ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Ακαδημαικό έτος 2019-2020

Φώτιος Κ. Διάκονος

Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

2. Κατασκευή της G_3

Η ομάδα με τρία στοιχεία θα είναι το σύνολο: $G_3 = \{g_1, g_2, g_3\}$.
Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό: $g_1 \to e$, $g_2 \to g_2$ και $g_3 \to g_3$ γράφοντας: $G_3 = \{e, g_2, g_3\}$.

Για να ορίσουμε την G_3 αρκεί να προσδιορίσουμε τον **πίνακα πολλαπλασιασμού** της ομάδας σύμφωνα με τα εξής:

- Ισχύει προφανώς ότι: $e \circ G_3 = \{e \circ e,\ e \circ g_2,\ e \circ g_3\} = \{e,\ g_2,\ g_3\}$.

- Ισχύει το θεώρημα αναδιάταξης της ομάδας:

$$g_2 \circ G_3 = G_3 \quad ; \quad g_3 \circ G_3 = G_3$$

- Από τον ορισμό της ομάδας και το θεώρημα αναδιάταξης επάγονται οι χρήσιμες ιδιότητες (όπου $g_i \neq g_j$, $g_i, g_j \neq e$):

$$g_i \circ g_i \neq g_i \quad ; \quad g_i \circ g_j \neq g_j \text{ και } g_i \circ g_j \neq g_i$$

Ας προσπαθήσουμε με βάση τα προηγούμενα να συμπληρώσουμε τον πίνακα πολλαπλασιασμού της G_3:

G_3	e	g_2	g_3
e	e	g_2	g_3
g_2	g_2	$g_2 \circ g_2$	$g_2 \circ g_3$
g_3	g_3	$g_3 \circ g_2$	$g_3 \circ g_3$

Με βάση τις ιδιότητες που προαναφέρθηκαν προφανώς θα ισχύει:

$$g_2 \circ g_3 = e = g_3 \circ g_2$$

οπότε από το θεώρημα της αναδιάταξης:

$$g_2 \circ g_2 = g_3 \quad \text{και} \quad g_3 \circ g_3 = g_2$$

Έχουμε λοιπόν τον πίνακα πολλαπλασιασμού:

G_3	e	g_2	g_3
e	e	g_2	g_3
g_2	g_2	g_3	e
g_3	g_3	e	g_2

Παρατηρήσεις

- Το στοιχείο g_2 επαρκεί για την κατασκευή όλης της ομάδας αφού $g_2^2 = g_3$ και $g_2^3 = e$.

- Με βάση τα ανωτέρω το g_2 έχει τάξη 3. Ποιά είναι η τάξη του g_3;

- Το g_2 είναι **γεννήτορας** της G_3! Είναι μοναδικός;

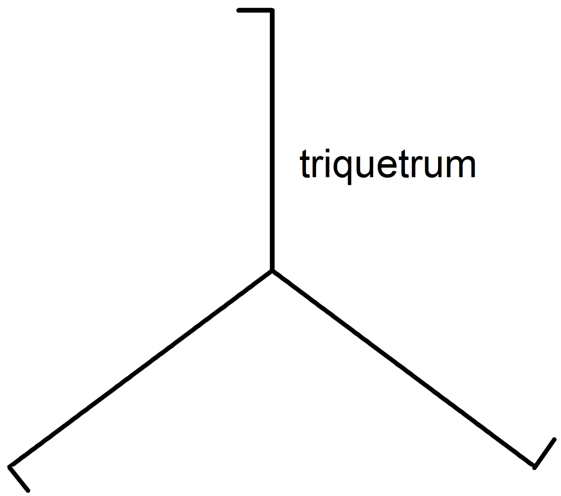
- Επειδή $\forall\ g_i,\ g_j$ της G_3 ισχύει: $g_i \circ g_j = g_j \circ g_i$, η G_3 είναι **αβελιανή** ομάδα.

- **Υποομάδες** της G_3: $\{e\}$ (τετριμένη), G_3 (μη γνήσια).

- Κάθε πεπερασμένη ομάδα που έχει γεννήτορα **ένα μόνο** στοιχείο λέγεται **κυκλική** ομάδα.

- Κάθε κυκλική ομάδα είναι προφανώς αβελιανή.

Γεωμετρική αναπαράσταση της G_3:



3. Κατασκευή της G_4

Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε την $G_4 = \{e,\ g_2,\ g_3,\ g_4\}$. Ας δούμε τον πίνακα πολλαπλασιασμού ακολουθώντας τους κανόνες που προαναφέραμε.

G_4	e	g_2	g_3	g_4
e	e	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	$g_2 \circ g_2$	e ή g_4	e ή g_3
g_3	g_3	e ή g_4	$g_3 \circ g_3$	e ή g_2
g_4	g_4	e ή g_3	e ή g_2	$g_4 \circ g_4$

Παρατηρούμε ότι έχουμε δύο επιλογές για το γινόμενο: $g_2 \circ g_3$.

$$g_2 \circ g_3 = \begin{cases} e \Rightarrow g_2 \circ g_4 = g_3,\ g_2 \circ g_2 = g_4,\ \ldots. \\ g_4 \Rightarrow \begin{cases} g_2 \circ g_4 = e,\ g_2 \circ g_2 = g_3,\ \ldots. \\ g_2 \circ g_4 = g_3,\ g_2 \circ g_2 = e,\ \ldots. \end{cases} \end{cases}$$

1ο σενάριο: $g_2 \circ g_3 = e$

$G_4^{(1)}$	e	g_2	g_3	g_4
e	e	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	g_4	e	g_3
g_3	g_3	e	g_4	g_2
g_4	g_4	g_3	g_2	e

2ο σενάριο: $g_2 \circ g_3 = g_4$

$G_4^{(2)}$	e	g_2	g_3	g_4
e	e	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	e	g_4	g_3
g_3	g_3	g_4	e	g_2
g_4	g_4	g_3	g_2	e

- Σενάριο 1: g_2, g_3 είναι τάξης 4 και g_4 τάξης 2.
- Σενάριο 2: g_2, g_3 και g_4 είναι τάξης 2.
- Έχουμε 2 διαφορετικές ομάδες με 4 στοιχεία!

- Στο σενάριο 1 το στοιχείο g_2 (ή g_3) παράγει όλη την ομάδα:

$$g_2^2 = g_4 \ , \ g_2^3 = g_3 \ , \ g_2^4 = e$$

$$\Downarrow$$

Κυκλική ομάδα τάξης 4!

- Την κυκλική ομάδα τάξης n την συμβολίζουμε ως C_n.

- Επομένως στο 1ο σενάριο αντιστοιχεί η C_4 (αβελιανή).

- Υποομάδες της C_4: $\{e\}$ (τετριμμένη), C_4 (μη γνήσια) και $\{e, \ g_4\}$ (γνήσια, C_2).

- Ποια είναι η ομάδα του σεναρίου 2;

4. Ευθύ γινόμενο ομάδων

Έστω G ομάδα με πολλαπλασιασμό '$\circ$' και F ομάδα με πολλαπλασιασμό '$\times$' .

Ορίζουμε το **ευθύ γινόμενο** των ομάδων G και F:

$$\tilde{G} \;=\; G \;\otimes\; F$$

το σύνολο των στοιχείων (g, f) με $g \;\in\; G$ και $f \;\in\; F$ εφοδιασμένο με το γινόμενο '$*$' :

$$(g_1,\ f_1)\ *\ (g_2,\ f_2) = (g_1\ \circ\ g_2,\ f_1\ \times\ f_2)$$

Το $\tilde{G}$ αποτελεί ομάδα στοιχείων $(g,\ f)$ με ουδέτερο στοιχείο: $(e_G,\ e_F)$ και αντίστροφο: $(g^{-1},\ f^{-1})$.

- Μπορούμε να ορίσουμε την ομάδα $C_2 \otimes C_2$ ως:

$$\{e,g\} \otimes \{e,g\} \;=\; \{(e,e),\; (e,g),\; (g,e),\; (g,g)\}$$

- Ο αντίστοιχος πίνακας πολλαπλασιασμού είναι:

$C_2 \otimes C_2$	$\overbrace{(e,e)}^{e}$	$\overbrace{(e,g)}^{g_2}$	$\overbrace{(g,e)}^{g_3}$	$\overbrace{(g,g)}^{g_4}$
(e,e)	(e,e)	(e,g)	(g,e)	(g,g)
(e,g)	(e,g)	(e,e)	(g,g)	(g,e)
(g,e)	(g,e)	(g,g)	(e,e)	(e,g)
(g,g)	(g,g)	(g,e)	(e,g)	(e,e)

Κάνουμε την αντιστοιχία: $(e,e) \to e$, $(e,g) \to g_2$, $(g,e) \to g_3$ και $(g,g) \to g_4$. Ξαναγράφουμε τον πίνακα πολλαπλασιασμού της $C_2 \otimes C_2$ με τον νέο συμβολισμό.

$C_2 \otimes C_2$	(e,e) e	(e,g) g_2	(g,e) g_3	(g,g) g_4
(e,e) e	(e,e) e	(e,g) g_2	(g,e) g_3	(g,g) g_4
(e,g) g_2	(e,g) g_2	(e,e) e	(g,g) g_4	(g,e) g_3
(g,e) g_3	(g,e) g_3	(g,g) g_4	(e,e) e	(e,g) g_2
(g,g) g_4	(g,g) g_4	(g,e) g_3	(e,g) g_2	(e,e) e

Βλέπουμε ότι ο πίνακας πολλαπλασιασμού της $C_2 \otimes C_2$ με τον νέο συμβολισμό συμπίπτει με τον πίνακα της $G_4^{(2)}$. Αυτό είναι μια ειδική περίπτωση **απεικονίσεων μεταξύ ομάδων**:

Έστω G ομάδα με '$\circ$' και $\tilde{G}$ ομάδα με '$*$'

Μια απεικόνιση $\Phi : G \to \tilde{G}$ με:

$$\Phi(g_i) * \Phi(g_j) = \Phi(g_i \circ g_j) \quad ; \quad \forall \; g_i, \; g_j \in G$$

λέγεται **ισομορφισμός** αν $|G| = |\tilde{G}|$

και **ομοιομορφισμός** αν $|G| \neq |\tilde{G}|$

$\Downarrow$

Η $G_4^{(2)}$ είναι ισόμορφη της ομάδας $C_2 \otimes C_2$!

Συνοψίζοντας:

- Έχουμε δύο ομάδες τάξης 4: την C_4 και την $C_2 \otimes C_2$.

- Στις ομάδες τάξης m^k με $m,\ k \in \mathbb{N}$ θα υπάρχει πάντα η:

$$\underbrace{C_m \otimes C_m\ \ldots\ \otimes C_m}_{k-\text{φορές}}$$

- Μπορεί να δειχθεί ότι μία ομάδα με όλα τα στοιχεία της, πλην του ουδετέρου, τάξης 2 είναι **αβελιανή**.

  (Άσκηση για το σπίτι).