ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2019-2020

Φώτιος Κ. Διάκονος

Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

12. Αναπαραστάσεις ομάδων - Βασικά Θεωρήματα

Στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε **θεμελιώδεις ιδιότητες** των πινάκων των **μη αναγωγίμων αναπαραστάσεων** σε πεπερασμένες ομάδες. Η εύρεση της **διάστασης των πινάκων** αυτών είναι μια τέτοια ιδιότητα.

Ας δώσουμε πρώτα έναν πιο αυστηρό ορισμό της αναπαράστασης ομάδας:

Αναπαράσταση A ομάδας G είναι ένας **ομοιομορφισμός** από το G στο σύνολο των **γραμμικών τελεστών** που δρουν σε **διανυσματικό χώρο** V:

$$\begin{aligned} A \;:\; G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longrightarrow A(g) \end{aligned}$$

Αν η απεικόνιση A είναι **ισομορφισμός** τότε η A είναι πιστή αναπαράσταση της G (αποτελεί και η A ομάδα).

Παραθέτουμε εδώ μερικές ιδιότητες των αναπαραστάσεων διατυπωμένες σύμφωνα με τον πιο αυστηρό ορισμό της αναπαράστασης:

Δυο αναπαράστασεις A και $\tilde{A}$ ομάδας G με πίνακες **ίδιας διάστασεις** $d \times d$ είναι **ισοδύναμες** αν και μόνο αν **υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας** S **διάστασης** $d \times d$ τέτοιος ώστε:

$$\tilde{A}(g) \;=\; S \cdot A(g) \cdot S^{-1} \quad ; \quad \forall \; g \;\in\; G$$

Κάθε αναπαράσταση πεπερασμένης ομάδας G είναι **ισοδύναμη** με μια **μοναδιακή αναπαράσταση**.

Για κάθε ομάδα G υπάρχει μια **μη πιστή** αναπαράσταση που καλείται **ταυτοτική**:

$$A(g) = \mathbf{I} \quad ; \quad \forall \; g \;\in\; G$$

όπου $\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος $d \times d$ πίνακας. Αν $d = 1$ τότε η ταυτοτική αναπαράσταση είναι και **μη αναγώγιμη**.

Η μελέτη των αναπαραστάσεων ομάδων στηρίζεται στα εξής βασικά θεωρήματα που περιορίζουν την διάσταση d:

- Η **διάσταση** d των πινάκων $A(g)$ μιας **μη αναγώγιμης αναπαράστασης** της G είναι $d < |G|$.

- Το **πρώτο** και **δεύτερο** λήμμα του Schur.

- Και το **Μεγάλο Θεώρημα Ορθογωνιότητας (ΜΘΟ)**.

Για το πρώτο θεώρημα βοηθάει ο ακόλουθος ορισμός της μη αναγώγιμης αναπαράστασης:

Μια αναπαράσταση $A : G \longrightarrow GL(V)$ είναι αναγώγιμη **αν υπάρχει υπόχωρος** $W \subset V$ (με $W \neq \{\emptyset\}$, $W \neq V$) τέτοιος ώστε:

$$A(g)w \in W \quad ; \quad \forall\, g \in G \text{ και } w \in W$$

Αν **δεν** υπάρχει τέτοιος υπόχωρος τότε η A είναι **μη αναγώγιμη**.

Θεώρημα 1

Η **διάσταση** d των πινάκων $A(g)$ μιας **μη αναγώγιμης αναπαράστασης** της G είναι $d < |G|$.

- Πράγματι σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό αν $A(g)$ αναπαράσταση ομάδας G με $d \geq |G|$ θα υπήρχε πάντα υπόχωρος W του V (με $\dim V = |G|$) που θα αντιστοιχούσε σε υποομάδα H της G, δηλ. $\dim W = |H|$ με $|H| < |G|$.

- Οπότε η $A(g)$ θα είναι **αναγώγιμη** αναπαράσταση του G.

- Η μόνη εξαίρεση είναι αν η G έχει σαν μόνες υποομάδες την τετριμμένη $\{e\}$ και την ίδια την G. Τότε όμως η G θα ήταν **κυκλική** C_p όπου p **πρώτος αριθμός**. Επομένως η G θα ήταν αβελιανή.

- Όπως θα δείξουμε στη συνέχεια **όλες οι αβελιανές ομάδες έχουν μονοδιάστατες ($d = 1$) μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις**.

Πρώτο λήμμα του Schur

Έστω $A(g)$ **μη αναγώγιμη** αναπαράσταση της G με πίνακες $d \times d$.
Επίσης, έστω M πίνακας $d \times d$ με την ιδιότητα:

$$A(g) \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot A(g) \quad ; \quad \forall\, g \in G$$

Τότε $\mathbf{M} = c\,\mathbf{I}$ με $c \in \mathbb{C}$.

- Χωρίς βλάβη γενικότητας θεωρούμε την $A(g)$ **μοναδιακή αναπαράσταση**.

- Θα ισχύει: $\mathbf{M}^\dagger A(g)^\dagger = A(g)^\dagger \mathbf{M}^\dagger$ οπότε επειδή $A(g)^\dagger = A(g)^{-1}$ θα έχουμε ότι: $\mathbf{M}^\dagger A(g) = A(g)\, \mathbf{M}^\dagger$.

- Τότε και οι **ερμιτιανοί** τελεστές:

$$\mathbf{H}_+ = \frac{1}{2}(\mathbf{M} + \mathbf{M}^\dagger) \quad ; \quad \mathbf{H}_- = \frac{1}{2i}(\mathbf{M} - \mathbf{M}^\dagger)$$

θα μετατίθενται με τα $A(g)$.

- Επειδή $\mathbf{H}_\pm$ ερμιτιανοί θα διαγωνοποιούνται από μοναδιακούς $\mathbf{U}_\pm$:

$$\mathbf{U}_\pm \mathbf{H}_\pm {\mathbf{U}_\pm}^\dagger \;=\; \mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm} \;\;\Leftrightarrow\;\; (\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm})_{n,m} \;=\; (\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm})_{n,n}\delta_{n,m}$$

- Επίσης θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\pm A(g) \;&=\; A(g)\mathbf{H}_\pm \;\Rightarrow \\ \mathbf{U}_\pm \mathbf{H}_\pm \underbrace{{\mathbf{U}_\pm}^\dagger \mathbf{U}_\pm}_{\mathbf{I}} A(g) {\mathbf{U}_\pm}^\dagger \;&=\; \mathbf{U}_\pm A(g) \underbrace{{\mathbf{U}_\pm}^\dagger \mathbf{U}_\pm}_{\mathbf{I}} \mathbf{H}_\pm {\mathbf{U}_\pm}^\dagger \end{aligned}$$

Ορίζοντας $\tilde{A}_\pm(g) = \mathbf{U}_\pm A(g) {\mathbf{U}_\pm}^\dagger$ που οι $\tilde{A}_\pm(g)$ είναι **ισοδύναμες μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις του G** παίρνουμε:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm}\tilde{A}_\pm(g) \;=\; \tilde{A}_\pm(g)\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{d} (\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm})_{n,k}(\tilde{A}(g))_{k,m} \;&=\; \sum_{k=1}^{d} (\tilde{A}(g))_{n,k}(\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm})_{k,m} \;\;\Leftrightarrow \\ \Big[(\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm})_{n,n} - (\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm})_{m,m}\Big](\tilde{A}(g))_{n,m} \;&=\; 0 \end{aligned}$$

Έστω $\lambda_{\pm,i}$ με $i = 1, .., K_{\pm}$ οι διαφορετικές ιδιοτιμές του $\mathbf{H}_{\pm} \quad \Rightarrow$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm} \; = \left[\begin{array}{cc|ccc} \lambda_{\pm,1} & & & & \\ & \lambda_{\pm,1} & & & \\ \hline & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{\pm,d-1} & \\ & & & & \lambda_{\pm,d} \end{array}\right]$$

αφού λόγω ερμιτιανότητας των $\mathbf{H}_{\pm}$ με μετάθεση στηλών του $\mathbf{U}_{\pm}$ αλλάζουμε τη σειρά των $\lambda_{\pm,i}$.

Από: $\left[(\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm})_{n,n} - (\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm})_{m,m}\right](\tilde{A}(g))_{n,m} \; = \; 0$ προκύπτει:

- Για κάθε $\ell \neq k$ με $(\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm})_{\ell,\ell} \neq (\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm})_{k,k}$ θα πρέπει $(\tilde{A}(g))_{\ell,k} \; = \; 0$.

- Ενώ $(\tilde{A}(g))_{\ell,k} \; \neq \; 0$ μόνο αν $(\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm})_{\ell,\ell} \; = \; (\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm})_{k,k}$.

$$\Downarrow$$

- Οι $(\tilde{A}(g))$ είναι block διαγώνιοι $\Rightarrow$ **άτοπο** αφού ανήκουν σε **μη αναγώγιμη** αναπαράσταση!

- Επομένως η μόνη επιλογή για τα $(\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm})_{n,n}$ συμβατή με την υπόθεση ότι οι $A(g)$ αποτελούν μη αναγώγιμη αναπαράσταση της G είναι:

$$(\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm})_{n,n} \;=\; (\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm})_{m,m} \qquad ; \qquad \forall\; n,\; m \text{ με } 1 \leq n,\; m \leq d$$

- Οπότε:

$$(\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm})_{n,m} \;=\; c_{\pm}\delta_{n,m} \qquad ; \qquad c_{\pm} \;\in\; \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{H}_{\pm} \;=\; \mathbf{U}_{\pm}{}^{\dagger}\mathbf{H}_{\mathbf{D},\pm}\mathbf{U}_{\pm} \;\Rightarrow\; \mathbf{M} \;=\; \mathbf{H}_{+} + i\mathbf{H}_{-} \;=\; (c_{+} + ic_{-})\;\mathbf{I}$$

Δεύτερο λήμμα του Schur

Έστω $A(g)$ και $B(g)$ **μη αναγώγιμες** αναπαραστάσεις της G με πίνακες $d_A \times d_A$ και $d_B \times d_B$ αντίστοιχα. Επίσης, έστω $\mathbf{M}$ πίνακας $d_A \times d_B$ με την ιδιότητα:

$$A(g) \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot B(g) \quad ; \quad \forall\ g\ \in\ G$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

- Αν $d_A \neq d_B \Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{0}$
- Αν $d_A = d_B \Rightarrow$ είτε $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ είτε $A(g) \cong B(g)$.

Θεωρούμε $A(g)$ και $B(g)$ μοναδιακές αναπαραστάσεις. Από την υπόθεση του λήμματος προκύπτει:

$$B(g)^{-1}\mathbf{M}^\dagger = \mathbf{M}^\dagger A(g)^{-1} \Rightarrow \mathbf{M}^\dagger A(g) = B(g)\mathbf{M}^\dagger \Rightarrow \mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger A(g) = \underbrace{\mathbf{M}B(g)}_{A(g)\mathbf{M}}\mathbf{M}^\dagger$$

$$\Downarrow$$

Ο πίνακας $\mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του **1ου λήμματος του Schur** $\Rightarrow \mathbf{M}\mathbf{M}^\dagger = c\ \mathbf{I}$ με $c \in \mathbb{C}$.

- $d_A = d_B$ τότε:

  – Αν $c=0$ θα ισχύει $\sum_{j=1}^{d_B} (\mathrm{M})_{i,j}(\mathrm{M}^\dagger)_{j,i} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{d_B} |\mathrm{M}_{i,j}|^2 = 0$ από όπου προκύπτει ότι $(\mathrm{M})_{i,j} = 0$ για κάθε $i = 1,\ 2, .., \ d_A$ και $j = 1,\ 2, .., \ d_B$.

  – Αν $c \neq 0$ ο M είναι αντιστρέψιμος (αφού $\det(\mathrm{M}) \neq 0$) με $\mathrm{M}^{-1} = \frac{1}{c}\mathrm{M}^\dagger$ οπότε $A(g) = \mathrm{M}B(g)\mathrm{M}^{-1}$ και οι αναπαραστάσεις $A(g)$, $B(g)$ είναι ισοδύναμες.

- $d_A \neq d_B$, έστω $d_A < d_B$ τότε ορίζουμε τον $d_B \times d_B$ πίνακα:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N}^\dagger = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^\dagger & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Άρα ισχύει: $\mathbf{M}^\dagger\mathbf{M} = \mathbf{N}^\dagger\mathbf{N}$ οπότε: $\det(\mathbf{M}^\dagger\mathbf{M}) = \det(\mathbf{N}^\dagger\mathbf{N}) = 0$.

Όμως $\det(\mathbf{M}^\dagger\mathbf{M}) = c^{d_B} = 0$ από οπου προκύπτει $c = 0$ και, όπως δείξαμε πιο πάνω, σε αυτή την περίπτωση $\mathbf{M} = \mathbf{0}$.

Σημασία του 1ου λήμματος: Έστω **H η Χαμιλτονιανή ενός συστήματος που μετατίθεται με όλα τα** $A(g)$ που ανήκουν σε **μη αναγώγιμη (ΜΑ)** αναπαράσταση ομάδας G. Τα διανύσματα $|j\rangle$ με $j = 1,\ 2, .., d_A$ αποτελούν **βάση της αναπαράστασης** $A(g)$. Τότε θα ισχύει:

$$\langle j, x|\mathbf{H}|k, y\rangle = f(x, y)\ \delta_{j,k}$$

όπου x, y **παράμετροι** της Χαμιλτονιανής.

Σημασία του 2ου λήμματος: Σύμφωνα με το 2ο λήμμα **δεν υπάρχει μετασχηματισμός** που συνδέει ΜΑ αναπαραστάσεις διαφορετικής διάστασης. Οπότε αν $A(g)$ και $B(g)$ δύο ΜΑ αναπαραστάσεις της G και $\mathbf{H}$ η ανωτέρω Χαμιλτονιανή, τότε θα ισχύει:

$$\langle a, j, x|\mathbf{H}|b, k, y\rangle = f(x, y)\ \delta_{a,b}\ \delta_{j,k}$$

όπου a, b **δείκτες της αναπαράστασης**.