8. Χαρακτήρες αναπαραστάσεων. Αναγωγή αναγώγιμων αναπαραστάσεων. Κανονική αναπαράσταση – Πίνακας χαρακτήρων.

8.1. • Έστω $\{D^{(i)}(g)\}$ αναπαράσταση ομάδας G. Χαρακτήρας της αναπαράστασης καλείται το σύνολο

$$\{\chi^{i}(g)\}$$

όπου:

$$\chi^{i}(g) = \mathrm{Tr}\, D(g).$$

Δηλαδή τα ίχνη των πινάκων της αναπαράστασης.

Οι χαρακτήρες έχουν τις ακόλουθες βασικές ιδιότητες:

(i). Οι ισοδύναμες αναπαραστάσεις έχουν τους αυτούς χαρακτήρες:

$$D'^{(i)}(g) = M D^{(i)}(g) M^{-1} \Rightarrow \mathrm{Tr}\, D'^{(i)}(g) = \mathrm{Tr}\, D^{(i)}(g).$$

(κυκλική μετάθεση των πινάκων).

(ii). Συζυγή στοιχεία της ομάδας έχουν τους αυτούς χαρακτήρες σε κάθε αναπαράσταση.

$$g' = h \circ g \circ h^{-1} \Rightarrow D^{(i)}(g') = D^{(i)}(h) \circ D^{(i)}(g) \circ D^{(i)-1}(h) \Rightarrow$$

$$\mathrm{Tr}\, D^{(i)}(g') = \mathrm{Tr}\, D^{(i)}(g).$$

- Το θεώρημα της μεγάλης ορθογωνιότητας είναι δυνατόν να διατυπωθεί και ως προς τους χαρακτήρες.

$$\sum_{a=1}^{|G|} (\mathbb{D}^{(k)}(g_a))_{ii'} (\mathbb{D}^{*(k')}(g_a))_{jj'} = \frac{|G|}{\sqrt{d_k d_{k'}}} \delta_{ij}\delta_{i'j'}\delta_{kk'},$$

Θέτοντας $i'=i$ και αθροίζοντας στα i:

$$\sum_{a=1}^{|G|}\sum_{i=1}^{d_k} (\mathbb{D}^{(k)}(g_a))_{ii} (\mathbb{D}^{*(k')}(g_a))_{jj'} = \frac{|G|}{\sqrt{d_k d_{k'}}} \sum_{i=1}^{d_k} \delta_{ij}\delta_{ij'}\delta_{kk'} \Rightarrow$$

$$\sum_{a=1}^{|G|} Tr[\mathbb{D}^{(k)}(g_a)] (\mathbb{D}^{*(k')}(g_a))_{jj'} = \frac{|G|}{\sqrt{d_k d_{k'}}} \delta_{jj'}\delta_{kk'}$$

και θέτοντας $j'=j$ και αθροίζοντας στα j:

$$\sum_{a}^{|G|} \chi^{(k)}(g_a)\chi^{*(k')}(g_a) = |G|\delta_{kk'}$$

Οι χαρακτήρες των μη ισοδύναμων, μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων είναι διανύσματα ορθογώνια μεταξύ τους.

- Επειδή τα στοιχεία μιας κλάσης ισοδυναμίας έχουν το ίδιο χαρακτήρα. Εάν $C_1, C_2, \ldots, C_\Gamma$ οι διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας της G με $n_1, n_2, \ldots, n_\Gamma$ στοιχεία αντίστοιχα, τότε η σχέση ορθογωνιότητας γράφεται:

$$\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma \chi_\gamma^{(k)} \chi_\gamma^{*(k')} = |G|\delta_{kk'} \Rightarrow$$

$$\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \tilde{\chi}_\gamma^{(k)} \tilde{\chi}_\gamma^{*(k')} = \delta_{kk'}, \quad \tilde{\chi}_\gamma^{(k)} = \sqrt{\frac{n_\gamma}{|G|}}\chi_\gamma^{(k)}.$$

Οι χαρακτήρες των μη ισοδύναμων, μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων είναι ορθοκανονικό σύστημα σε Γ-διάστατο χώρο και επομένως

$$\underbrace{k_{max}}_{\text{αριθμός (ΜΙ), (ΜΑ) αναπαραστάσεων}} \leq \underbrace{\Gamma}_{\text{αριθμός κλάσεων συζυγίας της } G.}$$

- Είδαμε ότι εάν θεωρήσουμε όλες τις, k_{max} τον αριθμό, ΜΙ, ΜΑ αναπαραστάσεις της ομάδας G, τότε τα k_{max}, Γ-διάστατα διανύσματα

$$\hat{X}^{(i)} = \left(\sqrt{\frac{n_1}{|G|}}\,X_1^{(i)}, \sqrt{\frac{n_2}{|G|}}\,X_2^{(i)}, \dots, \sqrt{\frac{n_\Gamma}{|G|}}\,X_\Gamma^{(i)}\right)$$

είναι ορθοκανονικό σύνολο, παράγουν δηλαδή έναν k_{max}-διάστατο υπόχωρο. Στον υπόχωρο αυτό θα ικανοποιούν και σχέση πληρότητας. Δηλαδή έστω $\vec{x}$ διάνυσμα του χώρου αυτού. Τότε:

$$\vec{x} = \sum_i a_i \hat{X}^{(i)} \quad \text{με} \quad a_i = \hat{X}^{i} \cdot \vec{x} \Rightarrow$$

$$\vec{x} = \sum_i \left(\sum_\alpha x_\alpha \sqrt{\frac{n_\alpha}{|G|}}\,X_\alpha^{(i)*}\right)\hat{X}^{(i)} \Rightarrow$$

$$x_\beta = \sum_i \sum_\alpha x_\alpha \sqrt{\frac{n_\alpha}{|G|}}\,X_\alpha^{(i)*} X_\beta^{(i)} \sqrt{\frac{n_\beta}{|G|}}$$

$$= \sum_\alpha x_\alpha \sum_i \sqrt{\frac{n_\alpha}{|G|}}\sqrt{\frac{n_\beta}{|G|}}\,X_\alpha^{(i)*} X_\beta^{(i)} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{k_{max}} \tilde{X}_\alpha^{(i)*}\,\tilde{X}_\beta^{(i)} = \delta_{\alpha\beta}$$

Δηλαδή έχουμε

Γ, k_{max}-διάστατα διανύσματα τα οποία είναι ορθοκανονικό σύνολο $\Rightarrow$

$$\Gamma \le k_{max}.$$

$$\boxed{\left.\begin{aligned} k_{max} &\le \Gamma \\ \Gamma &\le k_{max} \end{aligned}\right\} \Rightarrow k_{max} = \Gamma.}$$

Για αβελιανές ομάδες $\Gamma = |G|$
$\Rightarrow k_{max} = |G|$
$d_1^2 + \dots + d_{k_{max}}^2 \le |G|$
$\Downarrow$
$d_i = 1.$

8.2. Αποσύνθεση αναγώγιμων αναπαραστάσεων.

Έστω $D(g_a)$ αναγώγιμη αναπαράσταση η οποία, σε μία ανηγμένη της μορφή θα έχει την μορφή:

$$D(g_a) = \underbrace{D^{(1)}(g_a) \oplus \cdots \oplus D^{(1)}(g_a)}_{\lambda_1 \text{ φορές}} \oplus \cdots \oplus \underbrace{D^{(k_{max})}(g_a) \oplus \cdots \oplus D^{(k_{max})}(g_a)}_{\lambda_{k_{max}}}$$

Δηλαδή: λ_1 φορές την $D^{(1)}$

λ_2 —//— —//— $D^{(2)}$

$\vdots$

$\lambda_{k_{max}}$ —//— —//— $D^{(k_{max})}$.

Τότε:

$$Tr(D(g_a)) = \sum_{k'=1}^{k_{max}} \lambda_{k'} Tr(D(g_a)^{(k')}), \quad \lambda_{k'} \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \quad \chi_\gamma = \sum_{k'=1}^{k_{max}} \lambda_{k'} \chi_\gamma^{(k')} \quad \text{(χαρακτήρας κλάσεως ισοδυναμίας).}$$

Επομένως:

$$\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma \chi_\gamma \chi_\gamma^{*(k)} = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma \Big(\sum_{k'=1}^{k_{max}} \lambda_{k'} \chi_\gamma^{(k')}\Big) \chi_\gamma^{*(k)} = \sum_{k'=1}^{k_{max}} \lambda_{k'} \underbrace{\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma \chi_\gamma^{(k')} \chi_\gamma^{*(k)}}_{|g|\delta_{kk'}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_k = \frac{1}{|g|} \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma \chi_\gamma \chi_\gamma^{*(k)}.}$$

Η αποσύνθεση μίας αναγώγιμης αναπαράστασης είναι μονοσήμαντη εκτός βέβαια από την σειρά εμφάνισης των μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων.

- Επίσης :

$$\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma |\chi_\gamma|^2 = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma}\sum_{k=1}^{k_{max}}\sum_{k'=1}^{k_{max}} \underbrace{n_\gamma \lambda_k \lambda_{k'} \chi_\gamma^{(k)} \chi_\gamma^{*(k')}}_{=|g|\delta_{kk'}}$$

$$= \sum_{k=1}^{k_{max}}\sum_{k'=1}^{k_{max}} \lambda_k \lambda_{k'} |g| \delta_{kk'} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma |\chi_\gamma|^2 = |g| \sum_{k=1}^{k_{max}} \lambda_k^2}\ .$$

Επομένως:

$$\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma |\chi_\gamma|^2 > |g|$$ είναι κριτήριο αναγωγιμότητας.

8.3. Κανονική αναπαράσταση.

Σε κάθε πεπερασμένη ομάδα G ορίζεται η κανονική αναπαράσταση $\{D_R\}$, διάστασης $|G|$ βασισμένη στον πίνακα πολλαπλασιασμού της ομάδας.

Διατάσσουμε τον πίνακα πολλαπλασιασμού ως:

G	e	g_2	g_3	$\cdots$	$g_{\lvert G\rvert}$
e	e	g_2	g_3	$\cdots$	$g_{\lvert G\rvert}$
g_2^{-1}	g_2^{-1}	e			
g_3^{-1}	g_3^{-1}		e		
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$	
$g_{\lvert G\rvert}^{-1}$	$g_{\lvert G\rvert}^{-1}$				e

και ορίζουμε τους πίνακες της αναπαράστασης ως:

$$(D_R(g_i))_{km} = \begin{cases} 0, & \text{εάν} \quad g_k^{-1} \circ g_m \neq g_i \\ 1, & \text{εάν} \quad g_k^{-1} \circ g_m = g_i \end{cases}.$$

Επομένως:

- $D_R(e) = \mathbb{I}$

- Κάθε άλλος πίνακας έχει σε κάθε στήλη και σε κάθε γραμμή μόνο μία μονάδα

$\Rightarrow$ όλοι οι πίνακες έχουν ορίζουσα 1 $\rightarrow$ έχουν αντίστροφο.

- Οι ανωτέρω πίνακες αποτελούν πιστή αναπαράσταση της G.
Πράγματι το γινόμενο δύο πινάκων είναι

$$\left(D_R(g_2)D_R(g_1)\right)_{kj} = \sum_m D_R(g_2)_{km} D_R(g_1)_{mj}$$

οπότε θα έχει μη μηδενικό στοιχείο όταν για κάποιο m και οι δύο πίνακες έχουν $D_R(g_2)_{km}=1$ και $D_R(g_1)_{mj}=1$, δηλαδή

$$\left.\begin{aligned} & g_k^{-1}\circ g_m = g_2 \\ \text{και}\quad & g_m^{-1}\circ g_j = g_1\end{aligned}\right\} \Rightarrow g_k^{-1}\circ g_j = g_2\circ g_1,$$

επομένως: $D_R(g_2)D_R(g_1) = D_R(g_2\circ g_1)$.

$$D_R(g_m) = I \Rightarrow \left(D_R(g_m)\right)_{ii} = 1$$

$$\Rightarrow g_i^{-1}\circ g_i = g_m \Rightarrow g_m = e.$$

- Από την ανωτέρω σχέση φαίνεται ότι κανένας πίνακας της D_R εκτός του $D_R(e)$ δεν περιέχει μονάδα σε στοιχείο της διαγωνίου. Δηλαδή:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} & \mathrm{Tr}\, D_R(e) = |G| \\ & \mathrm{Tr}\, D_R(g) = 0, \quad g\neq e.\end{aligned}\right\}}$$

Όλες οι κλάσεις ισοδυναμίας, εκτός αυτής του ταυτοτικού στοιχείου, έχουν μηδενικό χαρακτήρα.

- Η αναπαράσταση είναι αναγώγιμη.

$$\sum_{\gamma=1}^{r} n_\gamma |\chi_\gamma|^2 = 1\cdot|G|^2 > |G|, \quad \text{εφ' όσον } |G|>1,$$

για όλες τις G εκτός της τετριμμένης.

• Η (αναγώγιμη) κανονική αναπαράσταση περιέχει κάθε μη αναγώγιμη αναπαράσταση (k), λ_k φορές, όπου:

$$\lambda_k = \frac{1}{|G|}\, |G|\, d_k$$

χαρακτήρας της $D^{(k)}$ για την κλάση σύζυγίας του e.

Χαρακτήρας της κανονικής για την κλάση συζυγίας του e.

Δηλαδή: $$\lambda_k = d_k$$

η κανονική αναπαράσταση περιέχει κάθε μη αναγώγιμη αναπαράσταση τόσες φορές, όση είναι και η διάσταση κάθε μίας.

• Από την $$\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma |\chi_{R,\gamma}|^2 = |G| \sum_{k=1}^{k_{max}} \lambda_k^2 \Rightarrow$$

$$|G|^2 = |G| \sum_{k=1}^{k_{max}} d_k^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{k_{max}} d_k^2 = |G|.}$$

8.1. Πίνακας χαρακτήρων.

Τις ιδιότητες των χαρακτήρων των ΜΙ, ΜΑ αναπαραστάσεων συνοψίζει ο πίνακας χαρακτήρων:

κλάσεις συζυγίας

ΜΙ, ΜΙ αναπαραστάσεις ($k_{max} = r$)

	C_1	C_2	....	C_r
Γ_1	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	...	$\chi_r^{(1)}$
Γ_2				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\Gamma_{k_{max}}$	$\chi_1^{(r)}$	$\chi_2^{(r)}$	...	$\chi_r^{(r)}$

$\chi_i^{(j)}$ χαρακτήρας της C_i κλάσεως στην (j) αναπαράσταση.

- Ο πίνακας είναι τετραγωνικός.

- Οι γραμμές και οι στήλες του πίνακα αποτελούν ορθογώνιο σύστημα με ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο, (οι χαρακτήρες είναι εν γένει μιγαδικοί αριθμοί) με την κατάλληλη κανονικοποίηση.

Με $\sqrt{n_g}$ έχουμε διανύσματα μήκους $|g|$
με $\sqrt{\frac{n_g}{|g|}}$ έχουμε ορθοκανονικό σύνολο.

- Η ανωτέρω ιδιότητα επιτρέπει και τον προσδιορισμό του πίνακα χαρακτήρων.

Παράδειγμα.

1. Πίνακας χαρακτήρων της S_3.

Μπορούν να επαληθευθούν οι σχέσεις για τους χαρακτήρες από τις τρείς αναπαραστάσεις της S_3 που έχουν ήδη δοθεί. Εδώ θα παραχθεί ο πίνακας από τις σχέσεις ορθογωνιότητας και κανονικοποίησης των χαρακτήρων.

S_3	$C_1=\{e\}$	$C_2=\{g_2,g_3\}$	$C_3=\{g_4,g_5,g_6\}$
Γ_1	1	1	1
Γ_2	1	$a=1$	$b=-1$
Γ_3	2	$c=-1$	$d=0$

Ορθογωνιότητα γραμμών:

$$1+2a+3b=0 \qquad (1)$$
$$2+2c+3d=0 \qquad (2)$$
$$2+2ac+3bd=0 \qquad (3)$$

Κανονικοποίηση γραμμών:

$$1+2+3=6 \qquad (4)$$
$$1+2a^2+3b^2=6 \qquad (5)$$
$$4+2c^2+3d^2=6 \qquad (6)$$

$$(2) \Rightarrow \quad 2c=-(3d+2)$$
$$(6) \Rightarrow \quad 2c^2=2-3d^2 \Rightarrow 4c^2=4-6d^2 \Rightarrow 9d^2+\cancel{4}+12d=\cancel{4}-6d^2$$
$$\Rightarrow \quad 15d^2+12d=0 \Rightarrow d=0 \text{ ή } d=-\frac{4}{5}$$
$$\Rightarrow c=-1 \text{ ή } c=\frac{1}{5}$$

$$(3) \Rightarrow \quad 2+2ac+3bd=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2-2a=0 \\ \text{ή } \; 2+\frac{2}{5}a-\frac{12}{5}b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (a=1,\ b=-1)$$

$$\text{ή} \quad \left.\begin{array}{l} 10+2a-12b=0 \\ 1+2a+3b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 15b=9 \Rightarrow b=\frac{3}{5}$$

ασυνεπές γιατί b^2 πρέπει να είναι μονάδα.

2. Πίνακας χαρακτήρων της C_N.

Οι κυκλικές ομάδες, ως αβελιανές, έχουν N μονοδιάστατες ΜΙ, ΜΑ αναπαραστάσεις. Επειδή για κάθε στοιχείο αυτών g θα ισχύει $g^N = 1$ τα στοιχεία θα είναι οι N-οστές ρίζες της μονάδος

$$\omega^k \quad \text{με} \quad \omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}.$$

Επομένως ο πίνακας χαρακτήρων είναι:

	e	g_2	g_3	$\dots$	g_{N-1}
Γ_1	1	1	1	$\dots$	1
Γ_2	1	ω	ω^2	$\dots$	ω^{N-1}
Γ_3	1	ω^2	ω	$\dots$	$\omega^{2(N-1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
Γ_N	1	ω^{N-1}	$\omega^{2(N-1)}$	$\dots$	$\omega^{(N-1)^2}$

3. Θεώρημα Bloch.

Για Χαμιλτονιανή $\hat{H}$ η οποία μετατίθεται με την κυκλική ομάδα στα στοιχεία της ομάδας αντιστοιχούν τελεστές:

$$\hat{I},\ \hat{T}_L,\ \hat{T}_{2L},\ \dots,\ \hat{T}_{(N-1)L}$$

οι οποίοι μετατίθενται με την Χαμιλτονιανή και επομένως έχουν κοινό σύνολο ιδιοσυναρτήσεων.

$$\hat{T}_L \varphi_n(x) = \omega^{n-1} \varphi_n(x)$$

εάν $\quad \hat{T}_L \in \Gamma_n$

Για ένα περιοδικό δυναμικό $V(x)=V(x+L)$, εάν θέσουμε περιοδικές συνθήκες στα άκρα διαστήματος μήκους $a=NL$, ο μετασχηματισμός στα σημεία του χώρου θα είναι:

$$\hat{S}_L : x \mapsto x+L$$

$$\hat{T}_L \varphi(x) = \varphi(x-L) \quad \text{με} \quad \varphi(x-NL)=\varphi(x)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{T}_L^N \varphi(x) = \varphi(x).$$

Επομένως:

$$\hat{T}_L \varphi_n(x) = \varphi_n(x-L) = \omega^{n-1} \varphi_n(x)$$

$$\Rightarrow \varphi_n(x-L) = e^{i\frac{2\pi}{NL}(n-1)L} \varphi_n(x)$$

$$\Rightarrow \varphi_n(x-L) = e^{iP_nL} \varphi_n(x)$$

$$\Rightarrow e^{-iP_nL} \varphi_n(x-L) = \varphi_n(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{iP_n(x-L)} \varphi_n(x-L) = e^{iP_nx} \varphi_n(x)$$

$\Rightarrow$ η $e^{iP_nx}\varphi_n(x) = U_n(x)$ είναι περιοδική συνάρτηση και επομένως:

$$\boxed{\varphi_n(x) = e^{-iP_nx} U_n(x) \qquad P_n = \frac{2\pi i}{N}(n-1)}$$

Θεώρημα Bloch

Οι ιδιοκαταστάσεις φ_n μιας Χαμιλτονιανής που μετατίθεται με τα στοιχεία της κυκλικής ομάδας C_N είναι της μορφής
$e^{-iP_nx}U_n(x)$
όπου η U_n είναι περιοδική συνάρτηση και $P_n = \frac{2\pi i}{N}(n-1)$.