6. Αναπαραστάσεις (πεπερασμένων) ομάδων.

Καλούμε αναπαράσταση μίας ομάδας G, έναν ομοιομορφισμό D από την ομάδα G σε μία ομάδα μετασχηματισμών:

$$D : G \to D(G) \,, \qquad g_1 \circ g_2 \mapsto D(g_1) D(g_2) \,.$$

Θα ασχοληθούμε με γραμμικές αναπαραστάσεις δηλαδή με απεικονίσεις της ομάδας σε γραμμικούς τελεστές που δρούν σε διανυσματικούς χώρους.

* Εάν έχω $D(g)$: $D(g_1 \circ g_2) = \underbrace{D(g_1)\, D(g_2)}_{\text{σύνθεση μετασχηματισμών}}$ οι $D(g)$ έχουν δομή ομάδας;

$D(e \circ g) = D(e) D(g) = D(g) \implies D(e) = I$?

Εάν ισχύει αυτό τότε

$D(g \circ g^{-1}) = D(g) D(g^{-1}) = D(e) = I \Rightarrow \quad D(g^{-1}) = D^{-1}(g)$.

Άρα εάν $D(e) = I$ οι εικόνες των στοιχείων της ομάδας συγκροτούν ομάδα.

(ii). Αναπαράσταση με τελεστές που δρουν σε πεπερασμένης διάστασης διανυσματικούς χώρους.

Έστω $\mathbb{V}$ διανυσματικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

$$G \ni g \longmapsto \hat{S}_g \in GL(n, \mathbb{R}(\mathbb{C}))$$

Εάν έχουμε μία βάση του $\mathbb{V}$ τότε $\hat{S}_g$ είναι $n \times n$ πίνακας με πραγματικά (μιγαδικά) στοιχεία:

$$\hat{S}_g \longmapsto D(g) \quad \text{με στοιχεία } D_{ij}(g), \quad i,j=1,\dots,n.$$

$$g_2 \circ g_1 \mapsto \left(D(g_2) D(g_1)\right)_{ij} = \sum_k D_{ik}(g_2) D_{kj}(g_1).$$

Σημείωση.

Εάν $\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e}_i$

$$\hat{S}\vec{x} = \sum_i x_i \hat{S}\vec{e}_i = \sum_i x_i \sum_j S_{ji} \vec{e}_j$$

$$= \sum_j \left(\sum_i S_{ji} x_i \right) \vec{e}_j = \sum_j x'_j \vec{e}_j$$

Δηλαδή: $\vec{e}\,'_i = \sum_j S_{ji} \vec{e}_j$: μετασχηματισμός των διανυσμάτων βάσης.

$x'_j = \sum_i S_{ji} x_i$: συνιστώσες του μετασχηματισμένου διανύσματος στην παλαιά βάση.

$$\vec{x}\,' = \sum_i x_i \vec{e}\,'_i = \sum_i x'_i \vec{e}_i$$

Εάν $D: \ G \cong D(G)$ τότε η αναπαράσταση καλείται πιστή.

Εάν $Ker(D) \neq e \Rightarrow Ker(D)$ κανονική υποομάδα και:

$$D: \ G/_{Ker(D)} \cong D(G).$$

Η διάσταση του διανυσματικού χώρου καλείται διάσταση της αναπαράστασης.

Δύο αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες εάν υπάρχει πίνακας A:

$$D'(g) = A D(g) A^{-1} \quad , \ \forall g \in G.$$

Προφανώς για ισοδύναμα οι δύο αναπαραστάσεις D, D' θα έχουν την ίδια διάσταση.

Ουσιαστικά είναι η ίδια αναπαράσταση εκπεφρασμένη σε δύο διαφορετικές βάσεις.

Εαν $\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e}_i = \sum_i x_i \sum_j A^{-1}_{ji} \vec{e}\,'_j = \sum_j y_j \vec{e}\,'_j$ με $y_j = \sum_i A^{-1}_{ji} x_i$.

$$y'_i = \sum_j D'(g)_{ij} y_j \Rightarrow \sum_k (A^{-1})_{ik} x'_k = \sum_{j,l} D'(g)_{ij} (A^{-1})_{jl} x_l$$

$$\Rightarrow x'_k = \sum_{i,j} \left(A_{ki} D'(g)_{ij} (A^{-1})_{jl} \right) x_l = \sum_l D_{kl}(g) x_l$$

$$\Rightarrow D(g) = A^{-1} D'(g) A$$

ή $D'(g) = A D(g) A^{-1}$. *

* 1. **Αλλαγή βάσης.** (Αναλυτικά).

$$\left.\begin{array}{l}\vec{x}=\sum_i x_i\vec{e}_i=\sum_j y_j\vec{n}_j\\ \vec{n}_j=\sum_i A_{ij}\vec{e}_i\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{x}=\sum_{j,i} y_j A_{ij}\vec{e}_i=\sum_i\Big(\sum_j A_{ij}y_j\Big)\vec{e}_i$$

Δηλαδή :

$$x_i=\sum_j A_{ij}y_j$$

$$y_k=\sum_\ell (A^{-1})_{k\ell}x_\ell$$

$$\hat{S}_g\vec{x}=\sum_i x_i\hat{S}_g\vec{e}_i=\sum_j y_j\hat{S}_g\vec{n}_j$$

$$=\sum_{i,k} x_i D_{ki}(g)\vec{e}_k=\sum_{j,\ell} y_j D'_{\ell j}(g)\vec{n}_\ell$$

Επομένως:

$$\hat{S}_g\longmapsto D(g)\quad \text{στην βάση } \{\vec{e}\}$$
$$\longmapsto D'(g)\quad -//-\quad \{\vec{n}\}$$

με: $x'_k=\sum_i D_{ki}(g)x_i$

και $y'_\ell=\sum_j D'_{\ell j}(g)y_j$ $\Bigg\}\Rightarrow$

$$\sum_r A_{kr}y'_r=\sum_i D_{ki}(g)\sum_s A_{is}y_s\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad y'_r=\sum_{i,k,s}(A^{-1})_{rk}D_{ki}(g)A_{is}y_s$$

$$=\sum_s D'_{rs}(g)y_s\quad\Rightarrow$$

$$D'(g)=A^{-1}D(g)A$$

- Μια αναπαράσταση καλείται αναγώγιμη εάν η δράση των μετασχηματισμών αφήνει αναλλοίωτο έναν υπόχωρο του διανυσματικού χώρου στον οποίο δρούν.

Τότε υπάρχει βάση στην οποία:

$$D(g) = \begin{array}{cc} m_1 \times m_1 & m_1 \times m_2 \\ \left(\begin{array}{c|c} A(g) & B(g) \\ \hline 0 & C(g) \end{array}\right) & \\ m_2 \times m_1 & m_2 \times m_2 \end{array} \quad , \; m_1 + m_2 = n$$

Εαν οι πίνακες είναι δυνατόν να έλθουν στην μορφή

$$D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & C(g) \end{pmatrix}$$

τότε η αναπαράσταση καλείται πλήρως αναγώγιμη.
Αναλύεται δηλαδή σε δύο μικρότερης διάστασης αναπαραστάσεις.

Οι αναπαραστάσεις οι οποίες δεν είναι αναγώγιμες καλούνται μη αναγώγιμες ή ανάγωγες.

Οι μη ισοδύναμες ανάγωγες αναπαραστάσεις εξαντλούν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της ομάδας.

(ii). Αναπαράσταση με (γραμμικούς) τελεστές οι οποίοι δρουν σε συναρτησιακούς χώρους.

Έστω $(\mathbb{V}, \mathbb{C})$ διανυσματικός χώρος και

$$\mathbb{F} = \{ f : \mathbb{V} \to \mathbb{C}, \quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \}$$

το σύνολο των (βαθμωτών) συναρτήσεων από τον $\mathbb{V}$ (στο σώμα $\mathbb{C}$).

Το σύνολο των συναρτήσεων είναι διανυσματικός χώρος $(\mathbb{F}, \mathbb{C})$.

Εάν έχουμε ένα σύνολο τελεστών : $\mathcal{S} = \{ \hat{S} : \mathbb{V} \to \mathbb{V} \}$
οι οποίοι αποτελούν ομάδα και ορίσουμε τελεστές

$$\hat{U}(s) : \mathbb{F} \to \mathbb{F} :$$

όπου εάν $\quad \vec{x} \mapsto \vec{x}' = \hat{S}\vec{x}, \quad \vec{x} \mapsto \hat{S}^{-1}\vec{x}$

τότε $\quad f(\vec{x}) \mapsto f'(\vec{x}') = \hat{U}_s f(\vec{x}') = f(\vec{x})$

ή ομοίως:

$$f(\vec{x}) \mapsto f'(\vec{x}) = \hat{U}_s f(\vec{x}) = f(\hat{S}^{-1}\vec{x}), \quad \forall \hat{S} \in \mathcal{S},$$

το σύνολο των τελεστών $\mathcal{U} = \{ \hat{U}(s), s \in \mathcal{S} \}$ αποτελεί ομάδα με πράξη την σύνθεση των τελεστών :

$$\hat{U}(S_i)\hat{U}(S_j) = \hat{U}(\hat{S}_i \circ \hat{S}_j).$$

Όσον αφορά την δομή της ομάδας

$$\mathcal{S} \cong \mathcal{U}.$$

Πράγματι εάν:

$$\vec{x} \longmapsto \hat{S}_j \vec{x} = \vec{x}' \longmapsto \hat{S}_i \hat{S}_j \vec{x} = \hat{S}_i \vec{x}' = \vec{x}''$$

Τότε $\quad f(\vec{x}) \longmapsto g(\vec{x}') = \hat{U}_{S_j} f(\vec{x}') = f(\vec{x})$

και $\quad g(\vec{x}') \longmapsto \hat{U}_{S_i} g(\vec{x}'') = g(\vec{x}') \Rightarrow$

$$\hat{U}_{S_i} \hat{U}_{S_j} f(\vec{x}'') = \hat{U}_{S_j} f(\vec{x}') = f(\vec{x}) \Rightarrow$$

$$\hat{U}_{S_i} \hat{U}_{S_j} f(\hat{S}_i \hat{S}_j \vec{x}) = f(\vec{x}) \Rightarrow \text{κλειστή πράξη.}$$

Ο ανωτέρω νόμος μετασχηματισμού σημαίνει ότι η τιμή της μετασχηματισμένης συνάρτησης στο μετασχηματισμένο σημείο, ισούται με της αρχικής στο αρχικό σημείο.

Με την ισοδύναμη γραφή:

$$\hat{U}_{S_i} \hat{U}_{S_j} f(\vec{x}) = \hat{U}_{S_i} f(\hat{S}_j^{-1}(\vec{x})) = f(S_j^{-1} S_i^{-1} \vec{x}) = f((S_i S_j)^{-1} \vec{x})$$

$$= \hat{U}_{S_i S_j} f(\vec{x}).$$ (Εδώ οι μετασχηματισμοί $\hat{S}$ δρούν κάθε φορά στο $\vec{x}$).

Επίσης: εάν $\quad \hat{S}_e \vec{x} = \vec{x} \Rightarrow \hat{U}_{S_e} f(\vec{x}) = f(\vec{x}) \Rightarrow \hat{U}_{S_e} = \hat{I}$
$(\forall f)$

και $\quad \hat{U}_{S_i^{-1}} \hat{U}_{S_i} f(\vec{x}) = \hat{U}_{S_i^{-1} \circ S_i} f(\vec{x}) = \hat{U}_{S_e} f(\vec{x}) = I f(\vec{x}) \Rightarrow$

$= f((S_i^{-1} \circ S_i)^{-1} \vec{x}) \qquad \hat{U}_{S_i^{-1}} = \hat{U}_{S_i}^{-1}.$

$\Rightarrow$ Δομή Ομάδας. **

** 2. Οι $\hat{U}(s)$ έχουν δομή ομάδας εάν οι $\hat{S}$ έχουν δομή ομάδας και

$\hat{S} \mapsto \hat{U}(s)$ είναι ομοιομορφισμός.

(i). Έστω $\hat{U}_{s_i} f(\hat{s}_j \vec{x}) = f(\vec{x})$, $\hat{s}_j \vec{x} = \vec{x}'$

και $\hat{s}_i \hat{s}_j \vec{x} = \hat{s}_i \vec{x}' = \vec{x}''$

και $f(\vec{x}) \mapsto g(\vec{x}'') = \hat{U}_{s_j} f(\vec{x}') = f(\vec{x})$

$g(\vec{x}') \mapsto \hat{U}_{s_i} g(\vec{x}'') = g(\vec{x}') \Rightarrow$

$\hat{U}_{s_i} \hat{U}_{s_j} f(\vec{x}'') = \hat{U}_{s_j} f(\vec{x}') = f(\vec{x})$

αλλά $\hat{U}_{s_i \circ s_j} f(\vec{x}'') = f(\vec{x}) \Rightarrow \hat{U}_{s_i} \hat{U}_{s_j} f(s_i s_j \vec{x}) = f(x)$

$= \hat{U}_{s_i s_j} f(s_i s_j \vec{x})$

Ισοδύναμα:

$\hat{U}_{s_i} \hat{U}_{s_j} f(\vec{x}) = \hat{U}_{s_i} f(s_j^{-1} \vec{x}) = f(s_j^{-1} s_i^{-1} \vec{x}) = f((\hat{s}_i \hat{s}_j)^{-1} \vec{x}) = U_{s_i s_j} f(\vec{x}).$

Παραδείγματα.

1. Χωρική μετατροπή.

$$\vec{x} \mapsto \hat{S}_{m\vec{a}}\vec{x} = \vec{x} + m\vec{a} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\hat{U}_{S_{m\vec{a}}} f(\vec{x} + m\vec{a}) = f(\vec{x}) \quad \Rightarrow$$

$$\hat{U}_{S_{m\vec{a}}} f(\vec{x}) = f(\vec{x} - m\vec{a}) \Rightarrow \hat{U}_{S_{m\vec{a}}} = e^{-m\vec{a}\cdot\vec{\nabla}} f(\vec{x})$$

$$U_{S_{m\vec{a}}} = e^{-m\vec{a}\cdot\vec{\nabla}}$$

2. Αντιστροφή (αναστροφή) ως προς την αρχή των αξόνων.

$$\left.\begin{aligned} \vec{x} &\mapsto \hat{S}_e\vec{x} = \vec{x} \\ &\mapsto \hat{S}_2\vec{x} = -\vec{x} \end{aligned}\right\} G_2 = \{\hat{e}, \hat{S}_2\}$$

$$\hat{U}_{S_2} f(-\vec{x}) = f(\vec{x}) \Rightarrow \hat{U}_{S_2} f(\vec{x}) = f(-\vec{x})$$

$\hat{\Pi}$ τελεστής ομοτιμίας

με $\hat{\Pi}\hat{\Pi} = 1$.

3. Στροφή στο επίπεδο.

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \hat{S}_\varphi \vec{X} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

με $\hat{S}_{\varphi_1} \hat{S}_{\varphi_2} = \hat{S}_{\varphi_1+\varphi_2}$ (πρόσθεση mod(2π))

Για $\varphi = \delta\varphi$ απειροστό έχουμε:

$$x_1' = x_1 + \delta\varphi\, x_2 \qquad x_1 = x_1' - \delta\varphi\, x_2'$$
$$x_2' = -\delta\varphi\, x_1 + x_2 \qquad x_2 = x_1 \delta\varphi + x_2$$

$$\hat{U}_{S_{\delta\varphi}} f(x_1, x_2) = f(\underbrace{x_1 - \delta\varphi\, x_2,\ \delta\varphi\, x_1 + x_2}_{\hat{S}^{-1}_{\delta\varphi}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}})$$

$$= f(x_1, x_2) + \delta\varphi \left[x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right] + \dots \Rightarrow$$

$$\hat{U}_{S_{\delta\varphi}} = \hat{I} + \delta\varphi \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \dots$$

4. Σε συναρτησιακό χώρο δράση των τελεστών της ομάδας σε τελεστές του χώρου.

Έστω $\hat{A}(\vec{x}) f(\vec{x}) = g(\vec{x})$

↳ τελεστής του χώρου (Hilbert)

$$\hat{U}_s g(\hat{s}\vec{x}) = g(\vec{x}) \Rightarrow \hat{U}_s \hat{A}(\hat{s}\vec{x}) f(\hat{s}\vec{x}) = \hat{A}(\vec{x}) f(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \hat{U}_s \hat{A}(\hat{s}\vec{x}) \hat{U}_s^{-1} \underbrace{\hat{U}_s f(\hat{s}\vec{x})}_{f(\vec{x})} = \hat{A}(\vec{x}) f(\vec{x}) \Rightarrow$$

$$\hat{A}(\vec{x}) = \hat{U}_s \hat{A}(\hat{s}\vec{x}) \hat{U}_s^{-1} \quad \text{ή} \quad \hat{A}(\hat{s}^{-1}\vec{x}) = \hat{U}_s \hat{A}(\vec{x}) \hat{U}_s^{-1}$$

Ισοδύναμα:

$$\hat{U}_s g(\vec{x}) = g(\hat{s}^{-1}\vec{x}) \Rightarrow \hat{U}_s \hat{A}(\vec{x}) f(\vec{x}) = g(\hat{s}^{-1}\vec{x})$$

$$\Rightarrow \hat{U}_s \hat{A}(\vec{x}) \hat{U}_s^{-1} \underbrace{\hat{U}_s f(\vec{x})}_{f(\hat{s}^{-1}\vec{x})} = \hat{A}(\hat{s}^{-1}\vec{x}) f(\hat{s}^{-1}\vec{x}) \quad = \hat{U}_s f(\vec{x}) \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\hat{U}_s \hat{A}(\vec{x}) \hat{U}_s^{-1} = \hat{A}(\hat{s}^{-1}\vec{x})$$

5. Αναλλοίωτοι τελεστές (Συμμετρία) ??.

Ένας τελεστής $\hat{A}(\vec{x})$ είναι αναλλοίωτος υπό την ομάδα των μετασχηματισμών εάν:

$$\hat{U}_s \hat{A}(\vec{x}) \hat{U}_s^{-1} = \hat{A}(\hat{S}^{-1}\vec{x}) = \hat{A}(\vec{x})$$

ή:

$$\hat{U}_s \hat{A}(\vec{x}) = \hat{A}(\vec{x}) \hat{U}_s$$

ή

$$[\hat{U}_s, \hat{A}(\vec{x})] = 0,$$

δηλαδή εάν ο τελεστής μετατίθεται με όλους τους τελεστές της ομάδας.

Στην κβαντική μηχανική ο χώρος των καταστάσεων είναι διανυσματικός χώρος (επί του σώματος των μιγαδικών αριθμών) με θετικά ορισμένο Ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο και πλήρης. Χώρος Hilbert.

Τα φυσικά μεγέθη αναπαρίστανται με Ερμιτιανούς τελεστές οι οποίοι ως γνωστόν έχουν πραγματικές ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματά τους δίνουν μία ορθοκανονική βάση του χώρου. Σημαντικός τελεστής είναι η Χαμιλτονιανή η οποία εκτός του ότι οι ιδιοτιμές της είναι οι "δυνατές τιμές" της ενέργειας, καθορίζει και την χρονική εξέλιξη του συστήματος.

(Οι τελεστές που εκφράζουν συμμετρίες του συστήματος, διατήρηση δηλαδή των μέτρων των εσωτερικών γινομένων θα πρέπει να εκφράζονται με (αντι-)μοναδιακούς τελεστές. ??)

(iii). Επίδραση μετασχηματισμών στις ιδιοκαταστάσεις αναλλοίωτου Ερμιτιανού τελεστή $\hat{A}$.

Έστω $\varphi(\vec{x},\lambda)$ ιδιοάνυσμα του τελεστή $\hat{A}$ με ιδιοτιμή λ:

$$\hat{A}(\vec{x})\,\varphi(\vec{x},\lambda) = \lambda\,\varphi(\vec{x},\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Τότε

$$\hat{U}_s \hat{A}(\vec{x})\,\varphi(\vec{x},\lambda) = \lambda\,\hat{U}_s\varphi(x,\lambda) = \hat{A}(\vec{x})\,\hat{U}_s\varphi(x,\lambda)$$

αναλλοίωτος τελεστής

$\Rightarrow$ η $\hat{U}_s\varphi(\vec{x},\lambda)$ είναι ιδιοκατάσταση του τελεστή $\hat{A}$ με την ίδια ιδιοτιμή (λ) με την $\varphi(\vec{x},\lambda)$.

- Εάν η ιδιοτιμή λ δεν είναι εκφυλισμένη τότε

$$\hat{U}_s\varphi(\vec{x},\lambda) = c\,\varphi(\vec{x},\lambda).$$

(π.χ. διακριτό μονοδιάστατο φάσμα Χαμιλτονιανής $\hat{H}$).

- Εάν η ιδιοτιμή λ έχει εκφυλισμό $\Rightarrow$ υπάρχουν M ανεξάρτητα ιδιοανύσματα $\varphi_i(\vec{x},\lambda)$, $i=1,\dots,M$ για τα οποία ισχύει:

$$\hat{A}\varphi_i(\vec{x},\lambda) = \lambda\,\varphi_i(\vec{x},\lambda), \quad i=1,\dots,M$$

Τα φ_i είναι βάση στον M-διάστατο ιδιόχωρο της ιδιοτιμής λ. Η φ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των φ_i και επομένως η δράση των $\hat{U}_s$ καθορίζεται από την δράση τους στα φ_i.

$$\hat{U}_s \varphi_i(\vec{x},\lambda) = \sum_{j=1}^{M} D(s)_{ji}\, \varphi_j(\vec{x},\lambda)$$

επειδή τα φ_i είναι βάση. Η δράση επομένως ορίζει για κάθε s έναν πίνακα $D(s)$ με στοιχεία $[D(s)]_{ij}$ ο οποίος είναι $M\times M$.

Για την σύνθεση των τελεστών $\hat{U}$ έχουμε:

$$\hat{U}_{s_2}\hat{U}_{s_1}\varphi_i(\vec{x},\lambda) = \hat{U}_{s_2}\sum_j [D(s_1)]_j\, \varphi_j(\vec{x},\lambda) =$$

$$= \sum_j [D(s_1)]_{ji} \sum_k [D(s_2)]_{kj}\, \varphi_k(\vec{x},\lambda) =$$

$$= \sum_k \left\{ \sum_j [D(s_2)]_{kj} [D(s_1)]_{ji} \right\} \varphi_k(\vec{x},\lambda).$$

Αλλά και $\hat{U}_{s_2 s_1}\varphi_i(\vec{x},\lambda) = \sum_k [D(s_2 s_1)]_{ki}\, \varphi_k(\vec{x},\lambda).$

Λόγω της ανεξαρτησίας των φ_i έχουμε:

$$D(s_2 s_1) = D(s_2) D(s_1)$$

δηλαδή ομοιομορφισμό της ομάδας των $\hat{U}(s)$ με την ομάδα των $D(s)$.

$\rightarrow$ M-διάστατη αναπαράσταση της ομάδας S.

Ομάδα $\{\hat{S}\}$ $\longrightarrow$ Υλοποίηση με $\{\hat{U}_s\}$ σε συναρτησιακούς χώρους.

$\longrightarrow$ Αναπαραστάσεις στις εκφυλισμένες στις ιδιοτιμές Ερμιτιανών τελεστών.