ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2019-2020

Φώτιος Κ. Διάκονος

Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

9. Κλάσεις συζυγίας - Κανονικοποιητής

Ορισμός της συζυγίας:

Έστω a, b στοιχεία ομάδας G. Αν υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε:

$$g \circ a \circ g^{-1} = b$$

τότε τα στοιχεία a και b καλούνται **συζυγή** στοιχεία της G.

Η συζυγία χαρακτηρίζεται από τις εξής ιδιότητες:

- Ανακλαστικότητα: $a \sim a$,
- Συμμετρικότητα: $a \sim b \;\Leftrightarrow\; b \sim a$,
- Μεταβατικότητα: $a \sim b \,;\, b \sim c \;\Rightarrow\; a \sim c$, ισχύει ότι $(g_i \circ g_j)^{-1} = g_j^{-1} \circ g_i^{-1}$

$$\Downarrow$$

Σχέση **ισοδυναμίας**!

Όπως αναφέραμε ήδη στο παράδειγμα της D_3 ισχύουν επίσης οι εξής γενικές ιδιότητες της συζυγίας:

- Όλα τα **συζυγή μεταξύ τους** στοιχεία μιας ομάδας ανήκουν σε μια **κλάση συζυγίας**.
- Δύο διαφορετικά στοιχεία μίας ομάδας G μπορούν να ανήκουν μόνο σε μία κλάση συζυγίας λόγω της μεταβατικότητας και ανακλαστικότητας. Μπορείτε να το δείξετε αυτό;
- Οι διαφορετικές κλάσεις συζυγίας καλύπτουν όλα τα στοιχεία της ομάδας $\Rightarrow$ **διαμέριση** της ομάδας σε **κλάσεις συζυγίας**.

Επίσης ισχύει ότι:

τα στοιχεία μιας ομάδας G που ανήκουν στην **ίδια κλάση συζυγίας** έχουν **ίδια τάξη**!

Πράγματι έστω: $g \circ a \circ g^{-1} = b$ και $a^m = e$ τότε $a^m = (g^{-1} \circ b \circ g)^m = g^{-1} \circ b^m \circ g$. Επομένως θα ισχύει: $b^m = g \circ a^m \circ g^{-1} = e$.

Προσοχή! Δεν ισχύει το αντίστροφο:

$$\Downarrow$$

Όλα τα στοιχεία ίδιας τάξης **δεν** ανήκουν **υποχρεωτικά** στην ίδια κλάση συζυγίας!

<u>Αντιπαράδειγμα:</u>

- Ισχύει γενικά ότι σε μια αβελιανή ομάδα G κάθε στοιχείο αποτελεί κλάση συζυγίας αφού $g \circ a \circ g^{-1} = a, \quad \forall g \in G$.

- Επομένως σε μια ομάδα ευθέως γινομένου $C_2 \otimes C_2 \otimes ... \otimes C_2$ (όπως η $C_2 \otimes C_2$ που έχουμε ήδη μελετήσει) κάθε στοιχείο πλην του ουδετέρου θα έχει τάξη 2 αλλά ταυτόχρονα θα αποτελεί από μόνο του κλάση συζυγίας αφού η ομάδα είναι αβελιανή!

Είναι σημαντικό να μπορούμε να διαπιστώνουμε εύκολα πόσα στοιχεία έχει μία κλάση συζυγίας!

Για να προσδιορίσουμε την τάξη της κλάσης συζυγίας στοιχείου $g \in G$ θα ορίσουμε τον **κανονικοποιητή**.

Έστω g στοιχείο ομάδας G. Ορίζουμε ως **κανονικοποιητή του g στην G** το σύνολο: $N_g = \{g_i \in G : g_i \circ g = g \circ g_i\}$
(normalizer of g in G)

- Ο N_g **αποτελεί ομάδα**!

  Πράγματι αφού:

  1. Το ουδέτερο στοιχείο e ανήκει στον N_g: $e \circ g = g \circ e$

  2. Αν $g_i \in N_g$ τότε και $g_i^{-1} \in N_g$:

  $$g_i \circ g = g \circ g_i \Rightarrow g_i^{-1} \circ g_i \circ g = g_i^{-1} \circ g \circ g_i \Rightarrow g \circ g_i^{-1} = g_i^{-1} \circ g$$

  3. Αν $g_i,\ g_j \in N_g$ τότε και $g_i \circ g_j \in N_g$:

  $$g = g_i \circ g \circ g_i^{-1} = g_j \circ g \circ g_j^{-1} = (g_i \circ g_j) \circ g \circ (g_i \circ g_j)^{-1}$$

Δηλαδή ισχύει η **κλειστότητα**.

4. Ισχύει η **προσεταιριστική** ιδιότητα ($\circ$).

- Επίσης το g και το αντίστροφο του g^{-1} ανήκουν στον N_g:

$$g \circ g = g \circ g \quad ; \quad g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$$

- Προσοχή το N_g διαφέρει από μια συνήθη υποομάδα καθώς αναφέρεται σε συγκεκριμένο στοιχείο g.

Έστω C_g η κλάση συζυγίας του g. Θα δείξουμε ότι:

$$|C_g| = \frac{|G|}{|N_g|}$$

Έστω g στοιχείο της G και N_g ο αντίστοιχος κανονικοποιητής. Επίσης $g_i \in G$ και $g_i \notin N_g$. Τότε ισχύουν τα εξής:

- Προφανώς $g_i \circ g \circ g_i^{-1} \in C_g$ και $g_i \circ g \circ g_i^{-1} \neq g$.
- Αν $n \in N_g$ τότε $(g_i \circ n) \circ g \circ (g_i \circ n)^{-1} = g_i \circ g \circ g_i^{-1}$

$$\Downarrow$$

Όλα τα στοιχεία του **σύμπλοκου** $g_i \circ N_g$ οδηγούν μέσω συζυγίας στο **ίδιο συζυγές του** g.

- Έστω $g_j \in G$ και $g_j \notin N_g$, $g_j \notin g_i \circ N_g$. Τότε $g_j \circ g \circ g_j^{-1} \neq g_i \circ g \circ g_i^{-1}$

$$\Downarrow$$

Όμως αν $g_j \circ g \circ g_j^{-1} = g_i \circ g \circ g_i^{-1} \Rightarrow (g_j^{-1} \circ g_i) \circ g \circ (g_j^{-1} \circ g_i)^{-1} = g$

$$\Downarrow$$

$$g_j^{-1} \circ g_i = \tilde{n} \quad ; \quad \tilde{n} \in N_g \quad \Rightarrow g_i = g_j \circ \tilde{n} \quad (g_j \circ \tilde{n} \in g_j \circ N_g)$$

$$\Downarrow$$

άτοπο αφού $g_i \circ N_g \cap g_j \circ N_g = \emptyset$

Επομένως τα διαφορετικά σύμπλοκα του N_g καθορίζουν τα διαφορετικά συζυγή του g οπότε η κλάση συζυγίας C_g θα έχει τάξη $\frac{|G|}{|N_g|}$!

Παράδειγμα από D_3

Έστω το στοιχείο g_4 που είναι τάξης 2. Αυτό μετατίθεται με τον εαυτό του και το e. Οπότε $N_{g_4} = \{e,\ g_4\}$.

$$\Downarrow$$

$$|C_{g_4}| = \frac{|D_3|}{|N_{g_4}|} = \frac{6}{2} = 3$$

Πράγματι όπως είδαμε $C_{g_4} = \{g_4,\ g_5,\ g_6\}$!

Αντίθετα για το στοιχείο g_2 (τάξης 3) έχουμε $N_{g_2} = \{e,\ g_2,\ g_3\}$ και $|C_{g_2}| = 2$ σε συνέπεια με αυτό που βρήκαμε προηγουμένως: $C_{g_2} = \{g_2,\ g_3\}$.

10. Δράση ομάδας σε σύνολο - Μεταθέσεις

Έστω ομάδα $G = \{e,\ g_2, ...,\ g_{|G|}\}$ και $S = \{s_1,\ s_2, ...\}$ σύνολο. Τότε ορίζουμε ως **δράση της G στο S** μια απεικόνιση L:

$$L : G \times S \longrightarrow S$$

που τη συμβολίζουμε $L_g(s)$ με $g \in G$ και $s \in S$ που ικανοποιεί τα εξής:

- $L_g(s) \in S \quad ; \quad \forall g \in G$ και $s \in S$,
- $L_e(s) = s \quad ; \quad \forall s \in S$,
- $L_{g_i}(L_{g_j}(s)) = L_{g_i \circ g_j}(s) \quad ; \quad \forall s \in S$ και $g_i,\ g_j \in G$.

Έστω s στοιχείο του S. Τότε το σύνολο: $O_s = \{L_g(s) \quad ; \quad \forall g \in G\}$ ονομάζεται **τροχιά του s από την G**

Παραδείγματα

1. Έστω G η ομάδα των πινάκων 2×2 με ορίζουσα 1:

$$\mathbf{M} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \middle| \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

   και S το σύνολο των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^2$. Τότε η δράση ενός στοιχείου $\mathbf{M}$ της G στο S είναι το σύνηθες γινόμενο: $\mathbf{M}\vec{v}$ με $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

2. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως S και την ίδια την ομάδα G και να ορίσουμε ως απεικόνιση L την πράξη συζυγίας:

$$L_g(a) = g \circ a \circ g^{-1} \quad ; \quad g \in G \ \text{ και } \ a \in S \ (= \ G)$$

   Άσκηση: Δείξτε ότι ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες ορισμού της δράσης ομάδας σε σύνολο σε αυτή την περίπτωση.

Η ομάδα μεταθέσεων

Έστω $S = \{1,\ 2, ...,\ N\}$. Τότε το σύνολο **όλων των δυνατών $1 \to 1$ και επί απεικονίσεων από το S στο S** ορίζουν **ομάδα**. Την συμβολίζουμε ως S_N και την ονομάζουμε **συμμετρική ομάδα ή ομάδα μεταθέσεων τάξης N**.

- Η S_N γενικεύεται προφανώς για οποιοδήποτε σύνολο $S = \{s_1,\ s_2, ...,\ s_N\}$ θεωρώντας απεικονίσεις $1 \to 1$ και επί μεταξύ των δεικτών των στοιχείων του S.

- Προφανώς $|S_N| = N!$.

- Ο πολλαπλασιασμός ΄$\circ$΄ στην S_N είναι **σύνθεση συναρτήσεων**.

Παράδειγμα: η S_3

Είναι $S = \{1,\ 2,\ 3\}$ ή $S = \{s_1,\ s_2,\ s_3\}$. Συμβολισμός για την απεικόνιση $1 \to n_1$, $2 \to n_2$, $3 \to n_3$ (με $n_i,\ i = 1,\ 2,\ 3$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}$$

Η ομάδα S_3 με $|S_3| = 6$ κατασκευάζεται ως εξής:

- Ουδέτερο στοιχείο e : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

- Κυκλικές μεταθέσεις τάξης 3:

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Κυκλικές μεταθέσεις τάξης 2:

$$g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S_3 \cong D_3!$$

Θεώρημα του Cayley

Κάθε πεπερασμένη ομάδα G είναι ισόμορφη με υποομάδα της S_N με $|S_N| \geq |G|$.

- Έστω η απεικόνιση $P_{g_i} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{|G|} \\ g_i \circ g_1 & g_i \circ g_2 & \cdots & g_i \circ g_{|G|} \end{pmatrix}, \quad \forall\ g_i \in G$

  με $\{g_i \circ g_1,\ g_i \circ g_2,\ \ldots,\ g_i \circ g_{|G|}\}$ αναδιάταξη των στοιχείων της G.

- Τότε:

$$P_{g_j} * P_{g_i} = \begin{pmatrix} g_i \circ g_1 & \cdots & g_i \circ g_{|G|} \\ g_j \circ g_i \circ g_1 & \cdots & g_j \circ g_i \circ g_{|G|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_{|G|} \\ g_i \circ g_1 & \cdots & g_i \circ g_{|G|} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$P_{g_j} * P_{g_i} = P_{g_j \circ g_i}$$