ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2019-2020

Φώτιος Κ. Διάκονος
Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

13. Μεγάλο Θεώρημα Ορθογωνιότητας (Μ.Θ.Ο.)

Έστω **μη αναγώγιμες, μη ισοδύναμες** αναπαραστάσεις $A(g)$ (πίνακες διάστασης $d \times d$) και $B(g)$ (πίνακες διάστασης $d' \times d'$) ομάδας G. Τότε ισχύουν τα εξής:

$$\sum_{a=1}^{|G|} (A(g_a))_{i,i'} (B^*(g_a))_{j,j'} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{a=1}^{|G|} (A(g_a))_{i,i'} (A^*(g_a))_{j,j'} = \frac{|G|}{d}\, \delta_{i,j}\, \delta_{i',j'} \qquad (2)$$

- Για την (1) ορίζουμε αυθαίρετο $d \times d'$ πίνακα $\mathbf{X}$ και μέσω αυτού κατασκευάζουμε τον πίνακα: $\mathbf{M} = \sum_{a=1}^{|G|} A(g_a)\mathbf{X}B(g_a)^{-1}$

  Οπότε: $A(g_b)\mathbf{M}B(g_b)^{-1} = A(g_b)\sum_{a=1}^{|G|} A(g_a)\mathbf{X}B(g_a)^{-1}B(g_b)^{-1} = \mathbf{M}$

  Ο $\mathbf{M}$ ικανοποιεί τις συνθήκες του **2ου λήμματος του Schur**!

  Επειδή $A(g)$, $B(g)$ μη ισοδύναμες $\Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{0} \Rightarrow$

$$\sum_{a=1}^{|G|}\sum_{i'=1}^{d}\sum_{j'=1}^{d'} (A(g_a))_{i,i'}(\mathbf{X})_{i',j'}(B(g_a))^{-1}_{j',j} = 0$$

  Μπορούμε να επιλέξουμε τους $B(g_a)$ μοναδιακούς, οπότε:

$$\sum_{i'=1}^{d}\sum_{j'=1}^{d'} (\mathbf{X})_{i',j'}\sum_{a=1}^{|G|} (A(g_a))_{i,i'}(B^*(g_a))_{j,j'} = 0$$

  Και επειδή αυτό ισχύει για αυθαίρετο $\mathbf{X}$ τότε θα πρέπει:

$$\sum_{a=1}^{|G|} (A(g_a))_{i,i'}(B^*(g_a))_{j,j'} = 0$$

- Για την (2) ορίζουμε αντίστοιχο $d \times d$ πίνακα $\mathbf{M}$ με την βοήθεια αυθαίρετου $\mathbf{X}$: $\mathbf{M} = \sum_{a=1}^{|G|} A(g_a)\mathbf{X}A(g_a)^{-1}$

  Οπότε: $A(g_b)\mathbf{M}A(g_b)^{-1} = A(g_b)\sum_{a=1}^{|G|} A(g_a)\mathbf{X}A(g_a)^{-1}A(g_b)^{-1} = \mathbf{M}$

  Ο $\mathbf{M}$ ικανοποιεί τις συνθήκες του **1ου λήμματος του Schur**!

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{M} = c\,\mathbf{I} \Rightarrow \mathrm{Tr}\mathbf{M} = c \cdot d$$

  Θα προσδιορίσουμε την σταθερά c.

  Ισχύει: $\mathrm{Tr}\mathbf{M} = \mathrm{Tr}\left[\sum_{a=1}^{|G|} A(g_a)\mathbf{X}A(g_a)^{-1}\right] = \sum_{a=1}^{|G|} \mathrm{Tr}\mathbf{X} = |G|\mathrm{Tr}\mathbf{X}$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Tr}\mathbf{X} = \frac{c \cdot d}{|G|}$$

Έχουμε λοιπόν: $\mathbf{M} \;=\; \sum_{a=1}^{|G|} A(g_a)\mathbf{X}A(g_a)^{-1} \;=\; \frac{|G|\mathsf{Tr}\mathbf{X}}{d}\;\mathbf{I}$

$$\Downarrow$$

Με $\quad (\mathbf{M})_{i,j} \;=\; \sum_{i'=1}^{d}\sum_{j'=1}^{d}\sum_{a=1}^{|G|} (A(g_a))_{i,i'}(\mathbf{X})_{i',j'}\underbrace{(A(g_a)^{\dagger})_{j',j}}_{(A(g_a)^{*})_{j,j'}}$

και $\quad (\mathbf{M})_{i,j} \;=\; \frac{|G|\mathsf{Tr}\mathbf{X}}{d}\;\delta_{i,j} \;=\; \frac{|G|}{d}\sum_{i'=1}^{d}\sum_{j'=1}^{d}(\mathbf{X})_{i',j'}\delta_{i',j'}\delta_{i,j}$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i'=1}^{d}\sum_{j'=1}^{d}(\mathbf{X})_{i',j'}\left[\sum_{a=1}^{d}(A(g_a))_{i,i'}(A(g_a)^{*})_{j,j'} - \frac{|G|}{d}\delta_{i',j'}\delta_{i,j}\right] \;=\; 0$$

που ισχύει για οποιοδήποτε αυθαίρετο $\mathbf{X}$ οπότε θα πρέπει:

$$\sum_{a=1}^{d}(A(g_a))_{i,i'}(A(g_a)^{*})_{j,j'} - \frac{|G|}{d}\delta_{i,j}\delta_{i',j'} \;=\; 0$$

Οι ιδιότητες (1) και (2) του **Μ.Θ.Ο** μπορούν να διατυπωθούν με ενιαίο τρόπο χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό:

$$A(g_a) \quad \rightarrow \quad (A(g_a))_{i,j}^{(k)}$$

όπου το k αριθμεί τις αναπαραστάσεις: $k = 1,\ 2, \ldots,\ k_{max}$ με $\boldsymbol{k_{max}}$ = αριθμός μη ισοδύναμων, μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων της $\boldsymbol{G}$ και i, j οι δείκτες διάστασης της ομάδας: $i, j = 1,\ 2, \ldots,\ d_k$.

Τότε ισχύει:

$$\sum_{a=1}^{|G|} (A(g_a))_{i,i'}^{(k)} (A^*(g_a))_{j,j'}^{(k')} \; = \; \frac{|G|}{d_k}\, \delta_{k,k'}\, \delta_{i,j}\, \delta_{i',j'}$$

Αν δούμε τα $A(g_a))_{i,j}^{(k)}$ ως **διανύσματα σε χώρο διάστασης** $|G|$ τότε θα υπάρχουν $\sum_{k=1}^{k_{max}} d_k^2$ **διαφορετικά και κάθετα μεταξύ τους διανύσματα** οπότε θα πρέπει: $\sum_{k=1}^{k_{max}} d_k^2 \; \leq \; |G|$

Το Μ.Θ.Ο. μπορεί να διατυπωθεί και με άλλον τρόπο.

- Θέτουμε $i' = i$, $j' = j$ και αθροίζουμε ως προς i, j:

$$\sum_{a=1}^{|G|}\sum_{i=1}^{d_k}\sum_{j=1}^{d_{k'}}(A(g_a))_{i,i}^{(k)}(A^*(g_a))_{j,j}^{(k')} \;=\; \frac{|G|}{d_k}\,\delta_{k,k'}\sum_{i=1}^{d_k}\sum_{j=1}^{d_{k'}}\delta_{i,j}\delta_{i,j}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{a=1}^{|G|}\mathrm{Tr}A(g_a)^{(k)}\mathrm{Tr}A^*(g_a)^{(k')} \;=\; |G|\;\delta_{k,k'}$$

- Παρατηρούμε ότι όλοι οι πίνακες που αντιστοιχούν σε **συζυγή στοιχεία** έχουν το **ίδιο ίχνος**: Αν $g \circ g_a \circ g^{-1} = g_b$ τότε $A(g)A(g_a)A(g)^{-1} = A(g_b)$ οπότε $\mathrm{Tr}A(g_b) = \mathrm{Tr}(A(g)A(g_a)A(g)^{-1})$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Tr}A(g_b) \;=\; \mathrm{Tr}A(g_a)$$

- Όλοι οι πίνακες $A(g)$ που αντιστοιχούν σε στοιχεία της G που ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας έχουν το ίδιο ίχνος:

$$\chi_\gamma^{(k)} \longrightarrow \text{ χαρακτήρας της κλάσης συζυγίας}$$

- Ο δείκτης k αριθμεί την **μη αναγώγιμη αναπαράσταση** ενώ ο δείκτης γ την **κλάση συζυγίας**.

- Η άθροιση στο δείκτη a που αριθμεί τα στοιχεία της G μπορεί να αντικατασταθεί με άθροιση στα γ.

- Τότε το Μ.Θ.Ο., με n_γ τον αριθμό στοιχείων στη γ-κλάση συζυγίας και Γ τον αριθμό των κλάσεων, διατυπώνεται ως:

$$\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \chi_\gamma^{(k)} \chi_\gamma^{*(k')} \; n_\gamma \; = \; |G| \; \delta_{k,k'}$$

- Μπορεί να ορίσει κανείς: $\tilde{\chi}_\gamma^{(k)} \; = \; \chi_\gamma^{(k)} \sqrt{\frac{n_\gamma}{|G|}}$ και να διατυπώσει το Μ.Θ.Ο. και ως: $$\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \tilde{\chi}_\gamma^{(k)} \tilde{\chi}_\gamma^{*(k')} \; = \; \delta_{k,k'}$$

Η σχέση:

$$\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \tilde{\chi}_{\gamma}^{(k)} \tilde{\chi}_{\gamma}^{*(k')} \; = \; \delta_{k,k'}$$

μπορεί να ερμηνευθεί ως **εσωτερικό γινόμενο** σε χώρο διάστασης $\mathbf{\Gamma}$ οπότε η ορθοκανονικότητα στα k μας οδηγεί στον περιορισμό:

$$\boldsymbol{k_{max} \; \leq \; \Gamma}$$

αφού το **πλήθος** των **γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων** σε ένα διανυσματικό χώρο δεν μπορούν να υπερβούν την **διασταση του χώρου**!

$$\Downarrow$$

Ο **αριθμός μη αναγωγίμων, μη ισοδυνάμων** αναπαραστάσεων ομάδας G είναι **μικρότερος ή ίσος** με τον **αριθμό κλάσεων συζυγίας** της G

Από την σχέση ορθογωνιότητας: $\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \tilde{\chi}_{\gamma}^{(k)} \tilde{\chi}_{\gamma}^{*(k')} \;=\; \delta_{k,k'}$ προκύπτει ότι τα διανύσματα $\tilde{\chi}_{\gamma}^{(k)}$ αποτελούν βάση στις συναρτήσεις που ορίζονται στις κλάσεις συζυγίας. Αυτό οδηγεί σε μία ακόμη σχέση ορθογωνιότητας αυτή τη φορά στο χώρο των k:

$$\sum_{k=1}^{k_{max}} \tilde{\chi}_{\alpha}^{(k)} \tilde{\chi}_{\beta}^{*(k)} \;=\; \delta_{\alpha,\beta}$$

$$\Downarrow$$

Ο **αριθμός κλάσεων συζυγίας** Γ ομάδας G είναι **μικρότερος ή ίσος** με τον **αριθμό μη αναγωγίμων, μη ισοδυνάμων** αναπαραστάσεων της G: $\Gamma \;\leq\; k_{max}$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις ορθογωνιότητας για χαρακτήρες προκύπτει το πολύ σημαντικό αποτέλεσμα:

$$k_{max} \;=\; \Gamma$$

Επιπτώσεις των σχέσεων ορθογωνιότητας

Σε **αβελιανές** ομάδες ισχύει: $\Gamma = |G|$

$$\Downarrow$$

$$k_{max} = |G|$$

Επίσης θα ισχύει:

$$\sum_{k=1}^{|G|} d_k^2 \leq |G| \quad \text{με} \quad d_k \geq 1$$

Οπότε για **αβελιανή ομάδα** θα πρέπει:

$$d_k = 1 \quad \forall \ k, \quad \text{με} \quad k = 1,\ 2, .., \ |G|$$

$$\Downarrow$$

Οι αβελιανές ομάδες έχουν $|G|$ μονοδιάστατες μη ισοδύναμες, μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις

14. Αποσύνθεση αναγωγίμων αναπαραστάσεων

Έστω $A(g_a)$ αναγώγιμη αναπαράσταση. Θα έχει τη μορφή:

$$A(g_a) \;=\; \underbrace{A^{(1)}(g_a) \bigoplus \cdots \bigoplus A^{(1)}(g_a)}_{\lambda_1 \;\; \text{φορές}} \bigoplus \underbrace{A^{(2)}(g_a) \bigoplus \cdots \bigoplus A^{(2)}(g_a)}_{\lambda_2 \;\; \text{φορές}} \bigoplus \cdots$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Tr}(A(g_a)) \;=\; \sum_{k=1}^{k_{max}} \lambda_k \mathrm{Tr}(A(g_a)^{(k)}) \quad , \quad \lambda_k \;\in\; \mathbb{N}_0 \qquad \Rightarrow \qquad \chi_\gamma \;=\; \sum_{k=1}^{k_{max}} \lambda_k \chi_\gamma^{(k)}$$

Για να προσδιορίσουμε τα λ_k πολλαπλασιάζουμε το χ_γ με $n_\gamma\ \chi_\gamma^{*(k')}$ και αθροίζουμε ως προς γ:

$$\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma\ \chi_\gamma \chi_\gamma^{*(k')} \;=\; \sum_{\gamma=1}^{\Gamma}\ n_\gamma \left(\sum_{k=1}^{k_{max}} \lambda_k \chi_\gamma^{(k)} \right) \chi_\gamma^{*(k')} \;=\; \sum_{k=1}^{k_{max}} \lambda_k \underbrace{\sum_{\gamma=1}^{\Gamma}\ n_\gamma \chi_\gamma^{(k)} \chi_\gamma^{*(k')}}_{|G|\ \delta_{k,k'}}$$

$$\Rightarrow \qquad\qquad \boldsymbol{\lambda_{k'} \;=\; \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma\ \chi_\gamma \chi_\gamma^{*(k')}}$$

Μπορούμε να γράψουμε τη προηγούμενη σχέση ως:

$$\lambda_k \;=\; \frac{1}{|G|}\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma\ \chi_\gamma \chi_\gamma^{*(k)}$$

και αν θέσουμε $\chi_\gamma \;=\; \chi_\gamma^{(k)}$, οπότε $\lambda_k = 1$ και $\lambda_{k'} = 0$ για $k' \neq k$, παίρνουμε:

$$\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma\ |\chi_\gamma^{(k)}|^2 \;=\; |G|$$

που ισχύει για οποιαδήποτε **μη αναγώγιμη αναπαράσταση** k.

Άσκηση: Δείξτε ότι για **οποιαδήποτε αναπαράσταση** ισχύει:

$$\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma\ |\chi_\gamma|^2 \;=\; |G| \sum_{k=1}^{k_{max}} \lambda_k^2$$

Κριτήριο αναγωγιμότητας: $\displaystyle\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma\ |\chi_\gamma|^2 \;>\; |G|$