

ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΘΜΑΝΕΣ - ΘΜΑΝΕΣ Lie.1. Ορισμός.

Θιάδα με στοιχεία $R(a)$ είναι $a = (a_1, \dots, a_r)$ σύνολο r παραμέτρων οι οποίες παίρνουν τιμές σε συνεχή υποδιαστήματα του $\mathbb{R}$ (η τοπολογική σχέση), ή έτερα συνεχή r -παραμέτρικη (τάξης r) για έναν:

$$R(a) R(b) = R(c) \quad \text{με} \quad c = f(a, b) \\ R'(a) = R(\underline{a}) \quad \text{με} \quad \underline{a} = \underline{a}(c) \quad \text{συνεχές συναρτήσεις.}$$

Εάν οι συναρτήσεις είναι αναμενές με τα χείρα αν παραμέτρων $\rightarrow$ είναι αναμενής διατάξιμον πολλαπλότητα, τότε η ομάδα ήεται ήεται ομάδα Lie.

- Οι ιδιότητες των ομάδων επεξεργάζονται ως:

Παραρταρισμός: $f(a, f(b, c)) = f(f(a, b), c).$
 Ανάδοχο: $a_e: f(a, a_e) = f(a_e, a) = a.$
 Αντιστροφή: $f(a, a) = f(a, a) = a_e.$

- Συνδυασμός επιθέτου: $a_e = (a, a, \dots, a)$

Παραδείγματα.1. Ομάδα μετατόξεων.

$$T_{\vec{a}}: \vec{x} \mapsto \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}.$$

$$E = T_{\vec{0}}, \quad (n\text{-μετατόξεση Αφείρων ομάδα}).$$

$$T_{\vec{a}} T_{\vec{b}} = T_{\vec{a} + \vec{b}},$$

$$T_{\vec{a}} T_{-\vec{a}} = T_{\vec{0}} = E.$$

2. Ομάδα στροφών στο επίπεδο ($SO(2)$).

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} 0 \leq \varphi < 2\pi \\ n \cdot -\pi \leq \varphi \leq \pi. \end{array}$$

$$R(\varphi_1) R(\varphi_2) = R(\varphi_1 + \varphi_2)$$

3. Ομάδες περιστροφών - μετασχηματισμών.

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \searrow \\ M(d, F) & & \text{αδελφότητα} \\ & \nwarrow & \nearrow \\ & \text{αδελφότητα} & \text{αδελφότητα} \end{array}$$

$$GL(n, \mathbb{R}),$$

$$SL(n, \mathbb{R}),$$

$$SO(n, \mathbb{R}) \quad (O(n, \mathbb{R})),$$

$$SU(n), \quad (U(n)).$$

G : γενική,
 L : περιστροφή,
 S : στροφή 1,
 O : ορθογώνια,
 U : μοναδιαία.

$$U(n, m), \quad O(n, m).$$

3.

(ii) $O(n)$.

$$\vec{x}' = R\vec{x} : x'_i = \sum_j R_{ij} x_j$$

Αντιστρέφω:

$$\vec{x}^{\prime 2} = \vec{x}^2 \Rightarrow \sum_{i,j,k} R_{ij} x_j R_{ik} x_k = \sum_m x_m x_m \Rightarrow$$

$$\sum_j x_j \left(\sum_{i,k} (R^T)_{ji} R_{ik} \right) x_k = \sum_m x_m x_m \Rightarrow (\forall x_i)$$

$$\sum_i (R^T)_{ji} R_{ik} = \delta_{jk}, \quad \text{η } R^T R = I_n$$

Η σχέση αυτή επιβάλλει $n + \frac{n(n-1)}{2}$ συνθήκες και επομένως
η $O(n)$ έχει

$$n^2 - \left(n + \frac{n(n-1)}{2} \right) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ παραμέτρους.}$$

$$O(3) : 3 \text{ παράμετροι,}$$

$$O(4) : 6 \text{ --//--}$$

(iii). $SU(n)$.

$$UU^+ = I_n \Rightarrow \sum_k U_{ik} U_{jk}^* = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \sum_k U_{ik} U_{ik}^* = 1 \rightarrow n \text{ σχέσεις}$$

$$\text{και } \sum_k U_{ik} U_{jk}^* = 0, \quad i \neq j \rightarrow 2 \frac{n(n-1)}{2} \text{ σχέσεις}$$

$$\text{Επίσης: } \det(UU^+) = 1 \Rightarrow (\det U)(\det U)^* = 1 \Rightarrow \det U = e^{i\theta}$$

και επομένως $\det U = 1 \Rightarrow \theta = 0$ (μία επι-πλέον σχέση).

$$\text{Έχουμε επομένως } 2n^2 - n - n(n-1) = 1 = n^2 - 1 \text{ παραμέτρους}$$

$$U(n) : n^2, \quad SU(n) : n^2 - 1 \text{ παραμέτρους παραμένουν.}$$

4.

Παράδειγμα: $SU(2)$.

- Έστω: $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ με $ad - bc = 1$.

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} : U^\dagger \Rightarrow d = a^*, c = b^*$$

και $aa^* + bb^* = 1,$

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}.$$

Έχουμε δηλαδή 3 πραγματικές π. ενέργειες, δηλαδή

$\text{Re} a, \text{Im} a, \text{Re} b, \text{Im} b$ οι οποίες ικανοποιούν την σχέση

$$(\text{Re} a)^2 + (\text{Im} a)^2 + (\text{Re} b)^2 + (\text{Im} b)^2 = 1.$$

Οι παράμετροι της $SU(2)$ παραμετροποιούν την επιφάνεια της τριεξαρτησας μισφαίρας σφαίρας.

Οι μοναδιαίοι μετασχηματισμοί διακρίνουν το φερμιονικό εσωτερικό γινόμενο σε διασποματικούς χιρους στο σύστημα των μητρώων αριμών.

$$\vec{\chi} = (x_1, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{C}.$$

$$\langle \vec{\gamma}, \vec{\chi} \rangle = \sum_{i=1}^n \gamma_i^* x_i.$$

$U(n, m) \rightarrow$ ψευδοεγγύς εσ. γινόμενο,

$U(n, m) \rightarrow$ ψευδοεγγύς εσ. γινόμενο.

2. Γενικότερα - Abbe's Lie.

Θυμίζουμε ότι είναι των μεταθέσεων των 3-διάστατο χώρο:

$$T_{\vec{a}} : \vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a}.$$

Συν γινώσκ των μεταθέσεων (κυματικών):

$$\hat{P}_{\vec{a}} : \hat{P}_{\vec{a}} \psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x} - \vec{a}).$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x} - \vec{a}) &= \left(1 - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} + \frac{1}{2} (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^n + \dots \right) \psi(\vec{x}) \\ &= e^{-\vec{a} \cdot \vec{\nabla}} \psi(\vec{x}) = e^{-i \vec{a} \cdot \hat{\vec{p}}} \psi(\vec{x}) \end{aligned}$$

$$\hat{\vec{p}} = -i \vec{\nabla} \quad (h=1).$$

Οι μεταθέσεις παριστάνονται των αναπαραστάσεων χώρου ως το εσωτερικό φαινόμενο ενέργειας (των ρομπότ).

Για την απόδειξη ότι θεωρούμε αντιστοιχία στην οποία για να δώσει περί τυχόντος άξονα ο οποίος καθορίζεται από μοναδιαίο άξονα $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$.

$$R_{\hat{n}, \phi} : \vec{x} \mapsto \vec{x} + \delta \phi (\hat{n} \times \vec{x})$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_{R(\hat{n}, \phi)} \psi(\vec{x}) &= \psi(\vec{x} - \delta \phi (\hat{n} \times \vec{x})) \\ &= \psi(\vec{x}) - \delta \phi \hat{n} \cdot (\vec{x} \times \vec{\nabla}) \psi(\vec{x}) \end{aligned}$$

$$= \psi(\vec{x}) - \delta \phi \hat{n} \cdot (\vec{x} \times \vec{\nabla}) \psi(\vec{x})$$

6.

Ερωτήματα: $\hat{P}_{R(\vec{q})} \psi(\vec{x}) = (1 - i\vec{q} \cdot \hat{\vec{r}}) \psi(\vec{x})$

με: $\hat{\vec{r}} = -i \vec{x} \times \vec{\nabla}$

και ζήτησα αν αραγοποιεί.

Για παραγωγή αραγοποιεί κατά γινόμενο $\vec{q}$, παραγωγή
εναλλακτικά N αραγοποιεί κατά γινόμενο $\vec{q} = \frac{\vec{q}}{N}$
όπου $N \rightarrow \infty$.

Τότε:

$$\hat{P}_{R(\vec{q})} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - i \frac{\vec{q}}{N} \cdot \hat{\vec{r}} \right)^N \Rightarrow$$

$$\hat{P}_R = \exp[-i\vec{q} \cdot \hat{\vec{r}}]$$

όπου: $\vec{q} = \vec{q}(n_1, n_2, n_3)$.

Όπου $\left. \begin{array}{l} \text{Όπου} \\ \text{Ζεωοποιεί} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{Υπομνήσεις των} \\ \text{μεταβλητών,} \\ \text{αραγοποιεί.} \end{array} \right\}$

7.

Τα ανώτερα χαρακτηριστικά όλης της ομάδας Lie.
 Έστω ομάδα Lie η οποία δέει ως χαρακτηριστική ομάδα
 μετασχηματισμών σε r -διάστατο χώρο.

$$R(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = e^{-i \sum_i \alpha_i X_i}$$

όπου X_i οι γεννήτορες της ομάδας, οι οποίοι επιφορμα ως:

$$X_i = i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \Big|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0}$$

Δεσφύοντας να το συνδέουμε με το χώρο των $R(\alpha)$.

$$X_i : r \times r \text{ πίνακες.}$$

$$\text{Ενδοία: } \vec{x} \mapsto \vec{x}' = R(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \vec{x}$$

$$\text{συνάρτηση: } x'_\alpha = f_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

$$\text{με } x_\alpha = f_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_r; 0, \dots, 0).$$

Θεωρούμε αντιστοίχως μετασχηματισμούς $d\alpha_i$:

$$x'_\alpha = f_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_r; d\alpha_1, \dots, d\alpha_n) = f_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_r; 0, \dots, 0) + \sum_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial \alpha_i} \Big|_{\alpha=0} d\alpha_i = x_\alpha + dx_\alpha$$

$$dx_\alpha = \sum_i u_{\alpha i}(\vec{x}) d\alpha_i$$

$$u_{\alpha i}(\vec{x}) = \frac{\partial f_\alpha(\vec{x}, \alpha)}{\partial \alpha_i} \Big|_{\alpha=0}$$

8.

Ques: $R(d_1, \dots, d_n) = 1 - i \sum_i d_i X_i$

: 32980

$$dX_\alpha = -i \sum_{i \in \beta} d\alpha_i (X_i)_{\alpha\beta} X_\beta$$

Ερωτήσεις:

$$u_{\alpha i}(\vec{x}) = \left. \frac{\partial f_\alpha(\vec{x}, \alpha)}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} = -i \sum_{\beta} (X_i)_{\alpha\beta} X_\beta$$

Σταν για τον αναπάντη τον $\vec{x}$, $\psi(\vec{x})$:

$$\begin{aligned} \hat{P}_R \psi(\vec{x}) &= \psi(\vec{R}^{-1} \vec{x}) = (\text{για ανεξάρτητες μετασχηματισμούς}) \\ &= \psi(\vec{x} - d\vec{x}) = \psi(\vec{x}) - \sum_{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial X_\alpha} dX_\alpha \\ &= \psi(\vec{x}) - \sum_{\alpha} d u_{\alpha i}(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial X_{\alpha i}} \psi(\vec{x}) = \\ &\quad \left(1 - \sum_{\alpha i} d u_{\alpha i}(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \right) \psi(\vec{x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_R \psi(\vec{x}) &= \left\{ 1 - \sum_{\alpha i} d \alpha_i u_{\alpha i}(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \right\} \psi(\vec{x}) \\ &= \left\{ 1 - \sum_{\alpha i \in \beta} (-i) d \alpha_i (X_i)_{\alpha\beta} X_\beta \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \right\} \psi(\vec{x}) \end{aligned}$$

Ερωτήσεις:

$$\hat{P}_R \psi(\vec{x}) = e^{-i \sum_{\alpha i} d \alpha_i M_i} \psi(\vec{x})$$

$$\mu_i = - \sum_{\alpha, \beta} (X_i)_{\alpha\beta} X_\beta \frac{\partial}{\partial X_\alpha} = -i \sum_{\alpha} u_{\alpha i}(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial X_\alpha}$$

9.

Παραδείγματα.(ii). SU(2).

Εάν γράψουμε: $U = e^{-i \sum \alpha_i X_i}$

και θεωρούμε ανίσοτις παραμέτρους $d\alpha_i$:

$$U = 1 - i \sum_i d\alpha_i X_i = 1 - i dA$$

$$U^\dagger U = 1 \Rightarrow (1 + i dA^\dagger)(1 - i dA) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{dA^\dagger - dA = 0.}$$

$$\text{Επίσης } \det U = 1 \Rightarrow \boxed{\text{tr } dA = 0.}$$

Οι γεννήτορες θα είναι οι εξής τρεις πίνακες με ίσους μηδέν.

$$dA = -i \left\{ d\alpha_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_1} + d\alpha_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_2} + d\alpha_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\sigma_3} \right\}$$

Είναι άρα τρεις βαθμύλες με οι πίνακες Pauli.

$$\left. \begin{aligned} dx_1 &= -i(d\alpha_1 X_2 - i d\alpha_2 X_2 + d\alpha_3 X_1) \\ dx_2 &= -i(d\alpha_1 X_1 + i d\alpha_2 X_1 - d\alpha_3 X_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} u_{11} &= -i X_2, & u_{12} &= -X_2, & u_{13} &= -i X_1 \\ u_{21} &= -i X_1, & u_{22} &= X_1, & u_{23} &= i X_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= -\left(X_2 \frac{\partial}{\partial X_1} + X_1 \frac{\partial}{\partial X_2}\right), & \mu_2 &= i\left(X_2 \frac{\partial}{\partial X_1} - X_1 \frac{\partial}{\partial X_2}\right), \\ \mu_3 &= -\left(X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} - X_2 \frac{\partial}{\partial X_2}\right). \end{aligned} \right\}$$

(ii). SU(n).

$$O_1 \text{ generators: } \left. \begin{array}{l} dA = dA^\dagger \\ \text{tr } dA = 0 \end{array} \right\} \text{generators}$$

for total $n \times n$ hermitian matrices.

$$[\text{generators}] : 2 \times \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n \text{ generators}$$

$$n-1 \text{ generators}$$

ex. SU(3):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(iii). $SO(n)$.Αντίθετα: $R = (1 - iA)$

$$R^T = (1 - iA^T)$$

$$\text{και: } (1 - iA)(1 - iA^T) = 1$$

$$\Rightarrow -i(AA^T + A^TA) = 0$$

και επομένως:

$$dA = -dA^T$$

δηλαδή οι γεννήτορες της $SO(n)$ είναι

οι $1, n(n-1)$ ανεξάρτητα αντισυμμετρικοί πίνακες,
 με κανόνα πολλαπλασιασμού.

π.χ. $SO(4)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Στο αποτέλεσμα dX_i υπάρχει η διαφόριση παραγόμενων των παραγόμενων και των γεννητόρων με $O(n)$.

2.1. Algebra Lie.

Έστω μια ομάδα Lie, G , με γεννήτορες $X_i, i=1, \dots, n$, σε οποιαδήποτε αναπαράσταση.

Θεωρούμε το στοιχείο:

$$g = e^{-i\lambda_i X_i} e^{-i\lambda_j X_j} e^{+i\lambda_i X_i} e^{+i\lambda_j X_j}$$

Με τα λ_i, λ_j ανεξάρτητα έχουμε:

$$\begin{aligned} g &= \left(1 - i\lambda_i X_i - \frac{1}{2}\lambda_i^2 X_i^2 + \dots\right) \left(1 - i\lambda_j X_j - \frac{1}{2}\lambda_j^2 X_j^2 + \dots\right) \\ &\quad \left(1 + i\lambda_i X_i - \frac{1}{2}\lambda_i^2 X_i^2 + \dots\right) \left(1 + i\lambda_j X_j - \frac{1}{2}\lambda_j^2 X_j^2 + \dots\right) \\ &= \left(1 - i\lambda_j X_j - \frac{1}{2}\lambda_j^2 X_j^2 - i\lambda_i X_i - \lambda_i \lambda_j X_i X_j - \frac{1}{2}\lambda_i^2 X_i^2 + \dots\right) \\ &\quad \left(1 + i\lambda_j X_j - \frac{1}{2}\lambda_j^2 X_j^2 + i\lambda_j X_i X_j - \lambda_j \lambda_i X_i X_j - \frac{1}{2}\lambda_j^2 X_j^2 + \dots\right) \end{aligned}$$

$$= 1 + i\lambda_j X_j - \frac{1}{2}\lambda_j^2 X_j^2 + i\lambda_i X_i - \lambda_i \lambda_j X_i X_j - \frac{1}{2}\lambda_i^2 X_i^2$$

$$- i\lambda_j X_j + \frac{1}{2}\lambda_j^2 X_j^2 + \lambda_i \lambda_j X_i X_j - \frac{1}{2}\lambda_i^2 X_i^2$$

$$+ \frac{1}{2}\lambda_i^2 X_i^2 - i\lambda_i X_i + \lambda_i \lambda_j X_i X_j - \lambda_i \lambda_j X_i X_j - \frac{1}{2}\lambda_j^2 X_j^2 + \dots$$

$$= 1 + i\lambda_j [X_i, X_j] + \dots$$

$$= 1 - i\lambda_i \lambda_j [X_i, X_j] + \dots$$

δηλαδή έχουμε ένα νέο (ανεξαρτητοποιημένο) στοιχείο ομάδας το οποίο εξαφανίζεται μόνο από τον όρο συνδεδεμένος μαζί.

Επομένως: Ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός ανάλογος αυτών:

$$[X_i, X_j] = i f_{ij,k} X_k \quad *$$

Οι συντελεστές $f_{ij,k}$ ονομάζονται συντελεστές δομής ενός αλγεbras και εξαρτώνται μόνο από τον τύπο "αλγεbras" της αλγεbras.

Παρατηρούμε: $f_{ijk} = -f_{jik}$.

- Οι γεννήτριες ορίζονται διαμεταξύ τους. Με την πράξη του μετασχηματισμού αυτών μια ελκυστική Lie.

- Η πράξη είναι γραμμική, αντισυμμετρική και ικανοποιεί τον ταυτοτικό Jacobi:

$$[[X_i, X_j], X_k] + [[X_k, X_i], X_j] + [[X_j, X_k], X_i] = 0$$

ή:

$$f_{ij,k} f_{k,m} + f_{ki,e} f_{ej,m} + f_{je,f,m} = 0.$$

- Η ελκυστική Lie καλείται ηδυστική Lie με τον όρο αλγεbras ονομάζονται αλγεbras με τον ταυτοτικό ορισμό.

* Με διαφορετικό πεδίο, για κάθε αναπαράσταση:

$$U(R(a))U(R(b)) = U(R(f(a,b))).$$

Αναπτύσσοντας για αντιστοιχία a, b :

$$U(R(a)) = I + \alpha_i X_i + \frac{1}{2} \alpha_i \alpha_j X_{ij} + \dots$$

$$U(R(b)) = I + \beta_j X_j + \frac{1}{2} \beta_i \beta_j X_{ij} + \dots$$

όπου αναπαράσταση δ είναι αβελιανή και $X_{ij} = X_{ji}$.

$$\text{Επίσης: } f(a,b) = \alpha_i + \beta_j + \frac{1}{2} \gamma_{ijk} \alpha_i \beta_j.$$

Επομένως:

$$(I + \alpha_i X_i + \frac{1}{2} \alpha_i \alpha_j X_{ij} + \dots) (I + \beta_j X_j + \frac{1}{2} \beta_i \beta_j X_{ij} + \dots)$$

$$= I + (\alpha_i + \beta_i + \frac{1}{2} \gamma_{ijk} \alpha_j \beta_k) X_i$$

$$+ \frac{1}{2} (\alpha_i + \beta_i + \frac{1}{2} \gamma_{ikl} \alpha_l \beta_k) (\alpha_j + \beta_j + \frac{1}{2} \gamma_{jmn} \alpha_m \beta_n) X_{ij} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \alpha_i \alpha_j X_{ij} + \frac{1}{2} \beta_i \beta_j X_{ij} + \alpha_i \beta_j X_i X_j =$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{jkl} \alpha_j \beta_k X_i + \frac{1}{2} \alpha_i \alpha_j X_{ij} + \frac{1}{2} \alpha_i \beta_j X_{ij} + \frac{1}{2} \beta_i \beta_j X_{ij} + \frac{1}{2} \beta_i \beta_j X_{ij} + \dots$$

$$\Rightarrow X_i X_j = \frac{1}{2} X_{ij} + \frac{1}{2} \gamma_{ijk} X_k \quad \left\{ \Rightarrow \right.$$

$$X_j X_i = \frac{1}{2} X_{ji} + \frac{1}{2} \gamma_{jik} X_k$$

$$[X_i, X_j] = \frac{1}{2} (\gamma_{ijk} - \gamma_{jik}) X_k = i f_{ijk} X_k.$$