

– $c \neq 0 \Rightarrow \det M \neq 0 \Rightarrow$ ο M είναι αντιστρέψιμος $\Rightarrow$

οι αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες: $A(g) = MB(g)M^{-1}, \ \forall g \in \mathcal{G}.$

• $d_A \neq d_B$:

Έστω ότι $d_A < d_B$. Ορίζουμε έναν $d_B \times d_B$ πίνακα συμπληρώνοντας τις γραμμές που λείπουν με μηδενικά:

$$N = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{με} \quad N^\dagger = [M^\dagger \ 0].$$

Για τους δύο πίνακες N, M ισχύει ότι

$$N^\dagger N = M^\dagger M \Rightarrow$$

$$\det N^\dagger N = (\det N^\dagger)(\det N) = 0 \Rightarrow \det M^\dagger M$$

$$\Rightarrow |c|^2 = 0 \Rightarrow c = 0.$$

Παρατηρήσεις.

- Εάν $A(g)$ αναπαράσταση και $\mathbb{B}A(g)\mathbb{B}^{-1} = \tilde{A}(g)$ οι αντίστοιχοι μοναδιακοί πίνακες, τότε

$$MA(g) = A(g)M \Rightarrow \mathbb{B}M\mathbb{B}^{-1}\mathbb{B}A(g)\mathbb{B}^{-1} = \mathbb{B}A(g)\mathbb{B}^{-1}\mathbb{B}M\mathbb{B}^{-1}$$

$$\Rightarrow \tilde{M}\tilde{A}(g) = \tilde{A}(g)\tilde{M}.$$

- Το πρώτο λήμμα του Schur δείχνει ότι εάν υπάρχει πίνακας μη σταθερός ο οποίος μετατίθεται με τους πίνακες της αναπαράσταση, αυτή είναι αναγώγιμη. Επί πλέον δείχνει και πως έρχεται η αναπαράσταση στην ανηγμένη μορφή. Απλά με τον μετασχηματισμό φυσικώς ο οποίος διαγωνιοποιεί τον "πίνακα ο οποίος μετατίθεται".

- Κάθε αναγώγιμη αναπαράσταση έχει μη σταθερούς πίνακες οι οποίοι μετατίθενται με όλους τους πίνακες αυτής. Π.χ. εάν φέρουμε τους πίνακες στην μορφή

$$\begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & B(g) \end{pmatrix} \text{ τότε όλα τα } M = \begin{pmatrix} \alpha\mathbb{I} & 0 \\ 0 & \beta\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

ικανοποιούν την συνθήκη.

- Έστω $M = (\alpha, \beta)$ 1×2 πίνακας

$M^{+} = \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix}$ 2×1 πίνακας

$$M^{+}M = \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix}(\alpha\ \beta) = \begin{pmatrix} \alpha^*\alpha & \alpha^*\beta \\ \beta^*\alpha & \beta^*\beta \end{pmatrix} \text{ και } \det MM = 0.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha^* & 0 \\ \beta^* & 0 \end{pmatrix}}_{N^{+}}\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha^* & \alpha^*\beta \\ \beta^*\alpha & \beta^*\beta \end{pmatrix}.$$

- Οι ανάγωγες αναπαραστάσεις των αβελιανών ομάδων είναι μονοδιάστατες.

Έστω $A(g_1), \ldots, A(g_{|g|})$ $d\times d$ πίνακες αβελιανής ομάδας.

$$A(g_1)A(g_i) = A(g_1 g_i) = A(g_i g_1) = A(g_i)A(g_1), \ \forall g_i \in G.$$

Δηλαδή ο $A(g_1)$ μετατίθεται με όλους τους πίνακες της ομάδας.

Άρα: $A(g_1) = \lambda_1 \hat{\mathbb{I}}$. (Εάν η αναπαράσταση είναι ανάγωγη)

Ανάλογα $\forall g_i \in G$: $A(g_i) = \lambda_i \hat{\mathbb{I}}$ $\Rightarrow$

$\boxed{\text{αναπαράσταση ανάγωγη, άτοπο εκτός εάν } d=1.}$

Θεώρημα 5.

Εάν $A_1, \ldots, A_{|G|}$ και $B_1, \ldots, B_{|G|}$ μοναδιακές ισοδύναμες αναπαραστάσεις δηλαδή

υπάρχει M : $MA_kM^{-1} = B_k$ $(k=1,\ldots,|G|)$,

τότε

υπάρχει μοναδιακός πίνακας U :

$$UA_kU^{-1} = B_k \qquad (k=1,\ldots,|G|).$$

- Για την απόδειξη αρκεί να βρούμε πίνακα K ο οποίος μετατίθεται με όλους τους B_k και τέτοιον ώστε

  με $U = KM$ να είναι μοναδιακός.

Τότε $B_k = KB_kK^{-1} = KMA_kM^{-1}K^{-1}$

$= UA_kU^{-1}$.

- $MA_k = B_kM \Rightarrow$ $B_kMM^{\dagger} = MM^{\dagger}B_k$ (βλ. Θεώρημα 4)

- Μετασχηματισμός ομοιότητας με τον $MM^{\dagger}$ δεν αλλάζει την δεύτερη αναπαράσταση.

- $MM^{\dagger}$ ερμιτιανός $\Rightarrow$ $H_D = V^{-1}MM^{\dagger}V$ και $MM^{\dagger} = VH_DV^{-1}$

Επειδή τα στοιχεία του H_D είναι θετικά $\Rightarrow$
ορίζεται ο $H_D^{-1/2}$ ο οποίος είναι επίσης διαγώνιος με θετικά, πραγματικά στοιχεία. *

• Παίρνουμε έτσι:

$$\mathbb{K} = \mathbb{V}\,\mathbb{H}_D^{-1/2}\,\mathbb{V}^{-1}.$$

Πράγματι:

$$\mathbb{B}_k \mathbb{V}\mathbb{H}_D\mathbb{V}^{-1} = \mathbb{V}\mathbb{H}_D\mathbb{V}^{-1}\mathbb{B}_k \Rightarrow$$

$$\mathbb{V}^{-1}\mathbb{B}_k\mathbb{V}\mathbb{H}_D = \mathbb{H}_D\mathbb{V}^{-1}\mathbb{B}_k\mathbb{V} \Rightarrow$$ ο διαγώνιος $\mathbb{H}_D$ μετατίθεται με όλους τους $\mathbb{V}^{-1}\mathbb{B}_k\mathbb{V}$ $\Rightarrow$

τα στοιχεία των $\mathbb{V}^{-1}\mathbb{B}_k\mathbb{V}$ μηδενίζονται στις τομές των γραμμών και στηλών όπου τα στοιχεία του $\mathbb{H}_D$ είναι διαφορετικά. Τότε όμως και τα στοιχεία του $\mathbb{H}_D^{-1/2}$ θα είναι διαφορετικά οπότε:

$$\mathbb{V}^{-1}\mathbb{B}_k\mathbb{V}\mathbb{H}_D^{-1/2} = \mathbb{H}_D^{-1/2}\mathbb{V}^{-1}\mathbb{B}_k\mathbb{V} \Rightarrow$$

$$\mathbb{B}_k\mathbb{K} = \mathbb{K}\mathbb{B}_k$$

Και:

μοναδιακός

$$UU^\dagger = \mathbb{K}MM^\dagger\mathbb{K}^\dagger = \mathbb{V}\mathbb{H}_D^{-1/2}\mathbb{V}^\dagger MM^\dagger\mathbb{V}\mathbb{H}_D^{-1/2}\mathbb{V}^\dagger$$

θετικά στοιχεία

$$= \mathbb{V}\,\mathbb{H}_D^{-1/2}\,\mathbb{H}_D\,\mathbb{H}_D^{-1/2}\,\mathbb{V}^\dagger$$

$$= \mathbb{V}\mathbb{V}^\dagger = \mathbb{I}.$$

* Θέλουμε ο $\mathbb{K}M$ να είναι μοναδιακός $\Rightarrow$

$$M^\dagger\mathbb{K}^\dagger\mathbb{K}M = \mathbb{I} \Rightarrow \mathbb{K}^\dagger\mathbb{K} = (M^\dagger)^{-1}M^{-1} = (MM^\dagger)^{-1}.$$

Αυτό μας υποδεικνύει ότι χρειαζόμαστε την $(-1/2)$ δύναμη του $MM^\dagger$.

Παρατήρηση.

Το θεώρημα υποδηλώνει ότι μπορούμε να περιοριζόμαστε σε μετασχηματισμούς ομοιότητας με μοναδιακούς πίνακες.

Εάν η αναπαράσταση είναι μη αναγώγιμη

$$B_k M M^{+} = M M^{+} B_k \Rightarrow$$

$$M M^{+} = c\,\mathbb{I} \qquad (1^{o} \text{ λήμμα Schur})$$

άρα ο M είναι (εκτός από μια σταθερά) αναγκαστικά μοναδιακός.

Θεώρημα 5. (Μεγάλης Ορθογωνιότητας).

Έστω $A(g)$, $B(g)$ δύο μη ισοδύναμες, μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις ομάδας G, διαστάσεων d_A, d_B αντίστοιχα.
Τότε ισχύουν τα εξής:

$$\sum_{a=1}^{|G|} \left[A(g_a)_{ii'} \, B^*(g_a)_{jj'} \right] = 0 \qquad (1)$$

και

$$\sum_{a=1}^{|G|} \left[A(g_a)_{ii'} \, A^*(g_a)_{jj'} \right] = \frac{|G|}{d_A} \delta_{ij} \delta_{i'j'} \qquad (2)$$

- Για τυχαίο πίνακα X $(d_A \times d_B)$ ορίζουμε τον $d_A \times d_B$ πίνακα M:

$$M = \sum_{a=1}^{|G|} A(g_a) X B(g_a)^{-1} .$$

- Για κάθε $g_b \in G$ έχουμε:

$$A(g_b) M B(g_b)^{-1} = A(g_b) \left\{ \sum_{a=1}^{|G|} A(g_a) X B(g_a)^{-1} \right\} B(g_b)^{-1}$$

$$= \sum_{a=1}^{|G|} A(g_b) A(g_a) X \underbrace{B(g_a)^{-1} B(g_b)^{-1}}_{(B(g_b) B(g_a))^{-1}}$$

$$= (\text{θεώρημα αναδιάταξης}) \sum_{c=1}^{|G|} A(g_c) X B(g_c)^{-1} = M$$

Δηλαδή:

$$A(g_b) M B(g_b)^{-1} = M \Rightarrow A(g_b) M = M B(g_b)$$

Ο πίνακας M ικανοποιεί τις συνθήκες του δεύτερου λήμματος Schur.

- Δηλαδή εφ' όσον A, B μη ισοδύναμες $\Rightarrow$

$$M = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{a=1}^{|g|} \sum_{i''=1}^{d_A} \sum_{j''=1}^{d_B} (A(g_a))_{ii''} X_{i''j''} (B(g_a)^{-1})_{j''j} = 0$$

Επιλέγοντας τον X : $X_{i''j''} = \delta_{i i''} \delta_{j' j''}$ παίρνουμε

$$\sum_{a=1}^{|g|} (A(g_a))_{ii'} (B(g_a^{-1}))_{j'j} = 0$$

και επιλέγοντας τους πίνακες μοναδιακούς:

$$\sum_{a=1}^{|g|} (A(g_a))_{ii'} (B^*(g_a))_{jj'} = 0 . \quad (1).$$

- Για την (2) θέτοντας $B = A$ από το πρώτο λήμμα του Schur έχουμε:

$$M = c\,\mathbb{I} , \quad c \in \mathbb{C}$$

δηλαδή

$$\sum_{a=1}^{|g|} (A(g_a))_{ii'} (A(g_a)^{-1})_{j'j} = c_{i'j'} \delta_{ij}$$

όπου τα $c_{i'j'}$ εξαρτώνται από τον X. $(X_{i''j''} = \delta_{i'i''} \delta_{j'j''})$.

- Θέτοντας $i=j$ και αθροίζοντας $(1, \dots, d_A)$: $\sum_a^{|g|} (A(g_a))_{ii'} (A(g_a)^{-1})_{j'i} = d_A c_{i'j'}$

$$\Rightarrow \sum_a^{|g|} (A(g_a)^{-1})_{j'i} (A(g_a))_{ii'} = d_A c_{i'j'} \Rightarrow \sum_a^{|g|} \mathbb{I}_{j'i'} = d_A c_{i'j'} \Rightarrow$$

$$c_{i'j'} = \frac{|g|}{d_A} \delta_{i'j'}$$

Επομένως καταλήγουμε στην

$$\sum_{a=1}^{|g|} \left(A(g_a)\right)_{ii'} \left(A(g_a)^{-1}\right)_{j'j} = \frac{|g|}{d_A}\, \delta_{ij'}\delta_{i'j}$$

και για μοναδιακές αναπαραστάσεις:

$$\sum_{a=1}^{|g|} \left(A(g_a)\right)_{ii'} \left(A^*(g_a)\right)_{jj'} = \frac{|g|}{d_A}\, \delta_{ij}\delta_{i'j'}. \qquad (2).$$

Ισοδύναμα διατηρώντας τον πίνακα X:

$$c\mathbb{I} = M = \sum_{a=1}^{|g|} A(g_a)\, X\, A(g_a)^{-1} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Tr}\, M = c\, d_A = |g|\, \mathrm{Tr}\, X \Rightarrow$$

$$c = \frac{|g|}{d_A}\, \mathrm{Tr}\, X$$

και $$\sum_{a=1}^{|g|}\sum_{i'=1}^{d_A}\sum_{j'=1}^{d_A} \left(A(g_a)\right)_{ii'} \left(A(g_a)^{-1}\right)_{j'j} X_{i'j'} = \overbrace{\frac{|g|}{d_A} \underbrace{\sum_{i'=1}^{d_A}\sum_{j'=1}^{d_A} (X)_{i'j'}}_{\mathrm{Tr}X}}^{c}\, \delta_{ij}$$

και λόγω του αυθαίρετου του X καταλήγουμε στο αποτέλεσμα.

- Εάν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό:

$$A(g_a) \longrightarrow \mathbb{D}(g_a)^{(k)}$$

όπου $k = 1,2,\ldots,k_{max}$ με k_{max} το πλήθος των μη ισοδύναμων μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων, γράφουμε:

$$\sum_{a=1}^{|g|} \left(\mathbb{D}(g_a)\right)^{(k)}_{ii'} \left(\mathbb{D}^*(g_a)\right)^{(k')}_{jj'} = \frac{|g|}{d_k} \delta_{kk'} \delta_{ij} \delta_{jj'} .$$

- Το άθροισμα $\sum_{a=1}^{|g|} c_a c_a^{*\prime}$ είναι ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο σε $|g|$-διάστατο χώρο (μιγαδικό).

- Κάθε μη αναγώγιμη αναπαράσταση διάστασης d δίνει d^2 ορθογώνια μεταξύ τους διανύσματα.

- Εάν $D^{(1)}, \ldots, D^{(s)}$ είναι όλες οι διαφορετικές (μη ισοδύναμες) μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις διαστάσεων $d_1,\ldots,d_s$ αντίστοιχα έχουμε

$$d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_s^2$$

ορθογώνια μεταξύ τους (δηλαδή και ανεξάρτητα) διανύσματα σε $|g|$-διάστατο χώρο. Επομένως:

$$d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_s^2 \leq |g| .$$

- Τα $\sqrt{\frac{d_k}{|g|}}\, \mathbb{D}(g_a)^{(k)}_{ii'}$ είναι ορθοκανονικό σύστημα.

Παράδειγμα.

Αναπαραστάσεις της S_3.

$S_3 = \{e, a, b, c, d, f\}$.

$$D^{(1)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{(1)}(a) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D^{(1)}(b) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D^{(1)}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D^{(1)}(d) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D^{(1)}(f) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(μετασχηματισμοί ισοπλεύρου τριγώνου στο επίπεδο με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων και μία κορυφή στον άξονα x).

$D^{(2)}(e) = \cdots = D^{(2)}(f) = 1$.

$D^{(3)}(e) = D^{(3)}(a) = D^{(3)}(b) = 1, \quad D^{(3)}(c) = D^{(3)}(d) = D^{(3)}(f) = -1$.

$\vec{v}_{11}^{(1)} = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \|\vec{v}_{11}^{(1)}\|^2 = 3 = \frac{6}{2}$,

$\vec{v}_{12}^{(1)} = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\vec{v}_{21}^{(1)} = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\vec{v}_{22}^{(1)} = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

$\vec{v}_{1}^{(2)} = (1, 1, 1, 1, 1, 1), \quad \|\vec{v}_{1}^{(2)}\|^2 = 6 = \frac{6}{1}$,

$\vec{v}_{1}^{(3)} = (1, 1, 1, -1, -1, -1)$.

$$2^2 + 1 + 1 = 6 = |S_3| \rightarrow$$

η S_3 έχει μόνον τρεις μη ισοδύναμες μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις (μία διδιάστατη και δύο μονοδιάστατες).