ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Ακαδημαικό έτος 2019-2020

Φώτιος Κ. Διάκονος

Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

8. Κατασκευή των G_6 (συνέχεια)

Μελετήσαμε την κυκλική C_6. Το ερώτημα είναι αν υπάρχει άλλη ομάδα τάξης 6.

Μια τέτοια ομάδα θα ήταν το σύνολο: $G_6 = \{e,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5,\ g_6\}$. με την ιδιότητα ότι κανένα από τα g_i με $2 \leq i \leq 6$ δεν έχει τάξη 6. Καταλαβαίνετε γιατί;

Επομένως όλα τα g_i με $2 \leq i \leq 6$ θα έχουν τάξη 2 ή 3 (από θεώρημα Lagrange).

Δεν μπορούν να υπάρχουν περισσότερες από μία διαφορετικές κυκλικές υποομάδες C_3.

Έστω $H_1 = \{e,\ g_2,\ g_3\}$ και $H_2 = \{e,\ g_4,\ g_5\}$ (χωρίς βλάβη γενικότητας) δύο διαφορετικές κυκλικές υποομάδες C_3 της G_6. Τότε θα ισχύουν τα εξής:

- Το στοιχείο g_6 πρέπει να έχει τάξη 2. Καταλαβαίνετε γιατί;
- Προφανώς ισχύουν οι σχέσεις:

$$g_2 \circ g_2 = g_3 \quad ; \quad g_4 \circ g_4 = g_5$$

- Η H_1 θα έχει σαν σύμπλοκο το σύνολο $\{g_4,\ g_5,\ g_6\}$, οπότε:

$$g_4 \circ \{e,\ g_2,\ g_3\} = \{g_4,\ g_5,\ g_6\}$$

$$\Downarrow$$

$$g_4 \circ g_2 = g_5 \ \text{ή}\ g_4 \circ g_3 = g_5$$

$$\Downarrow$$

$$g_4 \circ g_2 = g_4 \circ g_4 \quad \text{ή} \quad g_4 \circ g_3 = g_4 \circ g_4$$

$$(\text{άτοπο} \Rightarrow g_2 = g_4) \qquad\qquad (\text{άτοπο} \Rightarrow g_3 = g_4)$$

- Επομένως η $G_6 \neq C_6$ θα έχει ως μη τετριμμένες υποομάδες μία C_3 και τρεις C_2:

$$\{e,\ g_2,\ g_3\},\ \{e,\ g_4\},\ \{e,\ g_5\},\ \{e,\ g_6\}$$

- Υποχρεωτικά θα ισχύει:
$$\begin{aligned} g_4 \circ \{e,\ g_2,\ g_3\} &= \{g_4,\ g_5,\ g_6\} \\ g_5 \circ \{e,\ g_2,\ g_3\} &= \{g_4,\ g_5,\ g_6\} \\ g_6 \circ \{e,\ g_2,\ g_3\} &= \{g_4,\ g_5,\ g_6\} \end{aligned}$$

- Επειδή τα g_4, g_5 και g_6 δεν διακρίνονται μεταξύ τους μπορούμε να επιλέξουμε: $g_4 \circ g_2 = g_5$; $g_4 \circ g_3 = g_6$ οπότε από εκεί προκύπτει:

$$g_5 \circ g_2 = g_6 \ ; \ g_5 \circ g_3 = g_4 \ ; \ g_6 \circ g_2 = g_4 \ ; \ g_6 \circ g_3 = g_5$$

- Από τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε:

$$g_4 \circ g_5 = g_2 \ ; \ g_5 \circ g_4 = g_3 \ ; \ g_4 \circ g_6 = g_3 \ ; \ g_6 \circ g_4 = g_2$$

καθώς και $g_5 \circ g_6 = g_2$; $g_6 \circ g_5 = g_3$.

Ας προσπαθήσουμε με βάση τα προηγούμενα να συμπληρώσουμε τον πίνακα πολλαπλασιασμού της G_6:

G_6	e	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
e	e	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_2	g_2	g_3	e			
g_3	g_3	e	g_2			
g_4	g_4					
g_5	g_5					
g_6	g_6					

Ο πίνακας πολλαπλασιασμού της $G_6 \neq C_6$ είναι:

G_6	e	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
e	e	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_2	g_2	g_3	e	g_6	g_4	g_5
g_3	g_3	e	g_2	g_5	g_6	g_4
g_4	g_4	g_5	g_6	e	g_2	g_3
g_5	g_5	g_6	g_4	g_3	e	g_2
g_6	g_6	g_4	g_5	g_2	g_3	e

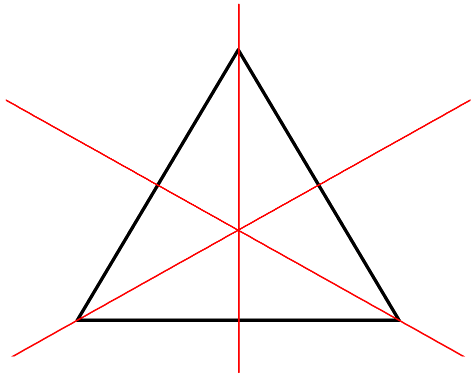
- Η ομάδα G_6 που προσδιορίσαμε είναι **μη αβελιανή**!

- **Άσκηση:** με τον πιο πάνω πίνακα κατασκευάστε όλα τα σύμπλοκα της υποομάδας $\{e,\ g_4\}$ στην G_6.

- Γεωμετρικά η κυκλική υποομάδα $C_3 = \{e,\ g_2,\ g_3\}$ περιγράφει στροφές κατά πολλαπλάσια της γωνίας $\frac{2\pi}{3}$.

- Οι C_2 υποομάδες $\{e,\ g_4\}$, $\{e,\ g_5\}$ και $\{e,\ g_6\}$ περιγράφουν ανακλάσεις.

- Η ομάδα G_6 που προσδιορίσαμε αποτελεί την ομάδα συμμετρίας του **ισόπλευρου τριγώνου**.



- Γενικά τις **ομάδες συμμετρίας κανονικών πολυγώνων** θα τις συμβολίζουμε ως D_n με n τον αριθμό των κορυφών του πολυγώνου (**dihedral group**) και $|D_n| = 2n$. Επομένως η ομάδα που προσδιορίσαμε είναι η D_3.

Υπάρχουν άλλες ομάδες με $|G| = 6$;

- Θα μπορούσε να υπάρχει ομάδα τάξης 6 με όλα τα στοιχεία της (πλην του μοναδιαίου) να είναι τάξης 2;

- Όπως δείξατε σε άσκηση μια τέτοια ομάδα θα ήταν **αβελιανή**.

- Δεν είναι δυνατόν να υπάρχει τέτοια ομάδα γιατί τότε θα ίσχυε:

$$g_2^2 = g_3^2 = g_4^2 = g_5^2 = g_6^2 = e \text{ και } g_2 \circ g_3 = \begin{cases} e \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Η επιλογή $g_2 \circ g_3 = e$ οδηγεί σε άτοπο ($g_2 = g_3$) οπότε $g_2 \circ g_3 = g_4$ (και $g_2 \circ g_4 = g_3$) χωρίς βλάβη γενικότητας, παίρνοντας τον ακόλουθο πίνακα πολλαπλασιασμού:

G_6	e	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
e	e	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_2	g_2	e	g_4	g_3	g_6	g_5
g_3	g_3	g_4	e	g_2	άτοπο	άτοπο
g_4	g_4	g_3	g_2	e		
g_5	g_5	g_6			e	
g_6	g_6	g_5				e

Παρόμοια αντίφαση θα παίρναμε αν θέταμε $g_2 \circ g_3 = g_5$ ή $g_2 \circ g_3 = g_6$.

$$\Downarrow$$

Δεν υπάρχει ομάδα τάξης 6 με όλα τα στοιχεία της (πλην του ουδετέρου) τάξης 2.

Μια άλλη επιλογή για ομάδα τάξης 6 θα ήταν **το ευθύ γινόμενο** $C_2 \otimes C_3$ με $C_2 = \{e, g_2\}$ και $C_3 = \{e, g_3, g_4\}$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της ομάδας ευθέως γινομένου δείξτε ότι $C_2 \otimes C_3 \cong C_6$.

Σύνοψη των ομάδων στην κατηγορία G_6.

- Έχουμε δύο ομάδες με $|G| = 6$: Την αβελιανή C_6 και την μη αβελιανή D_3.
- Η C_6 έχει γνήσιες υποομάδες (εκτός της τετριμμένης) μία C_2 και μία C_3. Και οι δύο είναι κανονικές υποομάδες.
- Η D_3 έχει σαν γνήσιες, μη τετριμμένες υποομάδες μια C_3 και τρεις C_2.
- Η υποομάδα $C_3 = \{e,\ g_2,\ g_3\}$ της D_3 είναι κανονική αφού:

  $g_i \circ \{e,\ g_2,\ g_3\} = \{g_4,\ g_5,\ g_6\}$ και $\{e,\ g_2,\ g_3\} \circ g_i = \{g_4,\ g_5,\ g_6\}$ για $i = 4,\ 5,\ 6$. Ειδική περίπτωση επειδή $|C_3| = \frac{|D_3|}{2}$.
- Αντίθετα οι C_2 ομάδες $\{e,\ g_4\}$, $\{e,\ g_5\}$ και $\{e,\ g_6\}$ δεν είναι κανονικές. Αυτό φαίνεται από την $\{e,\ g_4\}$:

  $$g_2 \circ \{e,\ g_4\} = \{g_2,\ g_6\} \text{ ενώ } \{e,\ g_4\} \circ g_2 = \{g_2,\ g_5\}$$

  ενώ αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν και για τις $\{e,\ g_5\}$ και $\{e,\ g_6\}$.

Παρατηρήσεις για την D_3 - η έννοια της συζυγίας.

- Από τον πίνακα πολλαπλασιασμού της D_3 βλέπουμε ότι υπάρχουν σχέσεις μεταξύ των στοιχείων της ομάδας που έχουν την μορφή:

$$g_2 \circ g_4 = g_6 = g_4 \circ g_3 \ \text{ή}\ g_2 \circ g_5 = g_4 = g_5 \circ g_3 \ \text{κ.λ.π}$$

Οι σχέσεις αυτές μπορούν να γραφτούν και ως:

$$g_4 \circ g_2 \circ g_4^{-1} = g_3 \ \text{ή}\ g_5 \circ g_2 \circ g_5^{-1} = g_3, \cdots$$

- Δύο στοιχεία a, b μιας ομάδας G που συνδέονται με τη σχέση:

$$g \circ a \circ g^{-1} = b$$

για κάποιο $g \in G$, λέγονται **συζυγή**.

- Προφανώς αν $a \sim b$ τότε και $b \sim a$ αφού:

$$g \circ a \circ g^{-1} = b \Rightarrow g^{-1} \circ b \circ g = a$$

Ας βρούμε τα συζυγή των στοιχείων της D_3:

- Προφανώς $\forall\ g_i \ \in\ D_3$ ισχύει $g_i \circ e \circ g_i^{-1} = e \Rightarrow$ Το e είναι συζυγές μόνο με τον εαυτό του!

- Για το g_2 έχουμε τις σχέσεις:

$$g_2 \circ g_2 \circ g_3 = g_2 \quad ; \quad g_3 \circ g_2 \circ g_2 = g_2$$
$$g_4 \circ g_2 \circ g_4 = g_3 \quad ; \quad g_5 \circ g_2 \circ g_5 = g_3 \quad ; \quad g_6 \circ g_2 \circ g_6 = g_3$$

- Από τις ανωτέρω σχέσεις προκύπτει $g_2 \sim g_3$ όπου '$\sim$' συμβολίζει το ¨συζυγές¨.

- Για το g_4 έχουμε:

$$g_2 \circ g_4 \circ g_3 = g_5 \quad ; \quad g_3 \circ g_4 \circ g_2 = g_6$$
$$g_4 \circ g_4 \circ g_4 = g_4 \quad ; \quad g_5 \circ g_4 \circ g_5 = g_6 \quad ; \quad g_6 \circ g_4 \circ g_6 = g_5$$

- Από όπου προκύπτει $g_4 \sim g_4,\ g_5,\ g_6$.

Η συζυγία αποτελεί ένα εναλλακτικό τρόπο διαμέρισης μιας ομάδας σε υποσύνολα.

$$\Downarrow$$

Τα υποσύνολα αυτά λέγονται **κλάσεις συζυγίας**.

Στην D_3 οι κλάσεις συζυγίας είναι τρεις:

$$\{e\}, \;\; \{g_2,\; g_3\}, \;\; \{g_4,\; g_5,\; g_6\}$$

Από αυτές μόνο η $\{e\}$ αποτελεί ομάδα (την τετριμένη).