ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2019-2020

Φώτιος Κ. Διάκονος

Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών

15. Η κανονική αναπαράσταση - Πίνακες χαρακτήρων

Σε **κάθε πεπερασμένη ομάδα** G μπορούμε να ορίσουμε την **κανονική αναπαράσταση** βασισμένοι στον **πίνακα πολλαπλασιασμού** της ομάδας.

Η **κανονική αναπαράσταση** έχει τις εξής ιδιότητες:

- Ορίζεται με πίνακες $|G| \times |G|$.
- Ο πίνακας $A_r(g_i)$ κάθε $g_i \in G$ περιέχει μόνο 0 ή 1 ως στοιχεία.
- Ισχύει $(A_r(g_i))_{k,\ell} = \begin{cases} 0, & \text{αν} \quad g_k^{-1} \circ g_\ell \neq g_i \\ 1, & \text{αν} \quad g_k^{-1} \circ g_\ell = g_i \end{cases}$
- Είναι **αναγώγιμη, πιστή** αναπαράσταση της G.

Κατασκευή της κανονικής αναπαράστασης

Γράφουμε τον πίνακα πολλαπλασιασμού της G ως εξής:

G	e	g_2	g_3	$\dots$	$g_{\|G\|}$
e	e	g_2	g_3	$\dots$	$g_{\|G\|}$
g_2^{-1}	g_2^{-1}	e	$\dots$	$\dots$	$\dots$
g_3^{-1}	g_3^{-1}	$\dots$	e	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	e	$\dots$
$g_{\|G\|}^{-1}$	$g_{\|G\|}^{-1}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	e

- Ο πίνακας $A_r(e)$ θα έχει την μορφή $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

- Ο πίνακας $A_r(g_i)$ θα είναι $\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$ $\forall\ g_i \neq e,\ g_i \in G$

Ένα απλό παράδειγμα: η κανονική αναπαράσταση της C_3

G_3	e	g_2	g_3
e	e	g_2	g_3
$g_2^{-1} = g_3$	g_3	e	g_2
$g_3^{-1} = g_2$	g_2	g_3	e

$$\Downarrow$$

$$A_r(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_r(g_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_r(g_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρείστε ότι:

- $A_r(g_2) \cdot A_r(g_2) = A_r(g_3)$, $A_r(g_3) \cdot A_r(g_3) = A_r(g_2)$ και $A_r(g_2) \cdot A_r(g_3) = A_r(g_3) \cdot A_r(g_2) = A_r(e)$ (**πιστή**).
- $\mathrm{Tr}(A_r(e)) = |G|$, $\mathrm{Tr}(A_r(g_2)) = \mathrm{Tr}(A_r(g_3)) = 0$.
- $\displaystyle\sum_{\gamma=1}^{3} n_\gamma |\chi_{r,\gamma}|^2 \; = \; 1 \times 9 + 1 \times 0 + 1 \times 0 > \underbrace{3}_{|G|}$ (**αναγώγιμη**).

Γενικεύσεις

- **Ικανοποίηση γινομένου ομάδας**

$$(A_r(g_i \circ g_j))_{k,\ell} = \sum_{m=1}^{|G|} (A_r(g_i))_{k,m}(A_r(g_j))_{m,\ell}$$

Πράγματι, το $(A_r(g_i \circ g_j))_{k,\ell}$ είναι **μηδεν** για $g_k^{-1} \circ g_\ell \neq g_i \circ g_j$ και **ένα** στην αντίθετη περίπτωση, ενώ το γινόμενο $(A_r(g_i))_{k,m}(A_r(g_j))_{m,\ell}$ είναι **διάφορο του μηδενός** μόνο εάν: $g_k^{-1} \circ g_m = g_i$ **και** $g_m^{-1} \circ g_\ell = g_j$ οπότε:

$$g_i \circ g_j = (g_k^{-1} \circ g_m) \circ (g_m^{-1} \circ g_\ell) = g_k^{-1} \circ g_\ell$$

- **Χαρακτήρες**

Ισχύει: $\chi_r(e) = |G|$ και $\chi_r(g_i) = 0$, $\forall\ g_i \neq e$ με $g_i \in G$.

- **Αναγωγιμότητα:** $\displaystyle\sum_{\gamma=1}^{3} n_\gamma |\chi_{r,\gamma}|^2 = 1 \times |\chi_r(e)|^2 = \underbrace{|G|^2 > |G|}_{|G|>1}$

Αποσύνθεση κανονικής αναπαράστασης

- Ισχύει: $\lambda_{r,k} = \frac{1}{|G|}\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \chi_{r,\gamma}\chi_{\gamma}^{*(k)} \;\Rightarrow\; \lambda_{r,k} = \frac{1}{|G|}\underbrace{\chi_r(e)}_{|G|}\overbrace{\chi_e^{*(k)}}^{d_k}$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{\lambda_{k,r} \;=\; d_k}$$

Η **κανονική αναπαράσταση της** G περιέχει **κάθε μη ισοδύναμη, μη αναγώγιμη** αναπαράσταση k **της** G, τόσες φορές **όσες είναι η διάσταση** d_k **των πινάκων της**.

- Η σχέση: $$\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma|\chi_{r,\gamma}|^2 = |G|\sum_{k=1}^{k_{max}} \lambda_{r,k}^2$$

μας οδηγεί στο **πολύ γενικό** και **σημαντικό** αποτέλεσμα:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{k_{max}} d_k^2 \;=\; |G|}$$

Σύνοψη

Η μελέτη των αναπαραστάσεων μιας πεπερασμένης ομάδας G στηρίζεται στις εξής **γενικές ιδιότητες**:

- Για **μη αναγώγιμες, μη ισοδύναμες** αναπαραστάσεις ισχύει:
  - Ο αριθμός k_{max} των μη αναγωγίμων (ΜΑ), μη ισοδυνάμων (ΜΙ) αναπαραστάσεων της G ισούται με τον αριθμό Γ των κλάσεων συζυγίας της G,

$$k_{max} = \Gamma$$

  - Για την διάσταση d_k των $d_k \times d_k$ πινάκων των ΜΑ, ΜΙ αναπαραστάσεων της G ισχύει η σχέση:

$$\sum_{k=1}^{k_{max}} d_k^2 = |G|$$

- Για **αναγώγιμες** αναπαραστάσεις $A(g)$ ισχύει:

$$A(g) = \bigoplus_{k=1}^{k_{max}} \lambda_k A^{(k)}(g) \quad ; \quad \lambda_k = \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} n_\gamma \chi_\gamma \chi_\gamma^{*(k)}$$

Πίνακας χαρακτήρων

Ο **πίνακας χαρακτήρων** συνοψίζει τις **ΜΑ, ΜΙ** αναπαρ. της G:

κλάσεις συζυγίας →

↓ ΜΑ, ΜΙ αναπ.

G	$\mathcal{C}_1$	$\ldots$	$\mathcal{C}_\Gamma$
Γ_1	$\chi_1^{(1)}$	$\ldots$	$\chi_\Gamma^{(1)}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\Gamma_{k_{max}}$	$\chi_1^{(k_{max})}$	$\ldots$	$\chi_\Gamma^{(k_{max})}$

- Ο πίνακας χαρακτήρων είναι **πάντα τετραγωνικός** αφού $k_{max} = \Gamma$.

- Τα $\chi_\gamma^{(k)}$ είναι, εν γένει, μιγαδικοί αριθμοί.

- Για κάθε ομάδα G υπάρχει η τετριμμένη **ταυτοτική** αναπαράσταση Γ_1 για την οποία: $\chi_\gamma^{(1)} = 1 \quad ; \quad \forall\ \gamma$ με $1 \le \gamma \le \Gamma$

- Οι **γραμμές** και οι **στήλες** του πίνακα χαρακτήρων αποτελούν **ορθογώνια διανύσματα**.

Εφαρμογές

1. Αναπαραστάσεις της D_3

- Θα ισχύει $k_{max} = \Gamma = 3$ (τρεις κλάσεις συζυγίας).

- Από $\sum_{k=1}^{3} d_k^2 = 6$ προκύπτει ως μοναδική εκδοχή:

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

- Ο πίνακας χαρακτήρων της D_3 θα έχει την μορφή:

D_3	$\mathcal{C}_1 = \{e\}$	$\mathcal{C}_2 = \{g_2, g_3\}$	$\mathcal{C}_3 = \{g_4, g_5, g_6\}$
Γ_1	1	1	1
Γ_2	1	a	b
Γ_3	2	c	d

όπου τα a, b, c και d θα προσδιορισθούν από συνθήκες ορθογωνιότητας.

- Ορθογωνιότητα γραμμών:

$$\sum_{\gamma=1}^{3} n_\gamma \chi_\gamma^{(k)} \chi_\gamma^{*(k')} \ = \ |G| \ \delta_{k,k'}$$

$$k=2,\ k'=1 \Rightarrow 1\times 1\times 1 + 2\times a\times 1 + 3\times b\times 1 = 0$$
$$k=3,\ k'=1 \Rightarrow 1\times 2\times 1 + 2\times c\times 1 + 3\times d\times 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2a+3b \ = \ -1 \quad ; \quad 2c+3d \ = \ -2$$

- Ορθογωνιότητα στηλών:

$$\sum_{k=1}^{3} \sqrt{n_\alpha}\chi_\alpha^{(k)} \sqrt{n_\beta}\chi_\beta^{*(k)} \ = \ |G| \ \delta_{\alpha,\beta}$$

$$\alpha=2,\ \beta=1 \Rightarrow \sqrt{1}\times 1\times\sqrt{2}\times 1+\sqrt{1}\times 1\times\sqrt{2}\times a+\sqrt{1}\times 2\times\sqrt{2}\times c=0$$

$$\Downarrow$$

$$a+2c=-1$$

- Επίσης για την Γ_2, επειδή είναι $d_{\Gamma_2} = 1$ θα ισχύει: $a^3 = 1$ και $b^2 = 1$ οπότε $b = \pm 1$ αλλά μόνο η εκδοχή $b = -1$ είναι συνεπής. Έτσι βρίσκουμε:

$$a = 1, \ c = -1, \ d = 0$$

- Ο πίνακας χαρακτήρων της D_3 είναι:

D_3	$\mathcal{C}_1 = \{e\}$	$\mathcal{C}_2 = \{g_2, g_3\}$	$\mathcal{C}_3 = \{g_4, g_5, g_6\}$
Γ_1	1	1	1
Γ_2	1	1	-1
Γ_3	2	-1	0

Άσκηση 1: Βρείτε τον πίνακα χαρακτήρων της C_6.

Άσκηση 2: Βρείτε την κανονική αναπαράσταση της D_3 καθώς και την αποσύνθεσή της σε μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις.

2. **Η ομάδα της Χαμιλτονιανής**

Το σύνολο των τελεστών $\{\widehat{R}_a\}$ που ικανοποιούν την συνθήκη:

$$\widehat{R}_a \widehat{H} \widehat{R}_a^{-1} = \widehat{H}$$

αποτελούν ομάδα που την ονομάζουμε **ομάδα της Χαμιλτονιανής** G_H.

Άσκηση 3: Δείξτε ότι οι $\widehat{R}_a$, όπως ορίστηκαν πιο πάνω, αποτελούν ομάδα.

Θα μελετήσουμε Χαμιλτονιανές συστημάτων 2 καταστάσεων που παρουσιάζουν C_2-συμμετρία (**ομοτιμία**).

Ας υποθέσουμε Χαμιλτονιανή της μορφής: $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} E_1 & h_{12} \\ h_{12}^* & E_2 \end{bmatrix}$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα πολλαπλασιασμού της C_2 προσδιορίζουμε την κανονική της αναπαράσταση:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Αναλλοιότητα της $\mathbf{H}$ ως προς την C_2 σημαίνει:

$$\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{H}\mathbf{\Pi}^{-1} \;=\; \mathbf{H}$$

Αυτή η απαίτηση μας οδηγεί στην ακόλουθη Χαμιλτονιανή:

$$\mathbf{H} \;=\; \begin{bmatrix} E & h \\ h & E \end{bmatrix} \quad ; \quad E,\; h \;\in\; \mathbb{R}$$

Ας βρούμε πρώτα τον πίνακα χαρακτήρων της C_2:

- Επειδή η C_2 είναι αβελιανή θα ισχύει ότι $\Gamma = |G| = 2 = k_{max}$, επομένως έχουμε 2 ΜΙ, ΜΑ αναπαραστάσεις διάστασης $d_k = 1$ $(k = 1, 2)$.

- Ο πίνακας χαρακτήρων θα έχει την μορφή:

C_2	$\mathcal{C}_1 = \{e\}$	$\mathcal{C}_2 = \{g_2\}$
Γ_1	1	1
Γ_2	1	a

όπου από ορθογωνιότητα στηλών, γραμμών βρίσκουμε: $a = -1$

Οπότε έχουμε:

C_2	$\mathcal{C}_1 = \{e\}$	$\mathcal{C}_2 = \{g_2\}$
Γ_1	1	1
Γ_2	1	-1

Για την κανονική αναπαράσταση θα ισχύει $\Gamma_r = \Gamma_1 \bigoplus \Gamma_2$ και φυσικά όλα τα ίχνη των πινάκων εκτός αυτού που αντιστοιχεί στο ουδέτερο στοιχείο (εδώ είναι μόνο ο $\mathbf{\Pi}$) θα είναι μηδέν.

Από πλευράς Φυσικής αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι οι πίνακες της C_2, εφόσον η C_2 αφήνει αναλλοίωτη την $\mathbf{H}$, θα έχουν κοινά ιδιοδιανύσματα με την $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H}|\Psi_i\rangle \;=\; \epsilon_i\;|\Psi_i\rangle, \quad i = 1,2 \qquad ; \qquad \mathbf{\Pi}|\Psi_i\rangle \;=\; \mu_i|\Psi_i\rangle$$

Πως βρίσκουμε τα μ_i και ποιά είναι η σημασία τους από πλευράς θεωρίας ομάδων;

Προφανώς τα μ_i είναι οι ιδιοτιμές του $\mathbf{\Pi}$. Στην κανονική αναπαράσταση ο $\mathbf{\Pi}$ δεν είναι σε block διαγώνια μορφή. Μπορεί όμως να έρθει σε τέτοια μορφή με μετασχηματισμό ομοιότητας που τον διαγωνοποιεί:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{S}^{-1} \;=\; \tilde{\mathbf{\Pi}} \;=\; \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Στις **μονοδιάστατες** αναπαραστάσεις οι ιδιοτιμές ταυτίζονται με τους **χαρακτήρες** της αναπαράστασης!

$$\mu_1 = \chi_{\Gamma_1} \quad ; \quad \mu_2 = \chi_{\Gamma_2}$$

Μέσω αυτής της ιδιότητας μπορούν να ταξινομηθούν οι ιδιοκαταστάσεις της $\mathbf{H}$.

Ας βρούμε πρώτα τις ιδιοκαταστάσεις του $\mathbf{\Pi}$:

$$\mathbf{\Pi}|\pi_\pm\rangle \;=\; \pm|\pi_\pm\rangle \Rightarrow |\pi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ με μετασχηματισμό ομοιότητας $\mathbf{U}\cdot\mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{U}^{-1}$ μετασχηματίζει τον $\mathbf{\Pi}$ στον διαγώνιο $\tilde{\mathbf{\Pi}}$.
Ο $\mathbf{U}$ είναι και **μοναδιακός** ($\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\dagger}$).

Θα ταξινομήσουμε τώρα τις ιδιοκαταστάσεις του $\mathbf{H}$ αφού πρώτα τις προσδιορίσουμε:

- Οι ιδιοτιμές του $\mathbf{H}$ είναι οι: $\epsilon_{\pm} = E \pm h$
- Τα αντίστοιχα ιδιοδυανύσματα είναι:

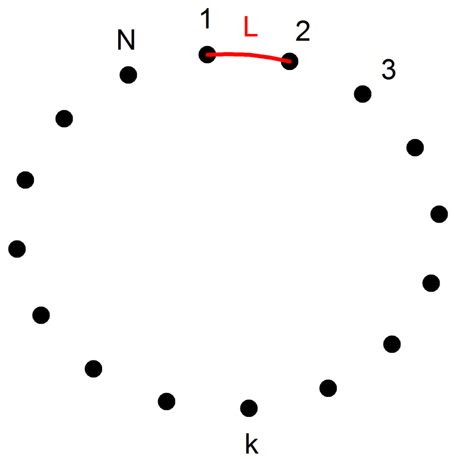
$$|\Psi_{\pm}\rangle \; = \; \frac{1}{\sqrt{2|a|^2}}\begin{bmatrix}a\\ \pm a\end{bmatrix} \quad ; \quad a \in \mathbb{C}$$

Η δράση του $\mathbf{\Pi}$ στα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{H}$ είναι:

$$\mathbf{\Pi}|\Psi_{\pm}\rangle = \pm|\Psi_{\pm}\rangle \Rightarrow \begin{cases}|\Psi_{+}\rangle \text{ ανήκει στη } \Gamma_1(\text{άρτια})\\ |\Psi_{-}\rangle \text{ ανήκει στη } \Gamma_2(\text{περιττή})\end{cases}$$

Περιοδικά συστήματα - Θεώρημα Bloch

Θα θεωρήσουμε ότι η ομάδα συμμετρίας G_H της Χαμιλτονιανής του συστήματος που μελετάμε είναι η ομάδα μετατόπισης κατά L σε κλειστή αλυσίδα με N ισοδύναμες κορυφές.



Ο τελεστής μετατόπισης $\hat{T}_L$ ορίζεται μέσω της δράσης του σε συνάρτηση $f(x)$: $\hat{T}_L f(x) = f(x+L)$ και $\hat{T}_L^N = \hat{I}$

Ισχύει $G_H = \{\hat{I}, \hat{T}_L, \hat{T}_L^2, \ldots, \hat{T}_L^{N-1}\}$. Προφανώς $G_H \cong C_N$. Επίσης θα ισχύει: $\hat{T}_L^m = \hat{T}_{mL}$

Η G_H είναι αβελιανή $\Rightarrow N$ μονοδιάστατες ΜΙ, ΜΑ αναπαραστάσεις!

Οι χαρακτήρες $\chi_\gamma^{(k)}$ θα ικανοποιούν τον πολλαπλασιασμό της ομάδας (μονοδιάστατες αναπαραστάσεις). Επίσης θα ισχύει ότι:

$$\left(\chi_\gamma^{(k)}\right)^N = 1$$

Θέτοντας $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ ο πίνακας χαρακτήρων της G_H γράφεται:

G_H	$\hat{I}$	$\hat{T}_L$	$\hat{T}_{2L}$	$\ldots$	$\hat{T}_{(N-1)L}$
Γ_1	1	1	1	$\ldots$	1
Γ_2	1	ω	ω^2	$\ldots$	ω^{N-1}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
Γ_N	1	ω^{N-1}	$\omega^{2(N-1)}$	$\ldots$	$\omega^{(N-1)^2}$

Οι τελεστές $\hat{T}_{mL}$ και η Χαμιλτονιανή $\mathbf{H}$ του συστήματος θα έχουν κοινό σύνολο ιδιοσυναρτήσεων.

Οι ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτονιανής μπορούν να ταξινομηθούν ως προς τις αναπαραστάσεις της G_H.

Έστω $\phi_n(x)$ ιδιοκατάσταση της $\mathbf{H}$ που είναι και ιδιοκατάσταση του $\widehat{T}_L$ στην αναπαράσταση Γ_n. Τότε θα ισχύει:

$$\widehat{T}_L \phi_n(x) \;=\; \omega^{n-1}\phi_n(x) \;\Rightarrow\; \phi_n(x+L) \;=\; \omega^{n-1}\phi_n(x)$$

$$\Downarrow$$

$$|\phi_n(x+L)| \;=\; |\phi_n(x)| \;\Rightarrow\; \phi_n(x) \;=\; e^{ik_n(x)}u_n(x) \text{ με } u_n(x+L) \;=\; u_n(x)$$

Επίσης θα ισχύει:

$$\widehat{T}_{mL}\phi_n(x) \;=\; \omega^{m(n-1)}\phi_n(x) \;\;\Rightarrow\;\; \phi_n(x+mL) \;=\; \omega^{m(n-1)}\phi_n(x)$$

$$\Downarrow$$

$$e^{ik_n(x+mL)}u_n(x+mL) \;=\; \omega^{m(n-1)}e^{ik_n(x)}u_n(x),$$

από όπου προκύπτει: $k_n(x+mL) \;=\; k_n(x) + \frac{2\pi m(n-1)}{N}$

Η σχέση: $k_n(x+mL) = k_n(x) + \frac{2\pi m(n-1)}{N}$ μας υπαγορεύει ότι: $k_n(x) = A_n x + B_n$.

Από αυτή την παραδοχή προκύπτει:

$$A_n(x+mL) + B_n = A_n x + B_n + \frac{2\pi m(n-1)}{N}$$

$$\Downarrow$$

$$A_n = \frac{2\pi(n-1)}{NL}$$

(το B_n μπορεί να απορροφηθεί στην $u_n(x)$)

Οι ιδιοκαταστάσεις $\phi_n(x)$ της $\mathbf{H}$ σχηματίζονται από μια περιοδική συνάρτηση $u_n(x)$ διαμορφωμένη με το επίπεδο κύμα $e^{\frac{2\pi i(n-1)}{NL}x}$ (**Θεώρημα Bloch**).