5. Συμμετρική Ομάδα S_n.

Θεωρούμε το σύνολο $\vec{n} = (1, 2, \ldots, n)$.

Ορισμός. Καλούμε μετάθεση μία $1 \leftrightarrow 1$ απεικόνιση $\sigma : \vec{n} \to \vec{n}$.

$$(1 \mapsto \sigma(1),\ 2 \mapsto \sigma(2), \ldots, n \mapsto \sigma(n))$$

Το σύνολο των μεταθέσεων αποτελεί ομάδα με πράξη την σύνθεση των απεικονίσεων. *

Η ομάδα καλείται συμμετρική ομάδα S_n.

Παρομοίως αντί για το σύνολο $\vec{n}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε σύνολο $X = (x_1, \ldots, x_n)$ το οποίο έχει n στοιχεία.

* Εάν $\sigma : i \mapsto \sigma(i)$

$\tau : i \mapsto \tau(i)$ τότε $\tau \circ \sigma : i \mapsto \tau(\sigma(i))$

Ένας συμβολισμός των μεταθέσεων είναι:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Εάν $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ και $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix}$

Τότε:

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \cdots & \tau(\sigma(n)) \end{pmatrix}$$

π.χ.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \neq \tau \circ \sigma$$

- S_3 : στοιχεία και πίνακας πολλαπλασιασμού.

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad g_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

	e	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
e	e	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_2	g_2	g_3	e	g_6	g_4	g_5
g_3	g_3	e	g_2	g_5	g_6	g_4
g_4	g_4	g_5	g_6	e	g_2	g_3
g_5	g_5	g_6	g_4	g_3	e	g_2
g_6	g_6	g_4	g_5	g_2	g_3	e

Δηλαδή η S_3 είναι η μη κυκλική ομάδα με 6 στοιχεία.

- Η S_n έχει $n!$ στοιχεία : $|S_n| = n!$.

Πράγματι για την αντιστοίχιση του 1 έχουμε n επιλογές
—//— 2 —//— $n-1$ —//—
⋮
—//— i —//— $n-i+1$ —//—
⋮
—//— n —//— 1 επιλογή

$\Rightarrow$ τελικά οι δυνατές μεταθέσεις είναι: $1 \cdot 2 \cdots n = n!$.

Στον συμβολισμό με δύο γραμμές, στην πρώτη γραμμή τοποθετούνται τα στοιχεία τα οποία θα μεταθέσουν (με κάποια σειρά) και στην δεύτερη σειρά κάτω από κάθε στοιχείο τοποθετείται η εικόνα του. Στην δεύτερη γραμμή επαναλαμβάνονται όλα τα στοιχεία το κάθε ένα μία φορά.

π.χ.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix}$$

$\sigma(1)=2,\ \sigma(2)=3,\ \sigma(3)=4,\ \sigma(4)=5,\ \sigma(5)=1$

Για την σ παρατηρούμε ότι έχουμε μία κυκλική μετάθεση:

$$1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 1$$

$$1 \mapsto 2\ 2 \mapsto 3\ 3 \mapsto 4 \ \dots$$

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει σύντομος συμβολισμός μίας γραμμής:

$$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)$$

όπου κάθε στοιχείο απεικονίζεται στο διπλανό του και το τελευταίο στο πρώτο (κλείνει ο κύκλος).

- Κυκλική μετάθεση k στοιχείων γράφεται με k τρόπους και έχει τάξη k: $(\sigma^5 = 1)$

π.χ. $(12345) = (23451) = (34512) = (45123) = (51234)$

και: $\sigma^2 = (12345)\circ(12345) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (34512)$

$\sigma^3 = (45123)$, $\sigma^4 = (51234)$ και $\sigma^5 = (12345)$

Η ανωτέρω γραφή είναι δυνατόν να υιοθετηθεί για γενικές μεταθέσεις.

π.χ. για την τ έχουμε ακολουθώντας την απεικόνιση των στοιχείων:

$1 \mapsto 3 (\mapsto 1)$ και $2 \mapsto 4 \mapsto 5 (\mapsto 2)$

κυκλική εναλλαγή 2 στοιχείων — κυκλική εναλλαγή 3

Εάν ορίσουμε $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Έχουμε $\tau = \gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma_2 \circ \gamma_1$

$= (13)(245) = (245)(13)$

εναλλάσσει τα 1 και 3 αφήνοντας τα 2,4,5 ακίνητα.

κυκλική εναλλαγή των $2 \mapsto 4 \mapsto 5$ αφήνοντας τα 1,3 ακίνητα.

Η μετάθεση τ γράφεται ως σύνθεση δύο μη επικαλυπτόμενων κύκλων.

Συνοψίζοντας:

- Κύκλος μήκους k είναι η κυκλική εναλλαγή k στοιχείων.
- Ο κύκλος μήκους k έχει τάξη k. (k καλείται και περίοδος του κύκλου.)
- Κύκλος μήκους k δύναται να γραφεί με k ισοδύναμους τρόπους.
- Κύκλος μήκους 2 καλείται αντιμετάθεση (transposition)
- Δύο μεταθέσεις α, β, καλούνται μη επικαλυπτόμενες εάν

$\alpha(i) \neq i \Rightarrow \beta(i) = i$ και $\beta(i) \neq i \Rightarrow \alpha(i) = i$.

- Για μη επικαλυπτόμενες μεταθέσεις α, β έχουμε:

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha .$$

Πράγματι, έστω ότι $\alpha(i) \neq i \Rightarrow \beta(i) = i$

Επομένως: $\alpha \circ \beta(i) = \alpha(\beta(i)) = \alpha(i)$

Επίσης: $\beta \circ \alpha(i) = \beta(\alpha(i)) = \alpha(i)$

επειδή εάν $\beta(\alpha(i)) \neq \alpha(i) \Rightarrow \alpha(\alpha(i)) = \alpha(i)$ α^{-1} α^{-1}

$\Rightarrow \alpha(i) = i$ άτοπο.

Άρα: $\alpha \circ \beta(i) = \alpha(i) = \beta \circ \alpha(i)$

Εάν $\beta(i) \neq i \Rightarrow \alpha \circ \beta(i) = \beta \circ \alpha(i) = \beta(i)$
(αντίστοιχα)

και εάν $\alpha(i) = i$ και $\beta(i) = i \Rightarrow \alpha \circ \beta(i) = \beta \circ \alpha(i) = i$.

- Για τις σ, τ έχουμε

$\sigma = (12345)$ με $\sigma^5 = 1$,

$\tau = (13)(245) = (245)(13)$ με $\tau^6 = 1$,

και $\sigma \circ \tau = (14)(253)$: $\tau(1) = 3$, $\sigma(3) = 4$ και $\tau(4) = 5$, $\sigma(5) = 1 \Rightarrow$
$(1 \mapsto 4 \mapsto 1)$ $\sigma \circ \tau(4) = 1$

$\tau \circ \sigma = (1\,4\,2)(35)$: $\sigma(1) = 2$, $\tau(\sigma(1)) = 4$ και $\sigma(4) = 5$, $\tau(\sigma(4)) = 2$
$(1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1)$

Θεώρημα. Κάθε μετάθεση σ ενός πεπερασμένου συνόλου X, είναι σύνθεση $\gamma_1 \cdots \gamma_k$ μη επικαλυπτόμενων κύκλων γ_i.
Η ανάλυση $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$ είναι μονοσήμαντη, πέραν αλλαγής της σειράς των κύκλων (οι οποίοι ως μη επικαλυπτόμενοι μετατίθενται).

Απόδειξη:

Καλούμε δύο στοιχεία $x, y \in X$ "ισοδύναμα" υπό την σ εάν

$$x = \sigma^m y \quad \text{για κάποιον ακέραιο } m.$$

Αυτή η σχέση έχει τις ιδιότητες:

$x = \sigma^m x$ (ανακλαστική)
$x = \sigma^m y \Rightarrow y = \sigma^{-m} x$ (συμμετρική)
$x = \sigma^m y,\ y = \sigma^n z \Rightarrow x = \sigma^{m+n} z$ (μεταβατική)

Είναι επομένως σχέση ισοδυναμίας η οποία χωρίζει το σύνολο X σε κλάσεις ισοδυναμίας ξένες μεταξύ τους. Κάθε κλάση καλείται και διατροχιά της σ.

Μια τροχιά (κλάση) είναι: $G = \{\sigma^m x \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Επειδή το X είναι πεπερασμένο σύνολο $\Rightarrow x = \sigma^r x$ και έστω m ο ελάχιστος θετικός ακέραιος : $x = \sigma^m x$.

Επομένως η τροχιά περιέχει ακριβώς m στοιχεία: $\{x, \sigma x, \dots, \sigma^{m-1} x\}$.
Θεωρούμε γ την κυκλική μετάθεση (κύκλο μήκους m) :

$$\gamma = (x\ \sigma x\ \cdots\ \sigma^{m-1} x)$$

η οποία μετατίθεται κυκλικά τα ανωτέρω στοιχεία και αφήνει σταθερά τα άλλα στοιχεία του X. Δηλαδή

$\gamma x = \sigma x$, εάν $x \in G$ και $\gamma x = x$ εάν $x \notin G$.

Λόγω της ακριβούς διαμέρισης του X σε k τροχιές $C_1, \dots, C_k$ της σ
και σε κάθε τροχιά C_i αντιστοιχεί ένας κύκλος γ_i
κάθε στοιχείο $x \in X$ θα ανήκει σε μία τροχιά στην οποία
θα ανήκει και το σx $\Rightarrow$ $\gamma_i x = \sigma x$ και
$\gamma_j x = x$, $j \neq i$.

Επομένως $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$, (οι κύκλοι είναι μη επικαλυπτόμενοι).

Πράγματι $\gamma_1 \cdots \gamma_k x = \underbrace{\gamma_1 \cdots \gamma_{i-1} \gamma_{i+1} \gamma_k \gamma_i x}_{\text{λόγω της μεταθετικότητας των κύκλων}} = \gamma_1 \cdots \gamma_{i-1} \gamma_{i+1} \gamma_k (\sigma x) = \sigma x$

επειδή οι άλλοι κύκλοι δεν αλλάζουν τα στοιχεία του κύκλου γ_i.

Αντίστροφα εάν $\sigma = \beta_1 \cdots \beta_l$ όπου β_j μη επικαλυπτόμενοι κύκλοι
τα στοιχεία που αλλάζουν από τον κύκλο π.χ. β_r θα ανήκει σε μία από τις τροχιές $C_1, \dots, C_k$, έστω την C_s.

Επομένως ο κύκλος β_r ταυτίζεται με τον γ_s.

- Η τάξη μίας μετάθεσης σ είναι το ΕΚΠ των μηκών των μη επικαλυπτόμενων κύκλων στους οποίους αναλύεται η σ.

Εάν $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$ και $\sigma^m = 1 \Rightarrow (\gamma_1 \cdots \gamma_k)^m = 1$

$\Rightarrow \gamma_1^m \cdots \gamma_k^m = 1$ (λόγω της μεταθετικότητας)

$\Rightarrow \gamma_i^m = 1$ $\Rightarrow$ ο m είναι πολλαπλάσιο της τάξης του κάθε κύκλου $\Rightarrow$ ο ελάχιστος m είναι
το ΕΚΠ των τάξεων των κύκλων.

Θεώρημα. Εάν $\gamma \in S_n$ είναι κύκλος περιόδου m, τότε και κάθε συζυγής του $\tau\gamma\tau^{-1}$ είναι κύκλος περιόδου m.

Υπενθυμίζεται ότι η συζυγία ομάδας ως προς κάποιο στοιχείο της:

$$g\circ G\circ g^{-1} = \{ g\circ h\circ g^{-1},\ h\in G \}$$

είναι αυτομορφισμός της ομάδας. Πράγματι

$$\alpha\in G \Rightarrow \alpha = g\circ\underbrace{(g^{-1}\circ\alpha\circ g)}_{\alpha'}\circ g^{-1} \rightarrow \text{επίρριψη}$$

$$\alpha_1\neq\alpha_2 \Rightarrow g\circ\alpha_1\circ g^{-1} \neq g\circ\alpha_2\circ g^{-1} \rightarrow \text{ένριψη.}$$

(Εάν $g\circ\alpha_1\circ g^{-1} = g\circ\alpha_2\circ g^{-1} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2$).

Επίσης η συζυγία μεταξύ δύο στοιχείων είναι σχέση ισοδυναμίας:

$\alpha\sim\alpha$: $\alpha = e\circ\alpha\circ e$

$\alpha\sim\beta \Rightarrow \beta\sim\alpha$: $\alpha = g\circ\beta\circ g^{-1} \Rightarrow \beta = g^{-1}\circ\alpha\circ g$

$\alpha\sim\beta,\ \beta\sim\gamma \Rightarrow \alpha\sim\gamma$: $\left.\begin{matrix}\alpha = g\circ\beta\circ g^{-1}\\ \beta = g\circ\gamma\circ g^{-1}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha = g\circ\gamma\circ g^{-1}$.

Θεωρώντας τα συζυγή ως προς όλα τα στοιχεία της G, χωρίζεται η G σε κλάσεις ισοδυναμίας (ξένες μεταξύ τους):

$$g \rightarrow C_g = \{ hgh^{-1},\ \forall\ h\in G\} \quad \text{με} \quad C_{g_1} = C_{g_2} \text{ ή } C_{g_1}\cap C_{g_2} = \emptyset$$

$$\text{και} \quad G = \bigcup_i C_{g_i}$$

Πράγματι, η συζυγία δρά σε κάθε στοιχείο του κύκλου:

$$y \in \gamma \Rightarrow \qquad y \mapsto \tau y \tau^{-1}, \quad \text{με } \gamma = (x_1, \dots, x_m).$$

Εάν γράψουμε το y ως $y = \tau(\tau^{-1}(y))$ έχουμε:

$$y = \tau(\tau^{-1}(y)) = \tau(x) \quad \text{όπου} \quad x = \tau^{-1}(y).$$

Εάν $\tau^{-1}(y) \notin \gamma$ δηλαδή δεν είναι ένα από τα x_i, έχουμε:

$$\gamma(\underbrace{\tau^{-1}(y)}_{x}) = \underbrace{\tau^{-1}(y)}_{x} = x$$

δηλαδή

$$\tau\gamma\tau^{-1}(y) = \tau\gamma(x) = \tau(x).$$

Εάν $\tau^{-1}y$ είναι ένα από τα x_i:

$$\tau\gamma\tau^{-1}(y) = \tau\gamma(x_i) = \tau(x_{i+1})$$ που ανήκει στον κύκλο των $\tau(x_i)$

Σε κάθε περίπτωση:

$$\boxed{\tau\gamma\tau^{-1} = \tau(x_1, \dots, x_m)\tau^{-1} = (\tau(x_1), \tau(x_2), \dots, \tau(x_m))}$$

Πιό αναλυτικά $\tau\gamma\tau^{-1} = \gamma'$ με $\gamma'(\tau(x_1)) = \tau(x_2) \dots$
$\gamma'(\tau(x_{m-1})) = \tau(x_m)$ και
$\gamma'(\tau(x_m)) = \tau(x_1)$.

Επομένως: Η συζυγής της $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$ είναι η

$$\sigma_1 = \tau\sigma\tau^{-1} = (\tau\gamma_1\tau^{-1})(\tau\gamma_2\tau^{-1}) \cdots (\tau\gamma_k\tau^{-1}),$$

δηλαδή σύνθεση ίδιου πλήθους κύκλων με τις ίδιες περιόδους των αρχικών.

Επομένως:

· Όλα τα στοιχεία μιας κλάσεως συζυγίας έχουν την αυτή σύνθεση από μη επικαλυπτόμενους κύκλους.

π.χ. ν_1 κύκλους μήκους l_1
ν_2 -//- -//- l_2
$\vdots$
ν_k -//- -//- l_k

με $\nu_1 l_1 + \nu_2 l_2 + \dots + \nu_k l_k = n$ για την S_n

ή $\nu_1 l_1 + \nu_2 l_2 + \dots + \nu_s l_s + \nu = n$
όπου ν οι κύκλοι μήκους 1 (αμετάβλητα στοιχεία).

Αντίστροφα:

Κάθε κλάση συζυγίας περιέχει όλα τα στοιχεία της S_n με την αυτή σύνθεση.

π.χ. εάν για απλότητα θεωρήσουμε

$$\sigma = \underbrace{(x_1, \dots, x_m)}_{\gamma_1}\underbrace{(y_1, \dots, y_m)}_{\gamma_2}\underbrace{(z_1, \dots, z_r)}_{\gamma_3}$$

τότε

$$\sigma = \left(\tau(\tau^{-1}(x_1)), \dots, \tau(\tau^{-1}(x_m))\right)\left(\tau(\tau^{-1}(y_1)), \dots, \tau(\tau^{-1}(y_m))\right)\left(\tau(\tau^{-1}(z_1)), \dots, \tau(\tau^{-1}(z_r))\right)$$

δηλαδή $\sigma = \tau \sigma' \tau^{-1}$ όπου $\sigma' = (\tau^{-1}(x_1), \dots, \tau^{-1}(x_m)) \dots$

Άρα: όλα τα στοιχεία με την ίδια σύνθεση είναι συζυγή.

Επομένως η εύρεση των κλάσεων συζυγίας της S_n ανάγεται στην ανάλυση

$$n = \nu_1 l_1 + \cdots + \nu_r l_r$$

με όλους τους δυνατούς τρόπους και την εύρεση του πλήθους των στοιχείων που περιέχονται σε κάθε διαμέριση του n.

(ν_i πλήθος κύκλων περιόδου l_i, $i=1,\dots,r$).

Παραδείγματα - Ασκήσεις.

1. Κλάσεις συζυγίας της S_3.

Είναι δυνατόν να έχουμε 1-κύκλους, 2-κύκλους και 3-κύκλους, με δυνατές διαμερίσεις του 3 ως: $3\cdot 1+0\cdot 2+0\cdot 3$

$1\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 3$

$0\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot 3$.

Υιοθετώντας προφανή συμβολισμό:

	Πλήθος στοιχείων	
$(3,0,0)$ — 1-κύκλοι, 2-κύκλοι, 3-κύκλοι	1	(το ουδέτερο)
$(1,1,0)$	$3=\binom{3}{1}=\binom{3}{2}$	
$(0,0,1)$	2*	$1+3+2=6=3!$

Τρόποι να επιλεγεί το στοιχείο του 1-κύκλου

Τρόποι να επιλεγούν τα στοιχεία του 2-κύκλου

* Το πλήθος των στοιχείων του 3-κύκλου υπολογίζεται:

α). Θέτοντας τον 3-κύκλο ως $(123)=g$ έχουμε και το $g^2=(132)$ $(g^3=1)$.
Έχοντας συμπληρώσει τα στοιχεία της ομάδας δεν υπάρχει άλλο στοιχείο με 3-κύκλο.

β). Για 3 στοιχεία έχουμε $3!$ τρόπους να τα διατάξουμε ώστε να έχουμε 3-κύκλο.
Τρείς από αυτούς τους τρόπους οδηγούν στην ίδια μετάθεση π.χ. $(123)=(231)=(312)$ (κυκλική μετάθεση των αρχικών δεικτών).

Τελικά έχουμε $\frac{3!}{3}=2$.

5ιι''

2. Πόσους n-κύκλους έχει η S_n;

Γενικεύοντας την προηγούμενη ανάλυση έχουμε:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

3. Πόσους k-κύκλους έχει η S_n $(k<n)$;

$\binom{n}{k}$ η επιλογή k στοιχείων από n

$(k-1)!$ οι k-κύκλοι στα k στοιχεία που επιλέχθηκαν $\Rightarrow$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot(k-1)! = \frac{n!}{k(n-k)!}$$

4. Πόσα στοιχεία της S_8 αναλύονται σε 2, 3-κύκλους και 1 2-κύκλο;

Ένας 3-κύκλος της S_8 με: $\frac{8!}{3\cdot 5!}$ τρόπους

Δεύτερος 3-κύκλος της S_8 με: $\frac{5!}{3\cdot 2!}$ τρόπους

Επομένως το πλήθος των 2, 3-κύκλων είναι:

$$\frac{1}{2}\,\frac{8!}{3\cdot\cancel{5!}}\,\frac{\cancel{5!}}{3\cdot 2!} = \frac{1}{2}\,\frac{8!}{3^2\cdot 2!} = 1.120$$

π.χ.

η διαμέριση (678) (145)
εμφανίζεται και ως (145) (678)
που δίνει την ίδια μετάθεση

5. Στην S_N το πλήθος των στοιχείων με

k_1 κύκλους μήκους l_1
k_2 -//- -//- l_2
$\vdots$
k_r -//- -//- l_r

είναι:

$$\frac{N!}{k_1!\cdots k_r!\, l_1^{k_1}\cdots l_r^{k_r}}$$

με $$k_1 l_1+\cdots+k_r l_r+\underbrace{k}_{\text{πλήθος 1-κύκλων}}=N.$$

6. Κλάσεις ισοδυναμίας της S_6.

$(6,0,0,0,0,0)$		1
$(4,1,0,0,0,0)$	$\frac{6!}{4\cdot 2!}$	15
$(1,2,0,0,0,0)$	$\frac{1}{2}\,\frac{6!}{4\cdot 2!}\,\frac{4!}{2\cdot 2}$	45
$(0,3,0,0,0,0)$	$\frac{1}{3!}\,\frac{6!}{4\cdot 2!}\,\frac{4!}{2\cdot 2}\,\frac{2!}{2\cdot 1!}$	15
$(3,0,1,0,0,0)$	$\frac{6!}{3\cdot 3!}$	40
$(0,0,2,0,0,0)$	-//-	40
$(1,1,1,0,0,0)$	$\frac{6!}{2\cdot 4!}\,\frac{4!}{3\cdot 1!}$	120
$(2,0,0,1,0,0)$	$\frac{6!}{4\cdot 2!}$	90
$(0,1,0,1,0,0)$	$\frac{6!}{4\cdot 2!}$	90
$(0,0,0,0,1,0)$	$\frac{6!}{5\cdot 1!}$	144
$(0,0,0,0,0,1)$		120

$1+15+45+15$
$+40+40+120+90$
$+90+144+120$
$=720$

Θεώρημα Cayley.

Κάθε ομάδα G τάξεως n, είναι ισόμορφη με μία υποομάδα της S_n.

$$|G| = n \Rightarrow G \subset S_n.$$

↳ (με την έννοια της ισομορφίας)

Σε κάθε $g_i \in G$ αντιστοιχούμε την μετάθεση:

$$\Pi_{g_i} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_i \circ g_1 & g_i \circ g_2 & \cdots & g_i \circ g_n \end{pmatrix}.$$

Έχουμε δηλαδή την απεικόνιση

$$P : G \longrightarrow S_n \quad \text{με}$$

$$g_i \longmapsto \Pi_{g_i} = P(g_i)$$

Η απεικόνιση είναι ομομορφισμός. Πράγματι

$$P(g_j)P(g_i) = \begin{pmatrix} g_i \circ g_1 & \cdots & g_i \circ g_n \\ g_j \circ g_i \circ g_1 & \cdots & g_j \circ g_i \circ g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_n \\ g_i \circ g_1 & \cdots & g_i \circ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_n \\ g_j \circ g_i \circ g_1 & \cdots & g_j \circ g_i \circ g_n \end{pmatrix}$$

$$= P(g_j \circ g_i) \quad \rightsquigarrow \quad \Pi_{g_j} \Pi_{g_i} = \Pi_{g_j \circ g_i}$$

Επομένως το σύνολο των εικόνων $Im(P)$ είναι ομάδα, υποομάδα της S_n.

Επίσης $\quad Ker(P) = e \longmapsto \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_n \\ e \circ g_1 = g_1 & \cdots & e \circ g_n = g_n \end{pmatrix}.$

"Πολλαπλασιασμός" με οποιοδήποτε άλλο στοιχείο αλλάζει τα g_i

Έχουμε δηλαδή ισομορφισμό : $\quad G \cong Im(P).$

Παράδειγμα 1.

$$G_4 = G_2 \otimes G_2$$

με στοιχεία:

$$\underset{(e,e)}{e},\quad \underset{(e,g)}{g_2},\quad \underset{(g,e)}{g_3},\quad \underset{(g,g)}{g_4}$$

και πίνακα πολλαπλασιασμού:

	e	g_2	g_3	g_4
e	e	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	e	g_4	g_3
g_3	g_3	g_4	e	g_2
g_4	g_4	g_3	g_2	e

έχουμε:

$$e \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad g_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g_3 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad g_4 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2. Για την C_4 :

	e	g_2	g_3	g_4
e	e	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	g_3	g_4	e
g_3	g_3	g_4	e	g_2
g_4	g_4	e	g_2	g_3

έχουμε:

$e \longmapsto (1)(2)(3)(4)$

$g_2 \longmapsto (1234)$

$g_3 \longmapsto (13)(24)$

$g_4 \longmapsto (1432)$, στην γραφή με κύκλους.

Εκτός του ουδετέρου στοιχείου e που δεν αλλάζει κανένα στοιχείο,

$$e_o g_i = g_i$$

όλες οι άλλες μεταθέσεις $g_j \circ g_i$ μεταθέτουν όλα τα στοιχεία. Επομένως αναζητούμε τις υποομάδες της S_n οι οποίες περιέχουν μόνο κανονικές μεταθέσεις, μετακινούν όλα τα στοιχεία $1, 2, \dots, n$, δεν έχουν δηλαδή 1-κύκλους.

Οι διαφορετικές υποομάδες της S_n τάξεως n που ικανοποιούν την ανωτέρω συνθήκη, εξαντλούν τις δυνατές ομάδες με .

Δύο σημαντικές ιδιότητες αυτού του τύπου των υποομάδων.

- Δεν περιέχουν μεταθέσεις που ένα στοιχείο το πηγαίνουν στο ίδιο στοιχείο.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{έστω} & \pi_1 : & 3 \to 4 \\ \text{και} & \pi_2 : & 3 \to 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_1 \pi_2^{-1} : 3 \to 3 \Rightarrow \text{μη κανονική μετάθεση.}$$

- Εάν π_1 κανονική μετάθεση η ανάλυσή της σε κύκλους θα περιέχει μόνο κύκλους ίδιου μήκους.

Πράγματι εάν π.χ. $\pi_1 = \gamma_1 \gamma_2$ με μήκη l_1, l_2 αντίστοιχα με $l_1 < l_2$, τότε

$$\pi_1^{l_1} = \gamma_1^{l_1} \gamma_2^{l_1} = \gamma_2^{l_1}$$ δηλαδή αφήνει τα στοιχεία του

γ_1 ακίνητα $\Rightarrow$ μη κανονική μετάθεση.

Το Θεώρημα Cayley μπορεί να χρησιμοποιηθεί για προσδιορισμό δομών πεπερασμένων ομάδων.

π.χ. ομάδες τάξεως 4.

Αναζητούμε "κανονικές" υποομάδες της S_4.

1. Εάν υπάρχει κύκλος τάξεως 4 (κυκλική ομάδα):

$e, \quad g=(1234), \quad g^2=(13)(24), \quad g^3=(1432)$

δύο 2-κύκλοι

2. Μόνο στοιχεία με 2, 2-κύκλους:

$$\underset{e}{\overset{\shortparallel}{e}}, \quad \underbrace{\underset{g_2}{\overset{\shortparallel}{(12)(34)}} \quad \underset{g_3}{\overset{\shortparallel}{(13)(24)}} \quad \underset{g_4}{\overset{\shortparallel}{(14)(23)}}}_{\text{στοιχεία τάξεως } 2}$$

.