ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2019-2020

Φώτιος Κ. Διάκονος

Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

18. Διατήρηση μηκών στο $\mathbb{C}^2$ - Ομάδα SU(2)

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την ομάδα γραμμικών μετασχηματισμών που αφήνει αναλοίωτο το μήκος διανυσμάτων του $\mathbb{C}^2$.

Διανύσματα του τύπου: $\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$ με $\Psi_1,\ \Psi_2 \in \mathbb{C}$ έχουν ιδιαίτερο φυσικό ενδιαφέρον καθώς μπορούν να περιγράψουν:

- Την δυναμική συστημάτων από κβαντικά σπιν $\frac{1}{2}$ και από qubits.

- Σωματίδια με **εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας** όπως το **νουκλεόνιο** $|N\rangle = \begin{pmatrix} \Psi_p \\ \Psi_n \end{pmatrix}$ (ισοσπίν).

Στην περίπτωση του νουκλεονίου οι **δύο συνιστώσες** **πρωτόνιο** και **νετρόνιο** μπορούν να θεωρηθούν σαν **ένα σωμάτιο** ως προς τις **ισχυρές αλληλεπιδράσεις** παρότι **διακρίνονται** ως προς την **ηλεκτρομαγνητική τους αλληλεπίδραση**.

Αγνοώντας την περαιτέρω δομή των κυματοσυναρτήσεων Ψ_p, Ψ_n (Dirac spinors) οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις αφήνουν αναλοίωτο το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle N|N\rangle \;=\; (\Psi_p^* \;, \Psi_n^*)\begin{pmatrix}\Psi_p\\ \Psi_n\end{pmatrix}$$

.

Θα αναζητήσουμε πίνακες $\mathbf{U}$ που εκφράζουν αυτή την συμμετρία:

$$\begin{pmatrix}\tilde{\Psi}_1\\ \tilde{\Psi}_2\end{pmatrix} \;=\; \underbrace{\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}}_{\mathbf{U}}\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (\tilde{\Psi}_1^* \;, \tilde{\Psi}_2^*)\begin{pmatrix}\tilde{\Psi}_1\\ \tilde{\Psi}_2\end{pmatrix} \;=\; (\Psi_1^* \;, \Psi_2^*)\underbrace{\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}}_{\mathbf{I}}\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}$$

Προφανώς θα ισχύει (με $u_{i,j} \;\in\; \mathbb{C}$):

$$\begin{pmatrix}u_{11}^* & u_{21}^*\\ u_{12}^* & u_{22}^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l}|u_{11}|^2+|u_{21}|^2=1,\;\; u_{11}^*u_{12}+u_{21}^*u_{22}=0\\ |u_{12}|^2+|u_{22}|^2=1,\;\; u_{12}^*u_{11}+u_{21}u_{22}^*=0\end{array}$$

Θα απαιτήσουμε επίσης $\det(\mathbf{U}) = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} = 1$ για να περιέχεται ο μοναδιαίος $\mathbf{I}$ στους $\mathbf{U}$ και να διατηρείται η $\det(\mathbf{U})$.

Τότε θα ισχύει:

$$u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} = 1 \xrightarrow{\cdot u_{11}^*} |u_{11}|^2 u_{22} - \underbrace{u_{11}^* u_{12}}_{=-u_{21}^* u_{22}} u_{21} = u_{11}^* \Rightarrow \underbrace{\left(|u_{11}|^2 + |u_{21}|^2\right)}_{1} u_{22} = u_{11}^*$$

και:

$$u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} = 1 \xrightarrow{\cdot u_{12}^*} \underbrace{u_{12}^* u_{11}}_{=-u_{21} u_{22}^*} u_{22} - |u_{12}|^2 u_{21} = u_{12}^* \Rightarrow -\underbrace{\left(|u_{22}|^2 + |u_{12}|^2\right)}_{1} u_{21} = u_{12}^*$$

Θέτοντας $u_{11} = a = u_{22}^*$ και $u_{12} = b = -u_{21}^*$ ο πίνακας $\mathbf{U}$ γράφεται:

$$\mathbf{U} \ = \ \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{με} \ \ a,\ b \ \in \ \mathbb{C} \ \ \text{και} \ \ |a|^2 + |b|^2 \ = \ 1$$

Επίσης θέτοντας $a = a_R + ia_I$ και $b = b_R + ib_I$ παίρνουμε:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} a_R + ia_I & b_R + ib_I \\ -b_R + ib_I & a_R - ia_I \end{pmatrix} = a_R \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} + ib_I \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma_x}} + ib_R \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma_y}} + ia_I \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma_z}}$$

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό:

$$\vec{\theta} = (b_I,\ b_R,\ a_I) \quad \text{και} \quad \vec{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z)$$

με $a_R,\ a_I,\ b_R,\ b_I\ \in\ \mathbb{R}$ και $|a_R|^2 + |a_I|^2 + |b_R|^2 + |b_I|^2\ =\ 1$ ο πίνακας $\mathbf{U}$ γράφεται:

$$\mathbf{U}(a_R, \vec{\theta})\ =\ a_R \mathbf{I}\ +\ i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma} \quad \text{με}\ \ a_R^2 + \vec{\theta}^2\ =\ 1\ \ \text{και}\ \ a_R\ \in\ \mathbb{R},\ \vec{\theta}\ \in\ \mathbb{R}^3$$

Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι οι **πίνακες U** αποτελούν **ομάδα**. Την ομάδα των **special** $(\det(\mathbf{U}) = 1)$, **unitary** $(\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\dagger})$ **2×2** πινάκων:

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{U}\ \in\ \mathrm{SU}(2)$$

Το γινόμενο: $\mathbf{U}(a_{R,1}, \vec{\theta}_1)\mathbf{U}(a_{R,2}, \vec{\theta}_2)$ θα είναι:

$$\mathbf{U}(a_{R,1}, \vec{\theta}_1)\mathbf{U}(a_{R,2}, \vec{\theta}_2) = (a_{R,1}\mathbf{I} + i\vec{\theta}_1\cdot\vec{\sigma})(a_{R,2}\mathbf{I} + i\vec{\theta}_2\cdot\vec{\sigma})$$

Ισχύει η ταυτότητα:

$$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) \;=\; \vec{a}\cdot\vec{b}\;\mathbf{I}+i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$$

οπότε:

$$(a_{R,1}\mathbf{I}+i\vec{\theta}_1\cdot\vec{\sigma})(a_{R,2}\mathbf{I}+i\vec{\theta}_2\cdot\vec{\sigma}) \;=\; (a_{R_1}a_{R_2}-\vec{\theta}_1\cdot\vec{\theta}_2)\;\mathbf{I}+i(a_{R,1}\vec{\theta}_2+a_{R,2}\vec{\theta}_1-\vec{\theta}_1\times\vec{\theta}_2)\cdot\vec{\sigma}$$

Μπορούμε να γράψουμε: $\mathbf{U}(a_{R,1},\vec{\theta}_1)\mathbf{U}(a_{R,2},\vec{\theta}_2)=\mathbf{U}(a_{R,3},\vec{\theta}_3)$ όπου:

$$a_{R,3}=a_{R_1}a_{R_2}-\vec{\theta}_1\cdot\vec{\theta}_2 \qquad ; \qquad \vec{\theta}_3=a_{R,1}\vec{\theta}_2+a_{R,2}\vec{\theta}_1-\vec{\theta}_1\times\vec{\theta}_2$$

με $a_{R,3} \;\in\; \mathbb{R}$ και $\vec{\theta}_3\in\mathbb{R}^3$.

Άσκηση: Δείξτε ότι $a^2_{R,3}+\vec{\theta}^2_3=1$ χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

Προφανώς ισχύει ότι: $\mathbf{U}(a_{R,1},\vec{\theta}_1)\mathbf{U}(a_{R,2},\vec{\theta}_2)\neq\mathbf{U}(a_{R,2},\vec{\theta}_2)\mathbf{U}(a_{R,1},\vec{\theta}_1)$

$$\Downarrow$$

Η SU(2) είναι ***μη αβελιανή*** ομάδα!

Η ομάδα SU(2)

Οι πίνακες $\mathbf{U}(a_R, \vec{\theta})$ ικανοποιούν όλα τα κριτήρια της ομάδας:

- Δείξαμε ότι ικανοποιείται η κλειστότητα με γινόμενο πινάκων.

- Η προσεταιριστική ιδιότητα ισχύει γενικά σε γινόμενα τετραγωνικών πινάκων.

- Το στοιχείο $\mathbf{U}(1, \vec{0})$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\mathbf{U}(a_R, \vec{\theta})\mathbf{U}(1, \vec{0}) = \mathbf{U}(1, \vec{0})\mathbf{U}(a_R, \vec{\theta}) = \mathbf{U}(a_R, \vec{\theta})$$

  και επομένως αποτελεί το οδέτερο στοιχείο της ομάδας.

- Το στοιχείο $\mathbf{U}(a_R, -\vec{\theta})$ είναι το αντίστροφο του $\mathbf{U}(a_R, \vec{\theta})$ αφού:

$$\mathbf{U}(a_R, -\vec{\theta})\mathbf{U}(a_R, \vec{\theta}) = \mathbf{U}(a_R, \vec{\theta})\mathbf{U}(a_R, -\vec{\theta}) = \mathbf{U}(1, \vec{0})$$

Απειροστοί μετασχηματισμοί SU(2)

Η συνθήκη:

$$a_R^2 + \vec{\theta}^2 \;=\; 1$$

που ισχύει για τις παραμέτρους ενός πίνακα $\mathbf{U}(a_R, \vec{\theta})$ της SU(2), μας περιορίζει την μορφή ενός **απειροστού μετασχηματισμού ως προς το ουδέτερο στοιχείο**.

Πράγματι αν $\mathbf{U}(1, \vec{0}) \Longrightarrow \mathbf{U}(1 + \delta a_R, \delta\vec{\theta})$ τότε θα ισχύει:

$$(1 + \delta a_R)^2 + \delta\vec{\theta}^2 = 1 \;\Rightarrow \delta a_R = -\frac{1}{2}\delta\vec{\theta}^2 + O(|\delta\vec{\theta}|^4)$$

που σημαίνει ότι σε τάξη $|\delta\vec{\theta}|$ είναι $\delta a_R = 0$.

Επομένως μια απειροστή μεταβολή του ουδέτερου στοιχείου $\mathbf{U}(1, \vec{0})$ θα δίνεται από τον πίνακα:

$$\mathbf{U}(1, \delta\vec{\theta}) \quad \text{με} \quad |\delta\vec{\theta}| \ll 1$$

Αν θεωρήσουμε $\delta\vec{\theta} = (\delta\theta_1, 0, 0)$ μπορούμε να προσδιορίσουμε το όριο:

$$\lim_{\delta\theta_1 \to 0} \frac{\mathbf{U}(1,\delta\vec{\theta}) - \mathbf{U}(1,\vec{0})}{\delta\theta_1} \;=\; \lim_{\delta\theta_1 \to 0} \frac{\mathbf{I} + i\delta\theta_1 \boldsymbol{\sigma_1} - \mathbf{I}}{\delta\theta_1} \;=\; i\boldsymbol{\sigma_1}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον συμβολισμό $\boldsymbol{\sigma_x} \;\equiv\; \boldsymbol{\sigma_1}$. Μπορούμε να εργαστούμε αντίστοιχα και για $\delta\vec{\theta} = (0, \delta\theta_2, 0)$, $\delta\vec{\theta} = (0, 0, \delta\theta_3)$ για να καταλήξουμε στη γενική σχέση:

$$\lim_{\delta\theta_k \to 0} \frac{\mathbf{U}(1,\delta\vec{\theta}) - \mathbf{U}(1,\vec{0})}{\delta\theta_k} \;=\; \lim_{\delta\theta_k \to 0} \frac{\mathbf{I} + i\delta\theta_k \boldsymbol{\sigma_k} - \mathbf{I}}{\delta\theta_k} \;=\; i\boldsymbol{\sigma_k} \qquad \text{με } k = 1,2,3$$

Προφανώς $\boldsymbol{\sigma_y} \;\equiv\; \boldsymbol{\sigma_2}$ και $\boldsymbol{\sigma_z} \;\equiv\; \boldsymbol{\sigma_3}$.

Οι πίνακες $\mathbf{X}_k = \frac{1}{i}\frac{\partial \mathbf{U}(1,\vec{\theta})}{\partial\theta_k}\Big|_{\vec{\theta}=\vec{0}} \;=\; \boldsymbol{\sigma_k}$ με $k = 1,2,3$ είναι οι **γεννήτορες της SU(2)**.

$$\Downarrow$$

Η SU(2) είναι μη αβελιανή ομάδα Lie!

Άλγεβρα Lie

Οι απειροστοί μετασχηματισμοί:

$$\mathbf{U}(1,\delta\vec{\theta}) \;=\; \mathbf{I} + i\sum_{k=1}^{3} \mathbf{X}_k \delta\theta_k$$

προσεγγίζουν με **αναλυτικό** τρόπο το ουδέτερο στοιχείο $\mathbf{U}(1,\vec{0})$.

Ισχύει ότι $\mathbf{X}_k = \sigma_{\boldsymbol{k}}$ και για τους $\sigma_{\boldsymbol{k}}$ γνωρίζουμε ότι:

- $\sigma_{\boldsymbol{k}}{}^{\dagger} \;=\; \sigma_{\boldsymbol{k}} \qquad ; \qquad \sigma_{\boldsymbol{k}}{}^{2} \;=\; \mathbf{I}.$

- $\sigma_{\boldsymbol{k}}\sigma_{\boldsymbol{\ell}} \;=\; i\epsilon_{k\ell m}\sigma_{\boldsymbol{m}} + \delta_{k\ell}\mathbf{I} \qquad ; \qquad [\sigma_{\boldsymbol{k}}, \sigma_{\boldsymbol{\ell}}] \;=\; 2i\epsilon_{k\ell m}\sigma_{\boldsymbol{m}}.$

Επομένως για τους γεννήτορες $\mathbf{X}_k$ της SU(2) θα ισχύει:

$$[\boldsymbol{X_k}, \boldsymbol{X_\ell}] \;=\; 2i\epsilon_{k\ell m}\boldsymbol{X_m}$$

Μπορούμε να δούμε τον μεταθέτη $[\ ,\ ]$ ως **γινόμενο**:

Απεικονίζει δύο γεννήτορες σε ένα τρίτο

οπότε οι **γεννήτορες** (λόγω κλειστότητας του γινομένου αυτού) ορίζουν ένα **διανυσματικό χώρο** $\mathbb{L}$ εφοδιασμένο με **γινόμενο μεταξύ των στοιχείων του**!

$$\Downarrow$$

Αυτή η μαθηματική δομή λέγεται **άλγεβρα**

Το γινόμενο $[\ ,\ ] : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}$ έχει τις ιδιότητες:

- **Αντισυμμετρία**, $[A,\ B] \ = \ -[B,\ A] \quad \forall\ A,\ B\ \in\ \mathbb{L}$.
- **Διγραμμικότητα**, $[A,\ \lambda_1 B + \lambda_2 C] \ = \ \lambda_1 [A,\ B] + \lambda_2 [A,\ C]$ και $[\lambda_1 A + \lambda_2 B, C] \ = \ \lambda_1 [A,\ C] + \lambda_2 [B,\ C]$.
- Ικανοποιεί την **ταυτότητα Jacobi** (αντί προσεταιριστικής):

$$[[A,\ B],\ C] + [[B,\ C],\ A] + [[C,\ A],\ B] \ = \ 0$$

Άλγεβρα Lie, γινόμενο Lie

Γενική ιδιότητα των ομάδων Lie:

Οι **γεννήτορες** μιας **ομάδας Lie** ορίζουν την αντίστοιχη **άλγεβρα Lie** μέσω του **γινομένου Lie:**

$$[X_k, \ X_\ell] \ = \ \sum_m C_{k,\ell}^m X_m$$

Οι συντελεστές $C_{k,\ell}^m$ λέγονται **σταθερές δομής** της αντίστοιχης άλγεβρας Lie.

Την άλγεβρα Lie που αντιστοιχεί στην ομάδα SU(2) την συμβολίζουμε με $su(2)$. Η αντιστοιχία **ομάδας** $\leftrightarrow$ **άλγεβρας** δεν είναι $1-1$.

$$\Downarrow$$

Διαφορετικές ομάδες μπορούν να έχουν την ίδια άλγεβρα. Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο!

Για την $su(2)$: $C_{k,\ell}^m \ = \ 2i\epsilon_{k\ell m}$

Σύνδεση της $su(2)$ με την άλγεβρα στροφορμών

Στην Κβαντική Μηχανική οι τελεστές στροφορμής αποτελούν τους γεννήτορες στροφών σε τρεις διαστάσεις και ικανοποιούν την άλγεβρα:

$$[\mathbf{L}_k,\ \mathbf{L}_\ell] \ = \ i\epsilon_{k\ell m}\mathbf{L}_m \quad , \quad k,\ \ell,\ m \in \{1,\ 2,\ 3\}$$

Μπορούμε να φέρουμε την άλγεβρα $su(2)$ στην ίδια μορφή ορίζοντας ως γεννήτορες τους πίνακες:

$$\mathbf{X}_k \ = \ \frac{\sigma_k}{2}$$

$$\Downarrow$$

Η άλγεβρα στροφορμών (γεννητόρων της SO(3)) είναι ισόμορφη με την άλγεβρα $su(2)$!

Αυτός ο ισομορφισμός μας επιτρέπει να ερμηνεύσουμε τα στοιχεία της SU(2) ως στροφές:

$\underline{\mathrm{SU}(2)}$	$\underline{\mathrm{SO}(3)}$
παράμετροι $\underbrace{(a_R, \vec{\theta})}_{4\ \text{β. ε.}}$	παράμετροι $\underbrace{(\vec{n}, \phi)}_{3\ \text{β. ε.}}$ $(\vec{n}^2 = 1)$
+ σύνδεσμος $a_R^2 + \vec{\theta}^2 = 1$	$\vec{n}$ άξονας στρ. ϕ γωνία στρ.

$$\mathbf{U}(1, \delta\vec{\theta}) = \mathbf{I} + i\ \vec{\mathbf{X}} \cdot 2\delta\vec{\theta} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{O}(\vec{n}, \delta\phi) = \mathbf{I} + i\ \vec{n} \cdot \vec{\mathbf{L}}\delta\phi$$

$$\mathbf{U}(a_R, \vec{\theta}) = a_R\mathbf{I} + i\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\theta} \qquad \qquad \mathbf{O}(\vec{n}, \phi) = e^{i\ \vec{n}\cdot\vec{\mathbf{L}}\phi}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{2\ \delta\vec{\theta}\ \leftrightarrow\ \vec{n}\ \delta\phi \quad , \quad \vec{\mathbf{X}}\ \leftrightarrow\ \vec{\mathbf{L}}}$$

Υπόθεση: Τα στοιχεία της SU(2) μπορούν να γραφούν ως:

$$\mathbf{U}(\phi, \vec{n}) \ = \ e^{i\ \vec{n}\cdot\vec{\mathbf{X}}\phi} \quad \text{με} \quad \vec{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$$

Πράγματι:

$$\mathbf{U}(\phi,\vec{n}) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{i\;\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\phi}{2}\right)^{k} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^{2k}}{2k!}\left(\frac{i\;\phi}{2}\right)^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^{2k+1}}{(2k+1)!}\left(\frac{i\;\phi}{2}\right)^{2k+1}$$

και επειδή: $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 \;=\; \mathbf{I}$ παίρνουμε:

$$\mathbf{U}(\phi,\vec{n}) \;=\; \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^{2k}\right]}_{\cos(\frac{\phi}{2})}\mathbf{I}+\;i\;\underbrace{\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^{2k+1}\right]}_{\sin(\frac{\phi}{2})}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{U}(\phi,\vec{n}) \;=\; \cos(\frac{\phi}{2})\mathbf{I}+i\;\sin(\frac{\phi}{2})(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) \;=\; e^{\frac{i}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\phi}$$

Οπότε: $a_R=\cos(\frac{\phi}{2})$, $\vec{\theta}=\vec{n}\sin(\frac{\phi}{2})$ και $\mathbf{U}(4\pi,\vec{n}) \;=\; \mathbf{I} \Rightarrow\; \phi \;\in\; [0,4\pi)$

Επίσης $\mathbf{U}(2\pi,\vec{n})=-\mathbf{U}(0,\vec{n})=-\mathbf{I}\Rightarrow$ Η SU(2) περιέχει ως υποομάδα την C_2 και ισχύει $\mathrm{SU}(2)/C_2\cong \mathrm{SO}(3)$.