ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2019-2020

Φώτιος Κ. Διάκονος

Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

20. Η ομάδα Lie SU(N) και οι αναπαραστάσεις της

Η μελέτη της SU(2) και της αντίστοιχης Lie άλγεβρας $\mathrm{su}(2)$ γενικεύεται στην ομάδα Lie SU(N) με Lie άλγεβρα την $\mathrm{su}(\mathrm{N})$ $(N > 2)$ ως εξής:

- **Αριθμός γεννητόρων**: Ο πίνακας $\mathbf{U}$ στοιχείου της SU(N) στη θεμελιώδη αναπαράσταση θα είναι $N \times N$ και μοναδιακός με ορίζουσα $\det(\mathbf{U}) = 1 \Rightarrow$ οι **ανεξάρτητες πραγματικές παράμετροι** που καθορίζουν τα στοιχεία του $\mathbf{U}$ θα είναι:

$$\underbrace{\frac{2(N^2 - N)}{2}}_{\text{ερμιτιανότητα εκτός διαγωνίου}} + \underbrace{N}_{\text{διαγώνιος}} - \underbrace{1}_{\det(\mathbf{U})=1} = N^2 - 1$$

- Οι **γεννήτορες** X_j είναι **ερμιτιανοί** $N \times N$ πίνακες με $\mathrm{Tr}(X_j) = 0$ και $j = 1, 2, \ldots, N^2 - 1$ που ικανοποιούν την άλγεβρα Lie:

$$\left[\mathbf{X}_j, \ \mathbf{X}_k\right] = i \, C^{\ell}_{jk} \mathbf{X}_\ell \qquad ; \qquad C^{\ell}_{jk} = \text{σταθερές δομής}$$

- Η su(N)-άλγεβρα Lie των γεννητόρων $\mathbf{X}_j$ της SU(N) περιέχει την **υποάλγεβρα Cartan** που αποτελείται από $N-1$ γεννήτορες $\{H_a\}$ $(a = 1, \ ,2, \ldots, \ N-1)$ που **μετατίθενται μεταξύ τους** και επομένως μπορούν να γραφτούν **ταυτόχρονα σε διαγώνια μορφή**.

- Υπάρχουν $N-1$ **τελεστές Cassimir** (πολλαπλάσιοι του ταυτοτικού τελεστή) που κατασκευάζονται από τους γεννήτορες $\mathbf{X}_j$ $(j = 1, \ 2, \ldots, \ N^2-1)$:

$$\mathbf{C_k} \ = \ \sum_{j=1}^{N^2-1} a_{jk}\mathbf{X}_j^{k+1}, \qquad k = 1, \ 2, \ldots, \ N-1 \quad \text{με } a_{jk} \ \in \ \mathbb{R} \ \text{ και } a_{j1} = 1$$

- Οι αναπαραστάσεις της su(N) καθώς και των στοιχείων στης SU(N) θα καθορίζονται από τις ιδιοτιμές των τελεστών Cassimir και των $\{H_a\}$ που έχουν κοινές ιδιοκαταστάσεις.

Υποάλγεβρα Cartan

Οι διαγώνιοι τελεστές $\mathbf{H}_a$ $(a = 1,\ 2, \ldots,\ N-1)$ της υποάλγεβρας Cartan γράφονται:

$$\mathbf{H}_a \;=\; \mathcal{N}_a \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0}}^{a} \hphantom{\quad 0 \quad \ldots \quad 0} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -a & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

με κανονικοποίηση: $\mathrm{Tr}(\mathbf{H}_a^2) = \frac{1}{2}$ (προσαρμογή στην $\mathrm{su}(2)$)

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{N}_a \;=\; \frac{1}{\sqrt{2a(a+1)}}$$

Οι υπόλοιποι γεννήτορες είναι $N^2 - 1 - (N-1) \;=\; N(N-1)$. Μπορούμε να τους γράψουμε στην μιγαδοποιημένη άλγεβρα Lie ως εξής:

$$(\mathbf{E}_{\alpha\beta})_{ij} \;=\; \delta_{\alpha i}\,\delta_{\beta j} \qquad (\alpha,\beta,i,j = 1,\; 2, \ldots,\; N, \quad \alpha \neq \beta)$$

όπου αν $\alpha \;<\; \beta \Rightarrow \mathbf{E}_{\alpha\beta} \;\rightarrow\;$ τελεστές ανόδου

ενώ αν $\alpha \;>\; \beta \Rightarrow \mathbf{E}_{\alpha\beta} \;\rightarrow\;$ τελεστές καθόδου

Έστω $|j\rangle$ ιδιοδιάνυσμα του $\mathbf{H}_a$ με ιδιοτιμή $w_a^{(j)}$:

$$\mathbf{H}_a|j\rangle \;=\; w_a^{(j)}|j\rangle \qquad \text{με } j = 1,\; 2, \ldots,\; N$$

Οι $N-1$ ιδιοτιμές $w_a^{(j)}$ των $\mathbf{H}_a$ σχηματίζουν το **άνυσμα βαρών** $\vec{w}^{(j)}$ με συνιστώσες που λέγονται **βάρη**.

Με αυτή την επιλογή ισχύουν οι κανόνες μετάθεσης:

$$\Big[\mathbf{H}_a, \mathbf{E}_{\alpha\beta}\Big] \;=\; \rho_a^{(\alpha\beta)}\mathbf{E}_{\alpha\beta} \qquad\qquad \text{(απόδειξη σαν άσκηση)}$$

όπου $\vec{\rho}^{(\alpha\beta)} \;=\; \vec{w}^{(\alpha)} - \vec{w}^{(\beta)}$ τα **ανύσματα ριζών** της $\mathbf{su}(\mathbf{N})$.

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- $\rho_a^{(\alpha\beta)} \;=\; -\rho_a^{(\beta\alpha)}$.
- $\left[\mathbf{H}_a,\ \mathbf{E}_{\alpha\beta}\right]|j\rangle \;=\; \rho_a^{(\alpha\beta)}\mathbf{E}_{\alpha\beta}|j\rangle \quad\Rightarrow\quad \mathbf{H}_a\mathbf{E}_{\alpha\beta}|j\rangle \;=\; (\rho_a^{(\alpha\beta)} + w_a^{(j)})\mathbf{E}_{\alpha\beta}|j\rangle$.

Ας δούμε για παράδειγμα την περίπτωση της $\mathrm{su}(3)$ (θεμελιώδης αναπαράσταση):

- $N = 3 \Rightarrow N^2 - 1 = 8$ γεννήτορες.
- $N - 1 = 2$ γεννήτορες σε διαγώνια μορφή (υποάλγεβρα Cartan) και 2 τελεστές Cassimir. $N^2 - 1 - (N-1) = 6$ τελεστές ανόδου-καθόδου: $\mathbf{E}_{12}$, $\mathbf{E}_{13}$, $\mathbf{E}_{23}$ (ανόδου) και $\mathbf{E}_{21}$, $\mathbf{E}_{31}$, $\mathbf{E}_{32}$ (καθόδου).
- Οι γεννήτορες $\mathbf{H}_a$ της υποάλγεβρας Cartan έχουν την μορφή:

$$\mathbf{H}_1 \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{H}_2 \;=\; \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Οι πίνακες ανόδου έχουν την μορφή:

$$\mathbf{E}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{E}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{E}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ενώ οι πίνακες καθόδου είναι:

$$\mathbf{E}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{E}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{E}_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Τα $N = 3$ ανύσματα βαρών είναι:

$$\vec{w}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{w}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{w}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

- Τα $N = 6$ ανύσματα ριζών είναι: $\vec{\rho}^{(12)} = \vec{w}^{(1)} - \vec{w}^{(2)} \; = \; -\vec{\rho}^{(21)}$
$\vec{\rho}^{(13)} = \vec{w}^{(1)} - \vec{w}^{(3)} \; = \; -\vec{\rho}^{(31)} \quad ; \quad \vec{\rho}^{(23)} = \vec{w}^{(2)} - \vec{w}^{(3)} \; = \; -\vec{\rho}^{(32)}$

Η εύρεση των ΜΑ, ΜΙ αναπαραστάσεων της su(N) γίνεται με χρήση κοινών ιδιοδιανυσμάτων των τελεστών Cassimir $\{\mathbf{C}_k\}$ και των γεννητόρων $\{\mathbf{H}_a\}$ της υποάλγεβρας Cartan (με $k = 1,\ 2, \dots,\ N-1$ και $a = 1,\ 2, \dots,\ N-1$) στην εκάστοτε αναπαράσταση $\boldsymbol{\pi}$.

Έστω $|\{c_k^{d_\pi}\},\ \vec{w}^{(j_{d_\pi})}\rangle$ ένα τέτοιο ιδιοδιάνυσμα. Τότε μπορούμε θεωρητικά να κατασκευάσουμε άλλα ιδιοδιανύσματα με ίδιο σετ $\{c_k^{d_\pi}\}$ (και επομένως ΜΑ αναπαράσταση της $\mathrm{su(N)}$) επιδρώντας με τον πίνακα αναπαράστασης κάποιου τελεστή ανόδου $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{E}_{\alpha\beta})$ (ή καθόδου $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{E}_{\beta\alpha})$): $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{E}_{\alpha\beta})|\{c_k^{d_\pi}\},\ \vec{w}^{(j_{d_\pi})}\rangle$

με $$\boldsymbol{\pi}(\mathbf{H}_a)\boldsymbol{\pi}(\mathbf{E}_{\alpha\beta})|\{c_k^{d_\pi}\},\ \vec{w}^{(j_{d_\pi})}\rangle \ = \ (\rho_a^{(\alpha\beta,\pi)} + w_a^{(j_{d_\pi})})\boldsymbol{\pi}(\mathbf{E}_{\alpha\beta})|\{c_k^{d_\pi}\},\ \vec{w}^{(j_{d_\pi})}\rangle$$

και ακολουθώντας διαδικασία ανάλογη με την περίπτωση της $\mathrm{su}(2)$. **Δυσκολία:** Υπάρχουν μη αβελιανές υποομάδες, για $N > 2$, που δημιουργούν **εκφυλλισμούς**. Για παράδειγμα στην $\mathrm{su}(3)$:

Οι πίνακες $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{E}_{12}$ και $\mathbf{E}_{21}$ συνιστούν $\mathrm{su}(2)$ υποομάδα της $\mathrm{su}(3)$.

Η τεχνική των Yang Tableaux

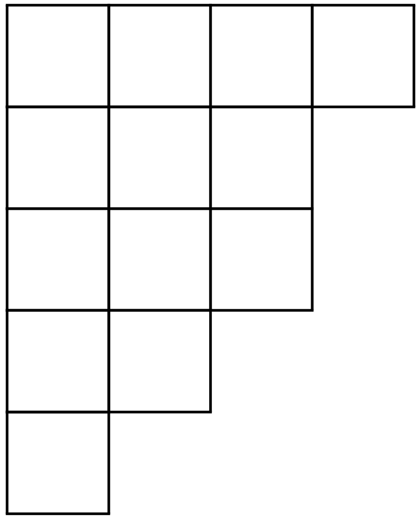
Καθώς αυξάνεται το N η εύρεση ΜΑ αναπαραστάσεων της $\mathrm{su(N)}$ γίνεται πολύ πολύπλοκη κυρίως λόγω των αυξανομένων εκφυλλισμών.

Τα **Yang-Tableaux** συνοψίζουν τη διαδικασία διαχείρισης των εκφυλλισμών και την εύρεση ΜΑ αναπαραστάσεων της SU(N) σε μερικούς απλούς κανόνες.

- Κάθε διάνυσμα του χώρου που δρουν οι πίνακες της θεμελιώδους αναπαράστασης της SU(N) (ή των γεννητόρων της $\mathrm{su(N)}$) συμβολίζεται με ένα ορθογώνιο κουτί:

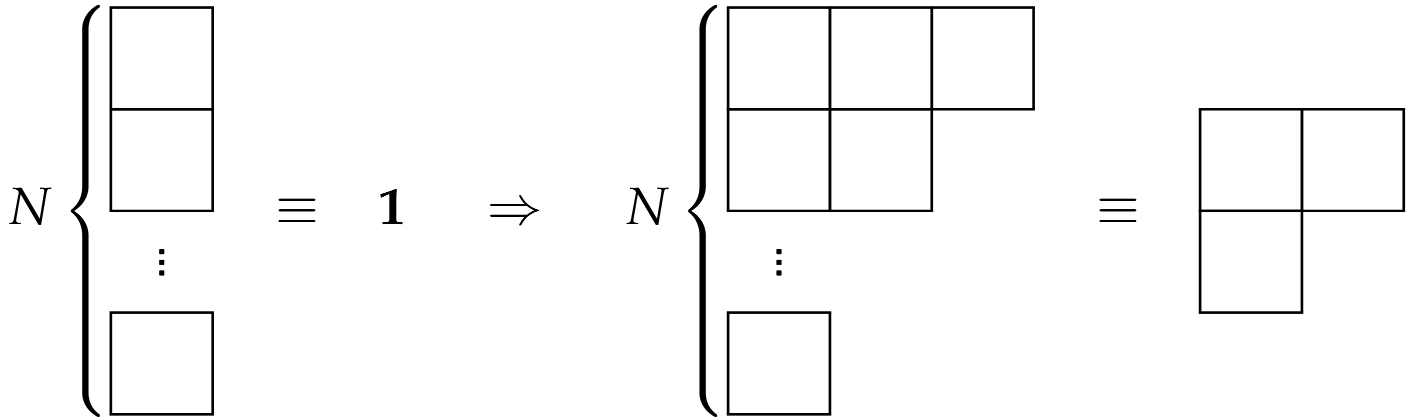
$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \cdots \\ \psi_{N-1} \\ \psi_N \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{}$$

- Το Yang tableau είναι ένα διάγραμμα από **γραμμές κουτιών στοιχισμένες** *αριστερά* έτσι ώστε κάθε γραμμή να **μην είναι μακρύτερη από την από πάνω της**.



- Κάθε στήλη **δεν μπορεί** να περιέχει περισσότερα από N κουτιά.

- Κάθε στήλη με ακριβώς N κουτιά αντιστοιχεί στην τετριμμένη αναπαράσταση και μπορεί να διαγραφεί!



- Κάθε διάγραμμα (Young tableau) που σέβεται τους προαναφερθέντες κανόνες, αντιστοιχεί σε μια ΜΑ αναπαράσταση της SU(N). Ισχύει και το αντίστροφο.

- Η μιγαδική συζυγής αναπαράσταση μιας ΜΑ προσδιορίζονται αντικαθιστώντας στήλες με k κουτιά με στήλες με $N-k$ κουτιά προσέχοντας την διατήρηση της **αριστερής στοίχισης**.

- Η διάσταση της ΜΑ της SU(N) που απεικονίζεται με ένα Young tableau προσδιορίζεται ως εξής:

N	N+1	N+2
N-1	N	
N-2	N-1	
N-3		

$\Rightarrow$ Αριθμητής : N(N+1)(N+2)(N-1)N(N-2)(N-1)(N-3)

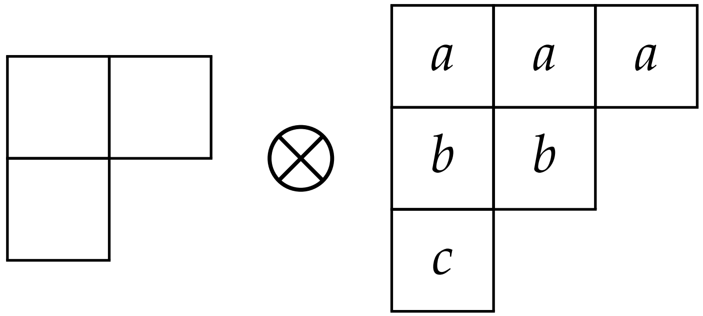
6	4	1
4	2	
3	1	
1		

$\Rightarrow$ Παρονομαστής : $6 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$

$$D = \frac{\text{Αριθμητής}}{\text{Παρονομαστής}} = \frac{N^2(N^2-1)(N^2-4)(N-3)}{576}$$

Αποσύνθεση αναγωγίμων αναπαραστάσεων

ευθύ γινόμενο:



Κανόνες:

- Σε κάθε γραμμή του δεύτερου tableau αντιστοιχεί ένα σύμβολο.
- Προσαρτούμε ένα-ένα τα κουτιά του δεύτερου tableau στο πρώτο με όλους τους δυνατούς τρόπους, σεβόμενοι απόλυτα την σειρά τους: το a προηγείται του b, το b προηγείται του c κ.ο.κ. Επίσης σε μία στήλη δεν επιτρέπεται να υπάρχει ένα σύμβολο πάνω από μία φορά.
- Δύο tableaux με πανομοιότυπο σχήμα αλλα διαφορετική διάταξη συμβόλων πρέπει να παραμείνουν στο ευθύ άθροισμα. Αν έχουν και την ίδια διάταξη συμβόλων παραμένει μόνο το ένα.

- Στα tableaux που σχηματίζονται κατά την διαδικασία προσάρτησης καταμετρώντας τα σύμβολα στα κουτιά από δεξιά προς τα αριστερά ξεκινώντας από την πρώτη γραμμή, δεν επιτρέπεται σε κάθε τρέχον κουτί να εμφανίζονται περισσότερα b από a, περισσότερα c από b κ.ο.κ.

Εφαρμογή: Στην SU(3)

$$\ydiagram{2,1} \;\bigotimes\; \begin{ytableau} a & a \\ b \end{ytableau} \;=\; \left(\begin{ytableau} {} & {} & a \\ {} \end{ytableau} \;\bigoplus\; \begin{ytableau} {} & {} \\ {} & a \end{ytableau} \;\bigoplus\; \ydiagram{1} \right) \;\bigotimes\; \begin{ytableau} a \\ b \end{ytableau} \;=$$

$$\left(\begin{ytableau} {} & {} & a & a \\ {} \end{ytableau} \;\bigoplus\; \begin{ytableau} {} & {} & a \\ {} & a \end{ytableau} \;\bigoplus\; \begin{ytableau} {} \\ a \end{ytableau} \bigoplus\; \begin{ytableau} {} & a \end{ytableau} \right) \;\bigotimes\; \begin{ytableau} b \end{ytableau} \;=$$

$$\begin{ytableau} {} & {} & a & a \\ {} & b \end{ytableau} \;\bigoplus\; \begin{ytableau} {} & {} & a \\ {} & a & b \end{ytableau} \;\bigoplus\; \begin{ytableau} {} & a & a \end{ytableau} \bigoplus\; \begin{ytableau} {} & a \\ a \end{ytableau} \;\bigoplus\; \begin{ytableau} {} & a \\ b \end{ytableau} \;\bigoplus\; \mathbf{1} \quad \Rightarrow$$

$$8 \otimes 8 \;=\; 27 \;\bigoplus\; 10 \;\bigoplus\; 10 \;\bigoplus\; 8 \;\bigoplus\; 8 \;\bigoplus\; \mathbf{1}$$