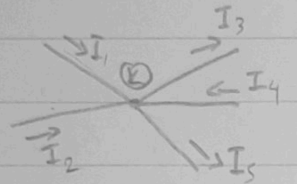
Νόμοι Kirchhoff

Νόμος Ρευμάτων (1ος)

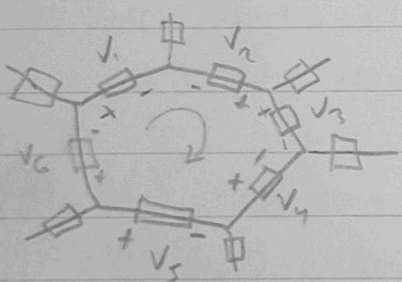


Σε ένα κόμβο κ ισχύει $\boxed{\sum_{k} I_k = 0}$

ότι μπαίνει στον κόμβο +
ότι βγαίνει » » −

$$I_1+I_2+I_4-I_3-I_5=0$$

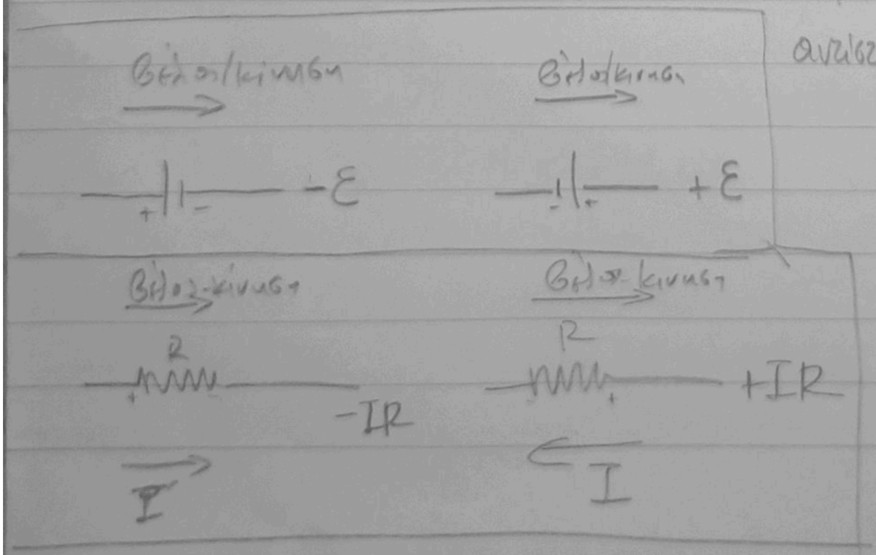
Νόμος τάσεων



Το αλγεβρικό άθροισμα των διαφορών δυναμικού κατά μήκος ενός βρόχου είναι μηδέν

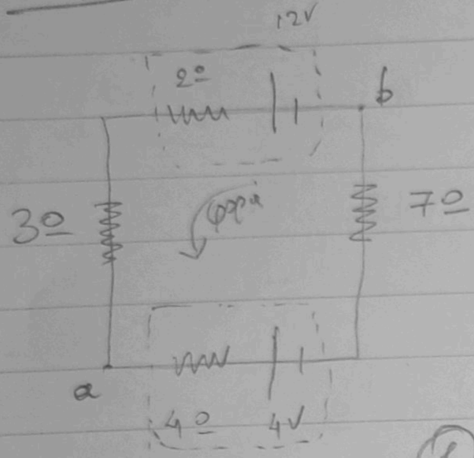
$$\boxed{\sum_{\beta} V_\beta = 0}$$

$V_1-V_2+V_3-V_4-V_5+V_6=0$ · κατά τη φορά του "βέλους" όταν βρίσκω − σε <u>ΗΕΔ</u> τότε το πρόσημο είναι +.
· κατά τη φορά του βέλους σε μια αντίσταση το IR είναι <u>αρνητικό</u>



Κανόνες Kirchhoff

Παράδειγμα



1) Βρίσκω το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα 2) Βρίσκω τη διαφορά V_{ab}.

- Κινούμ. αντίθετα από φορά ρολογιού
- Μόνο 1 ρεύμα διαρρέει το βρόχο
- Ξεκινάω από το σημείο a.

1. $-I(4\Omega) - 4V - I(7\Omega) + 12V - I(2\Omega) - I(3\Omega) = 0$

$$\boxed{I = 0{,}5A}$$

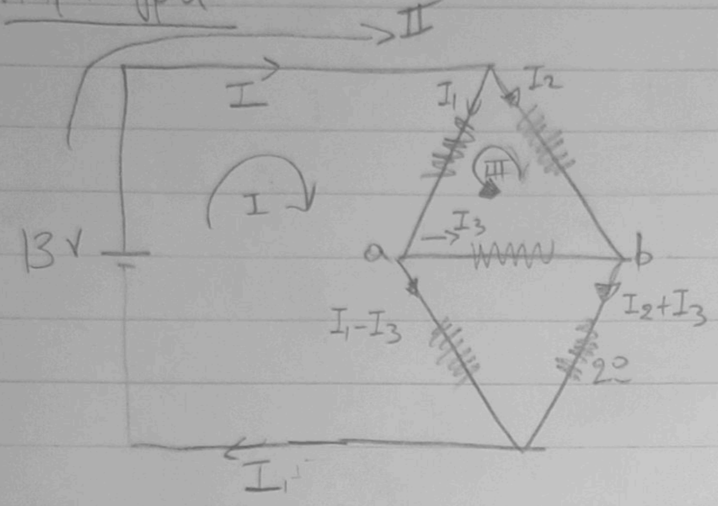
Αφού προκύπτει θετικό το I άρα η επιλογή φοράς ήταν σωστή.

2. Από το b στο a $\rightarrow$ $V_{ab} = (0{,}5A)\cdot(7\Omega) + 4V + (0{,}5A)(4\Omega) = 9{,}5V$

$\rightarrow$ $V_{ab} = 12V - (0{,}5A)(2\Omega) - (0{,}5A)\cdot(3\Omega) = 9{,}5V$

Kirchhoff

Παράδειγμα



όλες οι αντιστάσεις 1Ω εκτός από μία

(A) Ποιο είναι το ρεύμα σε κάθε αντίσταση και ποιά η ισοδύναμη αντίσταση

*Όπου μπορώ βρίσκω ισοδύναμες αντιστάσεις. Όπου μπορώ εκφράζω ρεύματα συναρτήσει άλλων γνωστών.

I $13V - I_1(1\Omega) - (I_1 - I_3)(1\Omega) = 0$

II $13V - I_2(1\Omega) - (I_2 + I_3)(2\Omega) = 0$

III $-I_1(1\Omega) - I_3(1\Omega) + I_2(1\Omega) = 0 \Rightarrow I_2 = I_1 + I_3$

I $13V - 2I_1(1\Omega) + I_3(1\Omega) = 0 \Rightarrow 13V = I_1(2\Omega) - I_3(1\Omega)$

II $13V - (I_1 + I_3)(1\Omega) - (I_1 + I_3 + I_3)(2\Omega) = 0 \Rightarrow 13V = I_1(3\Omega) + I_3(5\Omega)$

I ×5

$$\left.\begin{aligned} 13\cdot 5\,V &= I_1(10\Omega) - I_3(5\Omega) \\ 13V &= I_1(3\Omega) + I_3(5\Omega) \end{aligned}\right\} + \quad 78V = I_1(13\Omega) \Rightarrow I_1 = \frac{78}{13} = 6A$$

$I_2 = 5A$ $\quad I_3 = -1A$

αντίθετη φορά από αυτή που επιλέξαμε

Το ολικό ρεύμα I που διαρρέει το κύκλωμα είναι $I = I_1 + I_2 = 6 + 5 = 11A$

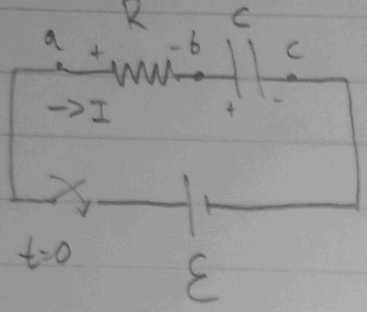
Η συνολική πηγή δυναμικού είναι ίση με ΗΕΔ

άρα $R_{ολ} = \frac{V}{I} = \frac{13V}{11A} = 1{,}2\Omega$

(B) Ποιά είναι η V_{ab}?

(Γ) Ποιά είναι η ισχύς στο κύκλωμα?

Κυκλώματα με αντίσταση και χωρητικότητα κυκλώματα RC



Αρχικά $q=0$.

$V_{bc}=0$

Για $t=0$ $I_0 = \frac{V_{ab}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}$

Όσο φορτίζεται ο πυκνωτής η V_{bc} αυξάνεται και η V_{ab} μειώνεται. Όταν φορτιστεί πλήρως τότε $\mathcal{E}=V_{bc}$.

Έστω q το φορτίο του πυκνωτή και i το ρεύμα στη στιγμή t.

$\underline{V_{ab}=iR}$ και $V_{bc}=\frac{q}{C}$

Από τον Kirchhoff $\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$

Όσο μεγαλώνει το q ο όρος $\frac{q}{RC}$ αυξάνεται και όταν το φορτίο φτάνει στην τελική του τιμή (έστω Q_f) τότε το ρεύμα $=0$ ($t \to \infty$)

$$\frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{Q_f}{RC} = 0 \Rightarrow Q_f = C \cdot \mathcal{E}$$

Κυκλώματα RC

Γενικά

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{1}{RC} q = -\frac{1}{RC}(q - C\mathcal{E})$$

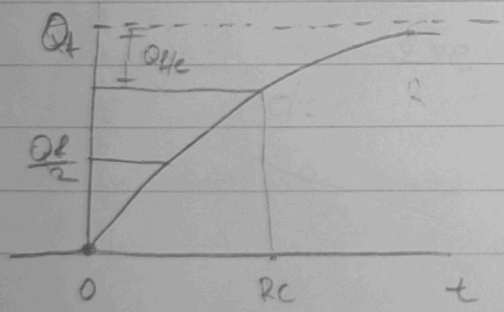
$$\frac{dq}{(q - C\mathcal{E})} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \int_0^q \frac{dq'}{q' - C\mathcal{E}} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC}$$

αλλάζοντας τα $q \to q'$, $t \to t'$ για να είναι σωστά τα όρια ολοκλήρωσης

$$\Rightarrow \int_0^q \frac{dq'}{q' - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt'$$

$$\ln \frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right) = Q_f\left(1 - e^{-t/RC}\right) = q(t)$$



$T = RC$ σταθερά χρόνου

$\tau \overset{\eta}{=} RC$

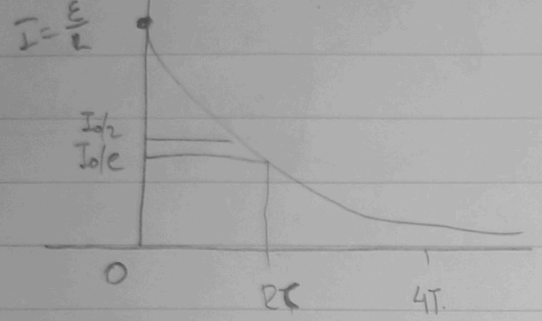
για $t = 4T \Rightarrow q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-4}\right) = \mathcal{E}C\,0{,}018$

άρα 1,8% μακριά από το Q_f (98,2)

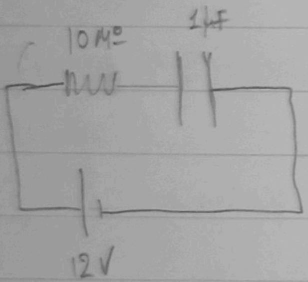
Κυκλώματα RC

Το ρεύμα στον πυκνωτή

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dt}\underbrace{\left(C\mathcal{E}\left(1-e^{-t/RC}\right)\right)}_{q(t)}=\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC}=I_0e^{-t/RC}$$



Παράδειγμα



$t=0 \quad q=0$

Ⓐ Ποιά η σταθερά χρόνου του κυκλώματος;

Ⓑ Τι κλάσμα του τελικού φορτίου βρίσκεται στο πυκνωτή σε 46 s.

Ⓖ Τι κλάσμα του αρχικού ρεύματος παραμένει για t=46s

Ⓐ $T = 10\,10^{6}\,\Omega \;\; 10^{-6}\,F = \underline{\underline{10\,s}}$

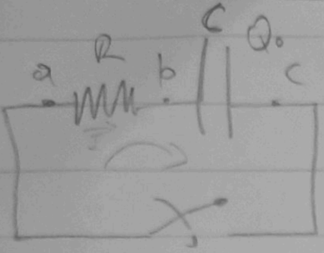
Ⓑ $\frac{q}{Q_f}=1-e^{-t/RC}=1-e^{-\frac{46}{10}}=0{,}99 \rightarrow 99\%$

Ⓖ $\frac{I}{I_0}=e^{-\frac{46}{10}}\cong 0{,}010 \rightarrow 1\%$ of I_0

$\underline{\underline{R\cdot C}}$

Σταθερά του κυκλώματος

Εκφόρτιση πυκνωτή



Με πλήρως φορτισμένο πυκνωτή απομακρύνουμε πηγή και στο χρόνο $t=0$ κλείνουμε κύκλωμα.

Ο πυκνωτής εκφορτίζεται διαμέσου του κυκλώματος

Φορτίο

για $t=0$ $q=Q_0$

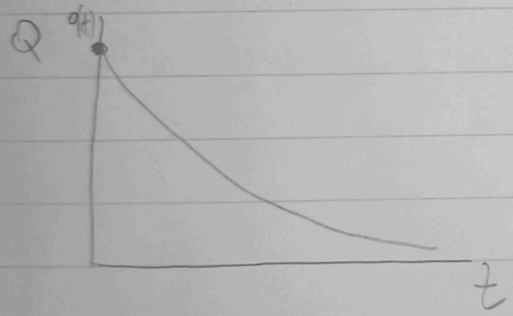
στιγμιαίο φορτίο — ρυθμός μείωσης

$$V_C + V_R = 0 \Rightarrow \frac{1}{C}q + R\frac{dq}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}q \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt$$

$V_{bc} + V_{ab}$

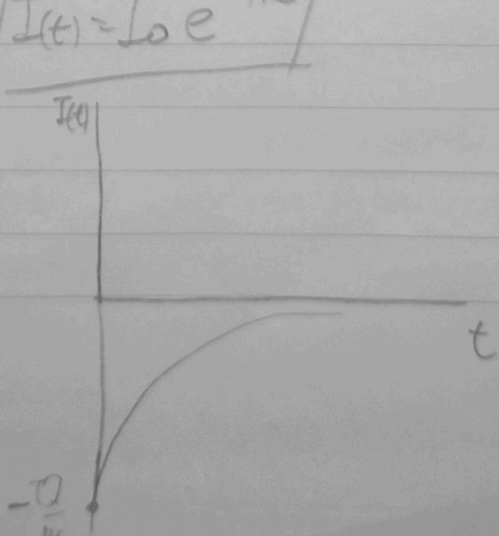
$$\Rightarrow \int_Q^q \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \boxed{q(t) = Q e^{-t/RC}}$$

εκθετική πτώση



Το ρεύμα

$$\left.\begin{aligned} I(t) &= -\frac{dq}{dt} = -\frac{Q}{RC}e^{-t/RC} \Rightarrow \\ I_0 &= \frac{Q}{RC} \end{aligned}\right\} \boxed{I(t) = I_0 e^{-t/RC}}$$



Κυκλώματα RC

Φόρτιση

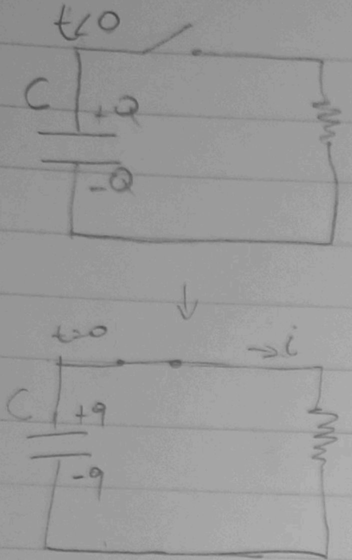
Κατά την φόρτιση του πυκνωτή από την πηγή ο στιγμιαίος ρυθμός παροχής ενέργειας είναι

$$P=\mathcal{E}i \rightarrow \mathcal{E}i = i^2R - \frac{iq}{C}$$

Ο ρυθμός κατανάλωσης είναι i^2R στην αντίσταση και
" " αποθήκευσης είναι $iV_{AC}=\frac{iq}{C}$ στον πυκνωτή

η ολική ενέργεια που συσσωρεύτηκε στον πυκνωτή $E=\frac{1}{2}Q_f\cdot\mathcal{E}$
η ολική ενέργεια που έδωσε η πηγή κατά την φόρτιση $E=\mathcal{E}Q_f$
Άρα το μισό της ολικής ενέργειας που έδωσε η πηγή πήγε στον πυκνωτή και το υπόλοιπο μισό καταναλώθηκε στην αντίσταση

Εκφόρτιση πυκνωτή



Πυκνωτής 5μF φορτίζεται σε διαφορά δυναμικού 800V και κατόπιν εκφορτίζεται δια μέσου μιας αντίστασης 25kΩ. Πόση ενέργεια "χάνεται" έως ότου εκφορτιστεί πλήρως ο πυκνωτής θερμαίνοντας την αντίσταση;

Α τρόπος

Η αρχική ενέργεια του συστήματος είναι η αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή.

$$U = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{2}\, 5\cdot 10^{-6} F\, (800)^2 V^2 = \frac{1}{2}\, 5\cdot 10^{-6} F\, 64\cdot 10^4 V^2 = 1{,}60\, J$$

όλη η ενέργεια πήγε στην R

Β τρόπος

Ο ρυθμός που καταναλώνεται η ενέργεια από την αντίσταση είναι η ισχύς ενέργεια/χρόνο και η ισχύς είναι i^2R όπου i το στιγμιαίο ρεύμα

Άρα ενέργεια $$U = \int_0^\infty R i^2 dt = \int_0^\infty R\left(I_0 e^{-t/RC}\right)^2 dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/RC} dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\,\frac{RC}{2}$$

Η αρχική τιμή του ρεύματος $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$

Ενέργεια $= \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 C$ ότι και στον τρόπο α. Με τον β τρόπο έχουμε την ευκολία εύρεσης της απώλειας θερμικής ενέργειας ανά πάσα στιγμή t