$U(1) \sim SO(2)$.

Αναπαραστάσεις.

- $U(1)$.

$$U(1) = \{ e^{i\theta} = g(\theta), \quad g(\theta) = g(\theta + 2\pi) \}.$$

$$g(\theta_1) g(\theta_2) = g(\theta_1 + \theta_2), \quad e = g(0).$$

Η ομάδα είναι αβελιανή, άρα οι αναπαραστάσεις της οι ΜΑ θα είναι μονοδιάστατες.

Έστω $\pi(e^{i\theta})$ μία αναπαράσταση.

$$\frac{d}{d\theta} \pi(e^{i\theta}) = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\pi(e^{i(\theta+\Delta\theta)}) - \pi(e^{i\theta})}{\Delta\theta}$$

$$= \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\pi(e^{i\theta})\pi(e^{i\Delta\theta}) - \pi(e^{i\theta})}{\Delta\theta} =$$

$$\pi(e^{i\theta}) \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\pi(e^{i\Delta\theta}) - \pi(e^{i\theta=0})}{\Delta\theta} = \pi(e^{i\theta})\, i \underbrace{\left.\frac{d\pi(e^{i\theta})}{d\theta}\right|_{\theta=0}}_{X}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d}{d\theta} \pi(e^{i\theta})\right|_{\theta=0} = i X \pi(e^{i\theta}) \Rightarrow$$

$$\pi(e^{i\theta}) = e^{iX\theta}$$

$$\pi(e^{i2\pi}) = 1 \Rightarrow e^{iX2\pi} = 1 \Rightarrow X \in \mathbb{Z}.$$

Οι ΜΑ, ΜΙ αναπαραστάσεις της $U(1)$ είναι οι

$$\boxed{\Gamma_n(\theta) = e^{in\theta}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots .}$$

Επειδή η ομάδα είναι αβελιανή κάθε στοιχείο αποτελεί κλάση συζυγίας και επειδή οι ΜΑ, ΜΙ αναπαραστάσεις είναι μονοδιάστατες η αναπαράσταση κάθε στοιχείου ταυτίζεται με τον χαρακτήρα της αναπαράστασης της κλάσης συζυγίας.

Πίνακας Χαρακτήρων.

$U(1)$	$G(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$
Γ_{-m}	$e^{-im\varphi} = \chi_m(\varphi)$
$\vdots$	
Γ_0	$e^{i0\varphi} = 1$
$\vdots$	$\vdots$
Γ_m	$e^{im\varphi}$, $m \in N$
$\vdots$	$\vdots$

Σχέσεις ορθογωνιότητας των χαρακτήρων:

- $$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} d\varphi\, \chi_m(\varphi)\chi_n^*(\varphi)\, d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} d\varphi\, e^{i(m-n)\varphi} = \underbrace{2\pi}_{|U(1)|} \delta_{mn}.$$

- $$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \chi_m(\varphi)\chi_m^*(\varphi') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} = 2\pi\,\delta(\varphi-\varphi').$$

• SO(2).

Η ορίζουσα αναπαράσταση είναι:

$$R(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

και $R(\varphi)R(\theta)=R(\varphi+\theta)$, $R(\theta+2\pi)=R(\theta)$. $\boxed{U(1)\cong SO(2)}$

Οι ΜΙ, ΜΑ αναπαραστάσεις είναι μονοδιάστατες και είναι οι:

$$\Gamma_n(\varphi)=e^{in\varphi}\quad,\quad n\in\mathbb{Z}.\ ^{*}$$

Η ορίζουσα αναπαράσταση είναι αναγώγιμη.

Πράγματι οι πίνακες $R(\varphi)$ διαγωνιοποιούνται. Έχουν ιδιοτιμές $e^{\pm i\varphi}$ και ιδιοανύσματα

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mp i\end{pmatrix}$$

και επομένως:

$$U^{\dagger}R(\varphi)U=\begin{pmatrix}e^{i\varphi} & 0\\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix}\quad \text{με}\quad U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}.$$

Δηλαδή $R(\varphi)=\Gamma_1\oplus\Gamma_{-1}$.

* Συνάγεται ομοίως με τις αναπαραστάσεις της $U(1)$. Αναλυτική εξήγηση με χρήση των χαρακτήρων υπάρχει στις σημειώσεις στον φάκελο Διαφάνειες στο αρχείο Διαφάνειες 10ου μαθήματος.

$SU(2) \sim SO(3)$.

$SU(2)$.

Οι 2×2 μοναδιακοί πίνακες με ορίζουσα 1 είναι της μορφής

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 .$$

Με $a = a_R + i a_I$, $b = b_R + i b_I$ έχουμε:

$$U = \begin{pmatrix} a_R + i a_I & b_R + i b_I \\ -b_R + i b_I & a_R - i a_I \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$U = a_R I + i b_I \sigma_x + i b_R \sigma_y + i a_I \sigma_z$$

$$U = a_R I + i \vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} \quad \text{με} \quad a_R^2 + \vec{\theta}^2 = 1 .$$

• Κανόνας σύνθεσης.

$$U(a_{R,1}, \vec{\theta}_1) U(a_{R_2}, \vec{\theta}_2) = (a_{R,1} I + i \vec{\theta}_1 \cdot \vec{\sigma})(a_{R,2} I + i \vec{\theta}_2 \cdot \vec{\sigma})$$

$$= a_{R_1} a_{R_2} I + i (a_{R,1} \vec{\theta}_2 + a_{R_2} \vec{\theta}_1) \cdot \vec{\sigma} + (i)^2 \underbrace{(\vec{\theta}_1 \cdot \vec{\sigma})(\vec{\theta}_2 \cdot \vec{\sigma})}_{\vec{\theta}_1 \cdot \vec{\theta}_2 \hat{I} + i (\vec{\theta}_1 \times \vec{\theta}_2) \cdot \vec{\sigma}}$$

$$\boxed{U_1 U_2 = (a_{R_1} a_{R_2} - \vec{\theta}_1 \cdot \vec{\theta}_2) I + i (a_{R,1} \vec{\theta}_2 + a_{R,2} \vec{\theta}_1 - \vec{\theta}_1 \times \vec{\theta}_2) \cdot \vec{\sigma}}$$

$$= a_{R,3} + i \vec{\theta}_3 \cdot \vec{\sigma} \quad \text{με}$$

$$a_{R,3}^2 + \vec{\theta}_3^2 = 1 .$$

Επίσης: $e = U(1, \vec{0})$,

$U^{\dagger}(a_R, \vec{\theta}) = U(a_R, -\vec{\theta})$.

- Απειροστοί μετασχηματισμοί – Γεννήτορες – Άλγεβρα.

$U(1,\vec{0}) = e \rightsquigarrow$ Απειροστός μετασχηματισμός είναι:

$U(1+\delta a_R, \delta\vec{\theta})$ με $(1+\delta a_R)^2 + \delta\vec{\theta}^2 = 1$

$\Rightarrow 1 + 2\delta a_R + (\delta a_R)^2 + (\delta\vec{\theta})^2 = 1$ σε πρώτη τάξη

$\Rightarrow \delta a_R = 0, \quad \delta\vec{\theta} \neq 0$

$$\lim_{\delta\theta_k \to 0} \frac{U(1+\delta\vec{\theta}) - U(1,0)}{\delta\theta_k} = \lim_{\delta\theta_k \to 0} \frac{1 + i\,\delta\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma} - 1}{\delta\theta_k} = \boxed{i\sigma_k}$$

γεννήτορες

$$U(\vec{w}) = e^{i\vec{w}\cdot\vec{\sigma}} = \underbrace{\cos|\vec{w}|}_{a_R} + \underbrace{i \sin|\vec{w}| \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}\cdot\vec{\sigma}}_{i\,\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}}$$

με: $a_R = \cos|\vec{w}|, \quad \vec{\theta} = \sin|\vec{w}| \dfrac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$

Άλγεβρα: $\boxed{[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\sigma_k.}$

• SO(3).

Είναι ήδη γνωστό ότι η SO(3) έχει ως άλγεβρα την so(3) με τους τρείς γεννήτορες L_1, L_2, L_3, οι οποίοι παράγουν στροφές περί τους άξονες x, y, z αντίστοιχα (η ισοδύναμα στα επίπεδα $(yz), (zx), (xy)$) να ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης:

so(3): $$[L_i, L_j] = i\,\varepsilon_{ijk} L_k$$

π.χ. οι τελεστές της στροφορμής ($\hbar = 1$)

$$L_1 = (x_2 p_3 - x_3 p_2), \quad L_2 = (x_3 p_1 - x_1 p_3), \quad L_3 = (x_1 p_2 - x_2 p_1)$$

σε συναρτησιακό χώρο

η οι πίνακες:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

σε τριδιάστατο πραγματικό χώρο ($\mathbb{R}^3$)

Εάν δούμε την άλγεβρα των πινάκων Pauli (γεννητόρων της θεμελιώδους (διδιάστατης) αναπαράστασης της SU(2))

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

και θεωρήσουμε ως γεννήτορες τους πίνακες $\frac{\sigma_i}{2}$ έχουμε

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\,\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}$$ και επομένως μπορούμε να

έχουμε γενικά:

su(2): $$[J_i, J_j] = i\,\varepsilon_{ijk} J_k .$$

Δηλαδή οι δύο άλγεβρες είναι ισόμορφες

$$su(2) \cong so(3)$$

Και περιμέναμε έναν ομοιομορφισμό μεταξύ των γινόμενων:

$$e^{i\omega\hat{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \sim e^{i\omega\hat{n}\cdot\vec{L}}$$

Και σε κάθε αναπαράσταση:

$$e^{i\omega\hat{n}\cdot\vec{J}} \sim e^{i\omega\hat{n}\cdot\vec{L}}$$

Για την θεμελιώδη αναπαράσταση ο 2×2 πίνακας

$$e^{i\omega\hat{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} = \cos\frac{\omega}{2} + i\sin\frac{\omega}{2}\,\hat{n}\cdot\vec{\sigma}$$

Θα αντιστοιχεί σε στροφή κατά γωνία ω περί τον άξονα $\hat{n} = (\cos\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ \cos\theta)$.

Ποια είναι η πιο ακριβής σχέση;

• Σχέση μεταξύ SU(2) και SO(3).

Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ τυχαίο άνυσμα.
Στο άνυσμα αυτό μπορούμε να αντιστοιχήσουμε μονοσήμαντα έναν 2×2 Ερμιτιανό πίνακα χωρίς ίχνος:

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}\cdot\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = X,$$

για τον οποίο ισχύει:

$$\det X = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -\vec{x}^2 .$$

Θεωρούμε ένα μετασχηματισμό ομοιότητας του X με ένα μοναδιακό πίνακα (SU(2))

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

οπότε:

$$X' = U X U^\dagger .$$

Ο πίνακας X' παραμένει Ερμιτιανός με μηδενικό ίχνος

$$X' = \begin{pmatrix} x_3' & x_1' - ix_2' \\ x_1' + ix_2' & -x_3' \end{pmatrix}.$$

Βλέπουμε ότι:

$$\det X' = -(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) = \det X = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Δηλαδή επάγεται στο διάνυσμα $\vec{x}$ μετασχηματισμός R ο οποίος διατηρεί το μέτρο του ανύσματος.

Αναλυτικά:

$$x_1' = \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} - b^2 - b^{*2})x_1 - \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} + b^2 - b^{*2})x_2 - (ab + a^*b^*)x_3$$

$$x_2' = \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2})x_1 + \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2})x_2 - i(ab - a^*b^*)x_3$$

$$x_3' = (ab^* + a^*b)x_1 - i(ab^* - a^*b)x_2 + (aa^* - bb^*)x_3$$

δηλαδή $\vec{x}' = R\vec{x}$.

Ο μετασχηματισμός R είναι στροφή γιατί $\det R = 1$.
Πράγματι για $a=1$, $b=0$ έχουμε $R_0 = I$ με $\det R_0 = 1$.
Επειδή όμως η ορίζουσα είναι συνεχής συνάρτηση των παραμέτρων και $\det R = \pm 1 \Rightarrow \det R = 1$.

Άρα σε κάθε στοιχείο της $SU(2)$ αντιστοιχεί ένα στοιχείο της $SO(3)$:

$$U \longrightarrow R_U \quad : \quad \vec{x} \mapsto R_U \vec{x}$$

με

$$\vec{x}\cdot\vec{\sigma} \longmapsto (R_U\vec{x})\cdot\vec{\sigma} = U(\vec{x}\cdot\vec{\sigma})U^\dagger.$$

Επί πλέον εάν $U, V \in SU(2)$: $U \mapsto R_U$, $V \mapsto R_V$, και: $UV \mapsto R_{UV}$,

$$R_{UV}\vec{x}\cdot\vec{\sigma} = UV\,\vec{x}\cdot\vec{\sigma}\,V^\dagger U^\dagger = U(V\vec{x}\cdot\vec{\sigma}V^\dagger)U^\dagger$$

$$= U(R_V\vec{x}\cdot\vec{\sigma})U^\dagger = R_U R_V \vec{x}\cdot\vec{\sigma} \Rightarrow R_{UV} = R_U R_V$$

Οι δύο ομάδες είναι ομομορφικές.

Για να δούμε εάν είναι ισόμορφες αρκεί να προσδιορίσουμε τα πυρήνα του μορφισμού, δηλαδή τα στοιχεία της SU(2) τα οποία απεικονίζονται στο ταυτοτικό στοιχείο της SO(3).

$$x_i' = x_i \Leftrightarrow \beta = 0, \quad \alpha = \pm 1$$

δηλαδή τα

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

και γενικά τα $U, -U$ απεικονίζονται στην ίδια στροφή.

$$\{I, E\} \cong C_2$$

και:

$$SU(2)/C_2 \cong SO(3).$$

Αναπαραστάσεις της SU(2).

Θα αναζητήσουμε πεπερασμένης διάστασης, μοναδιακές, μη ισοδύναμες, μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της SU(2).

- Μοναδιακή αναπαράσταση $\rightarrow$ οι γεννήτορες είναι ερμιτιανοί πίνακες $\rightarrow$ είναι δυνατόν να διαγωνιοποιηθούν αλλά όχι ταυτόχρονα επειδή $[J_i, J_j] \neq 0$ με $i \neq j$. Επιλέγουμε να διαγωνιοποιήσουμε τον J_3.
Τα ιδιοανύσματά του δίνουν ορθοκανονική βάση στον χώρο της αναπαράστασης.

- Πεπερασμένη διάσταση $\rightarrow$ οι ιδιοτιμές του J_3 θα παίρνουν μία μέγιστη τιμή j:

$$J_3 |j,\alpha\rangle = j |j,\alpha\rangle$$

όπου ο δείκτης α μετρά τα τυχόντα διαφορετικά ανύσματα με την ίδια ιδιοτιμή j:

$$\langle j,\beta | j,\alpha\rangle = \delta_{\alpha\beta}.$$

Ορίζουμε τους τελεστές: $\quad J_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1 \pm i J_2)$

οι οποίοι ικανοποιούν τις:

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm \Rightarrow$$ οι $J_\pm$ αυξάνουν (μειώνουν) την ιδιοτιμή του J_3 κατά 1:

$$J_3 (J_\pm |m\rangle) = (m \pm 1) J_\pm |m\rangle.$$

Εφ' όσον j είναι η μέγιστη ιδιοτιμή του J_3 $\Rightarrow$

$$J_+|j,\alpha\rangle = 0, \quad \forall \alpha.$$

Η δράση του J_- κατεβάζει την ιδιοτιμή του J_3 κατά 1:

$$J_-|j,\alpha\rangle = c(j,\alpha)\,|j-1,\alpha\rangle$$

- Για δύο διαφορετικά $|j,\alpha\rangle, |j,\beta\rangle$ με $\langle j,\beta|j,\alpha\rangle = 0$

ισχύει ότι και $\langle j-1,\alpha|j-1,\beta\rangle = \langle j,\alpha|J_+J_-|j,\beta\rangle$

$$= \langle j,\alpha|J_-J_+ + J_3|j,\alpha\rangle = j\langle j,\alpha|j,\beta\rangle = 0.$$

Δηλαδή εφαρμογή του J_- οδηγεί σε τόσα ορθογώνια μεταξύ τους ιδιανύσματα ιδιοτιμής $j-1$, όσα και ιδιοτιμής j.

- Αυτό ισχύει και για διαδοχική εφαρμογή του J_-. Επομένως για ΜΑ αναπαράσταση περιοριζόμαστε σε ένα από αυτά.

- Εξετάζουμε επομένως την διαδοχική δράση του J_- στο $|j\rangle$ (ένα εκ των $|j,\alpha\rangle$):

$$|j\rangle$$
$$J_-|j\rangle = c(j)\,|j-1\rangle$$
$$\vdots$$
$$J_-|j-n\rangle = c(j-n)\,|j-n-1\rangle$$
$$\vdots$$

και επειδή η αναπαράσταση έχει πεπερασμένη διάσταση

$\exists\ \ell$:

$$J_-|j-\ell\rangle = 0.$$

Συνδυάζοντας έχουμε:

$$J_-|j-m\rangle = c(j-m)\,|j-m-1\rangle,$$

$$J_+|j-m\rangle = b(j-m)\,|j-m+1\rangle.$$

$$b(j-m) = c(j-m+1).$$

Πράγματι: $J_+|j-m\rangle = b(j-m)\,|j-m+1\rangle$

$$J_-J_+|j-m\rangle = b(j-m)\,c(j-m+1)\,|j-m\rangle \Rightarrow$$

$$\langle j-m|J_-J_+|j-m\rangle = b(j-m)\,c(j-m+1) \Rightarrow$$

$|b(j-m)|^2 = b(j-m)\,c(j-m+1) \Rightarrow$ εφ' όσον τα b, c

Δύνανται να θεωρηθούν πραγματικά

$$b(j-m) = c(j-m+1).$$

$$|c(j-m)|^2 = \langle j-m|J_+J_-|j-m\rangle = \langle j-m|J_-J_+|j-m\rangle + (j-m)$$

$$\Rightarrow |c(j-m)|^2 = |b(j-m)|^2 + j-m$$

$$\Rightarrow |c(j-m)|^2 - |c(j-m+1)|^2 = j-m$$

Επομένως έχουμε:

$$|c(j)|^2 = j$$

$$|c(j-1)|^2 - |c(j)|^2 = j-1$$

$$|c(j-2)|^2 - |c(j-1)|^2 = j-2$$

$$\vdots$$

$$|c(j-n)|^2 - |c(j-n+1)|^2 = j-n$$

και αθροίζοντας:

$$|c(j-n)|^2 = (n+1)j - \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow$$

$$|c(j-n)|^2 = \frac{1}{2}(n+1)(2j-n).$$

Δουλεύοντας ανάλογα και με τα $b(j-n)$ παίρνουμε τελικά:

$$\boxed{\begin{aligned} c(j-n) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2j-n)(n+1)} \\ b(j-n) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n(2j-n+1)} \end{aligned}}$$

- $$c(j-\ell) = 0 \Rightarrow 2j = \ell \Rightarrow j = \frac{\ell}{2}$$

Κάθε ημιακέραια τιμή του j καθορίζει μία ΜΙ, μοναδιακή αναπαράσταση της $SU(2)$, διάστασης $2j+1$.

Πράγματι ξεκινώντας από ένα εκ των $|j,\lambda\rangle$ κατασκευάζουμε έναν $(2j+1)$-διάστατο αναλλοίωτο υπόχωρο (σε μετασχηματισμούς της $SU(2)$). Σε αυτόν δεν υπάρχει μικρότερος αναλλοίωτος υπόχωρος γιατί από οποιοδήποτε διάνυσμα παίρνουμε με δράση των J_+, J_- όλα τα διανύσματα αυτού του υπόχωρου. Έχουμε δηλαδή ΜΑ αναπαράσταση της $SU(2)$.

- Ορθοκανονική βάση στον χώρο της αναπαράστασης:

$$|j,m\rangle, \qquad m=j, j-1, \dots, -j$$

όπου:

$$J_3 |j,m\rangle = m |j,m\rangle,$$

$$J_+ |j,m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(j-m)(j+m+1)},$$

$$J_- |j,m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(j-m+1)(j+m)}.$$

- m: βάρη της αναπαράστασης.
  j: μέγιστο βάρος.
  ↳ Αναπαράσταση με σπιν j.

- $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$: τελεστής Casimir με

$$[J^2, J_i] = 0.$$

- Λήμμα Schur : $J^2 |j,m\rangle = j(j+1) |j,m\rangle$.

- Για τις συμπαγείς ομάδες ισχύει ότι όλες οι μοναδιακές ανάγωγες αναπαραστάσεις τους είναι πεπερασμένης διάστασης.

- ## Αναπαραστάσεις της SO(3).

Προφανώς οι πεπερασμένης διάστασης μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της άλγεβρας $so(3)$ είναι οι ίδιες με αυτές της $su(2)$. Δηλαδή

$\forall$ ημιακέραιο $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ έχουμε $(2j+1)$-διάσταση αναπαράσταση. Μία ορθοκανονική βάση προσφέρουν τα κανονικοποιημένα ιδιοανύσματα του L_3, $|j,m\rangle$, με $m = j, j-1, \dots, -j$.

Για τις ομάδες $SU(2)$ και $SO(3)$ γνωρίζουμε ότι τα στοιχεία $U, -U$ της $SU(2)$ αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο R_U της $SO(3)$.

- Για την $SU(2)$ ισχύει ότι

$$-I = E = e^{i2\pi\frac{\sigma_3}{2}}.$$

Επομένως και σε κάθε αναπαράσταση:

$$E \mapsto D_j(E) = e^{i2\pi J_3}$$

και στην βάση των $|j,m\rangle$:

$$D_j(E) = \begin{pmatrix} e^{i2\pi j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i2\pi(j-1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-i2\pi j} \end{pmatrix} = \begin{cases} I & \text{εάν } j = 0, 1, 2, \dots \\ -I & \text{εάν } j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \end{cases}$$

$$D_j(E) = \begin{cases} D_j(I) & \text{για } j \text{ ακέραιο,} \\ -D_j(I) & \text{για } j \text{ γνήσιο ημιακέραιο.} \end{cases}$$

- Κατά συνέπεια:

$$j \text{ ακέραιος} \Rightarrow D_j(-u) = D_j(Eu) = D_j(u),$$
$$j \text{ γνήσιος ημιακέραιος} \Rightarrow D_j(-u) = -D_j(u).$$

Επομένως:

j ακέραιος

$$\left\{ \begin{matrix} u \\ -u \end{matrix} \right\} \Rightarrow D(u) \qquad \longrightarrow R(u)$$

Αναπαράσταση της $SO(3)$.

j ημιακέραιος

$$\left\{ \begin{matrix} u \longrightarrow D(u) \\ -u \longrightarrow -D(u) \end{matrix} \right. \qquad \longrightarrow R(u) \nearrow ?$$

Μη μονότιμη (δίτιμη) αναπαράσταση της $SO(3)$.

- Διαφορετικά.

$$R_u = e^{i\varphi \hat{n}\cdot\vec{L}} \longrightarrow \text{στροφή κατά γωνία } \varphi \text{ περί τον άξονα } \hat{n}$$

$$\longrightarrow u = e^{i\frac{\varphi}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\,\hat{n}\cdot\vec{\sigma}$$

Σε στροφή 2π (όπου κάθε σημείο του χώρου επανέρχεται στον εαυτό του). Περιστρέφοντας την γωνία φ

Έχαμε $R_u \to u$ όμως το δισδιάστατο άνυσμα στο οποίο δρουν οι πίνακες u πολλαπλασιάζεται με -1.

Επειδή μία φάση (όπως είναι και ο -1) δεν επηρεάζει τα εσωτερικά γινόμενα οι αναπαραστάσεις με j ημιακέραιο εμφανίζονται στην κβαντική μηχανική.

SU(2) και διδιάστατος ισότροπος αρμονικός ταλαντωτής.

Χαμιλτονιανή:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2)$$

Φάσμα: $E_n = \hbar\omega(n+1)$

Κάθε ιδιοτιμή έχει εκφυλισμό $(n+1)$, επειδή $n = n_1 + n_2$, όπου n_1, n_2 οι κβαντικοί αριθμοί των δύο ανεξάρτητων ταλαντωτών στις διευθύνσεις x_1, x_2 αντίστοιχα.

Με βάση την αλγεβρική μέθοδο ορίζουμε:

$$\hat{a}_1 = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}_1 + i\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}_1, \quad \hat{a}_2 = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}_2 + i\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}_2,$$

$$\hat{a}_1^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}_1 - i\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}_1, \quad \hat{a}_2^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}_2 - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}_2$$

έχουμε:

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + 1)$$

με τους τελεστές αναβίβασης, καταβίβασης να ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0, \quad i,j = 1,2.$$

Για το ενεργειακό φάσμα έχουμε:

$\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger$: $\quad E_{n_1} = \hbar\omega(n_1 + \frac{1}{2}), \quad |n_1\rangle_1$ με

$$\hat{a}_1|0\rangle_1 = 0, \quad |n_1\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{n_1!}}(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}|0\rangle_1$$

και: $\hat{a}_1^{\dagger}|n_1\rangle = \sqrt{n_1+1}\,|n_1+1\rangle_1$
$\hat{a}_1|n_1\rangle = \sqrt{n_1}\,|n_1-1\rangle_1$.

Ομοίως για τον αρμονικό ταλαντωτή που περιγράφεται από τους $\hat{a}_2, \hat{a}_2^{\dagger}$.

Για το συνολικό σύστημα έχουμε:

$$|n_1\rangle_1|n_2\rangle_2 \quad \text{με ενέργεια} \quad \hbar\omega(\underbrace{n_1+n_2}_{n}+1)$$

με εκφυλισμό $(n+1)$.

π.χ. τα διανύσματα $|2\rangle_1|0\rangle_2$, $|1\rangle_1|1\rangle_2 + |0\rangle_1|2\rangle_2$ έχουν ενέργεια $\hbar\omega(2+1)$.

Ο εκφυλισμός αυτός δεν δικαιολογείται από την συμμετρία του γεωγραφικού χώρου, η οποία είναι η $SO(2)$ με μονοδιάστατες ΜΑ αναπαραστάσεις.

Η απλούστερη χαμιλτονιανή έχει μία δυναμική συμμετρία ως προς την $SU(2)$ λόγω της μορφής του δυναμικού.

Αναζητούμε τελεστές $\hat{J}_i$: $[\hat{J}_i, \hat{H}] = 0$, $i=1,2,3$
και

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\,\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k,$$

οπότε οι ενεργειακές στάθμες θα οργανώνονται με βάση τις ΜΑ, ΜΙ αναπαραστάσεις της $SU(2)$.

(Επειδή η ομάδα $SU(2)$ είναι απλή, αρκεί η μελέτη των γεννητόρων.)

Πράγματι εάν ορίσουμε:

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^{+}\hat{a}_2 + \hat{a}_2^{+}\hat{a}_1\right)$$

$$\hat{J}_2 = -\frac{i}{2}\left(\hat{a}_1^{+}\hat{a}_2 - \hat{a}_2^{+}\hat{a}_1\right)$$

$$\hat{J}_3 = \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^{+}\hat{a}_1 - \hat{a}_2^{+}\hat{a}_2\right)$$

Βρίσκουμε ότι:

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k, \quad [\hat{J}_i, \hat{H}] = 0.$$

Επίσης: $$\hat{J}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_1^{+}\hat{a}_2$$

και $$\hat{J}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_2^{+}\hat{a}_1 .$$

Επομένως τα $(2j+1)$ ανύσματα της αναπαράστασης με σπιν-j θα έχουν την ίδια ενέργεια.

Η χαμιλτονιανή συνδέεται με τον τελεστή Casimir:

$$\hat{J}^2 = \frac{1}{4}\hat{H}(\hat{H}+2) \quad \text{με} \quad \hat{H} = \hat{a}_1^{+}\hat{a}_1 + \hat{a}_2^{+}\hat{a}_2 ,$$

και για την σπιν-j αναπαράσταση έχουμε:

Λήμμα Schur:
$$\left\{\begin{array}{l} \hat{J}^2|j,m\rangle = j(j+1)|j,m\rangle \\ \hat{H}|j,m\rangle = h|j,m\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$j(j+1) = \frac{1}{4}h(h+2) \Rightarrow h(h+2) = 2j(2j+2) \Rightarrow$$

$$h = 2j$$

και θέτοντας $j = \frac{n}{2}$ (ημιακέραιος)

παίρνουμε $h = n$ και κατά συνέπεια

$$E_n = \hbar\omega(n+1)$$

με εκφυλισμό $2j+1 = n+1$.

(Προφανώς για διαφορετικά j έχουμε διαφορετική ενέργεια.)

Ο εκφυλισμός εξηγείται λόγω της δυναμικής συμμετρίας $SU(2)$.

Παράδειγμα.

$j=0, \quad n=0 \quad : \quad |0,0\rangle = |0\rangle_1 |0\rangle_2$

$j=\frac{1}{2}, \quad n=1 \quad : \quad |\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle = |1\rangle_1 |0\rangle_2$

$|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle = |0\rangle_1 |1\rangle_2$

$j=1, \quad n=2 \quad : \quad |1,1\rangle = |2\rangle_1 |0\rangle_2$

$|1,0\rangle = |1\rangle_1 |1\rangle_2$

$|1,-1\rangle = |0\rangle_1 |2\rangle_2$

$\vdots$

Σημείωση. Θεωρώντας ως επί πλέον γεννήτορα τον $\hat{H} = \hat{J}_0$ έχουμε την συμμετρία $U(2)$.

$$e^{ia_0 J_0 + i\vec{a}\cdot\vec{J}} = e^{ia_0 J_0} e^{i\vec{a}\cdot\vec{J}} \quad \text{και}$$

$$\det\left(e^{ia_0 J_0 + i\vec{a}\cdot\vec{J}}\right) = e^{ia_0(\mathrm{Tr}\, J_0)}.$$