HM math – Διάλεξη 6η (19/Μαρ./2024)

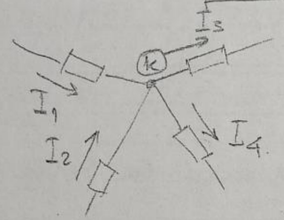
Κοσμάς Λ. Τσακμακίδης
Επίκ. Καθηγητής
(http://www.ktsakmakidis.com/)

1837 2017 ΧΡΟΝΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Νόμοι των Kirchhoff.

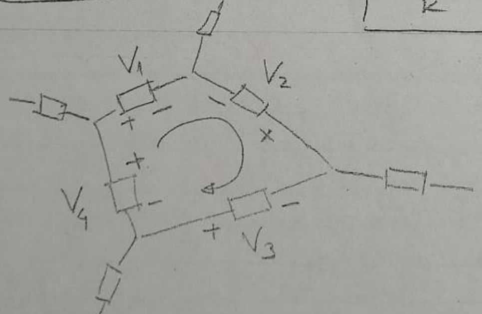
▷ Νόμος ρευμάτων : $\boxed{\sum_k I_k = 0}$



ⓚ : $\underbrace{I_1 + I_2}_{+} \underbrace{- I_3 - I_4}_{-} = 0$

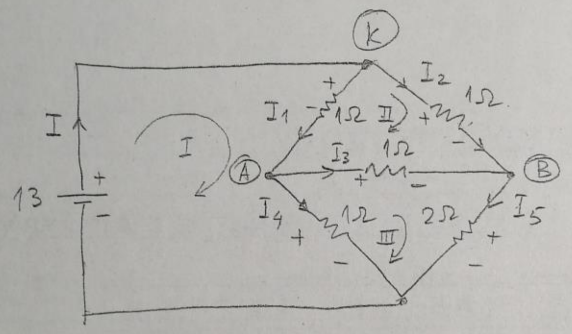
μπαίνει στον ⓚ : πρόσημο ⊕
βγαίνει από τον ⓚ : –||– ⊖

▷ Νόμος τάσεων : $\boxed{\sum_k V_k = 0}$



$\underbrace{V_1}_{+} \underbrace{- V_2 - V_3 - V_4}_{-} = 0$

Το αριστερόστροφο βέλος (βροχικό ρεύμα)
{ βλέπει + ⇒ τάση +
  –||– – ⇒ –||– –



KVL για I : $-13 + I_1 \cdot 1 + I_4 \cdot 1 = 0$

KCL για A : $I_1 - I_3 - I_4 = 0 \Rightarrow I_4 = I_1 - I_3$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{13 - I_1 \cdot 1 - (I_1 - I_3) \cdot 1 = 0} \quad (1)$$

KVL για II : $\boxed{I_2 \cdot 1 - I_3 \cdot 1 - I_1 \cdot 1 = 0}$ (2)

KVL για III : $I_5 \cdot 2 - I_4 \cdot 1 + I_3 \cdot 1 = 0$

KCL για (B) : $I_2 + I_3 - I_5 = 0 \Rightarrow I_5 = I_2 + I_3$

Επίσης $I_4 = I_1 - I_3$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{(I_2 + I_3) \cdot 2 - (I_1 - I_3) \cdot 1 + I_3 \cdot 1 = 0} \quad (3)$$

(1) : $-I_1 - I_1 + I_3 = 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{-2I_1 + I_3 = 13}$ (4)

(2) : $\boxed{I_2 - I_3 - I_1 = 0}$ (5)

(3) : $2I_2 + 2I_3 - I_1 + I_3 + I_3 = 0 \Rightarrow \boxed{-I_1 + 4I_3 + 2I_2 = 0}$ (6)

(4): $\underline{I_3 = 13 + 2I_1}$ (0)

(5): $-\underline{I_1} + I_2 - 13 - \underline{2I_1} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{-3I_1 + I_2 - 13 = 0}$ (A)

(6): $-I_1 + 4\times 13 + 4\times 2I_1 + 2I_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{7I_1 + 2I_2 + 52 = 0}$ (B)

$$\left.\begin{aligned} (A)&: -6I_1 + \cancel{2I_2} - 26 = 0 \\ (B)&: -7I_1 - \cancel{2I_2} - 52 = 0 \end{aligned}\right\} (+)$$

$\Rightarrow -13I_1 = -78 \Rightarrow \boxed{I_1 = 6A}$

Επίσης (A): $-3\times 6 + I_2 - 13 = 0 \Rightarrow$

$-18 - 13 + I_2 = 0 \Rightarrow \boxed{I_2 = 31A}$

(0): $I_3 = 13 + 2I_1 \Rightarrow I_3 = 13 + 2\times 6 = 13 + 12 \Rightarrow \boxed{I_1 = 25A}$

Άρα από KCL στον (k):

$I - I_1 - I_2 = 0 \Rightarrow I = I_1 + I_2 = 6 + 31 = 37A$

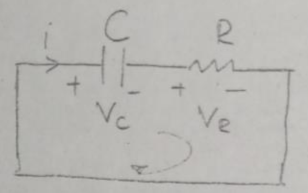
??

$\boxed{I_1 = 6A}$

$\boxed{I_2 = 5A}$

$I_1 + I_2 = I = 11\ A$

$R_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{13V}{11A} = 1.2\,\Omega$



Εκφόρτιση πυκνωτή

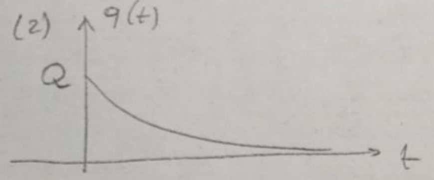
- Απομονώνουμε την πηγή.
- Αρχικά $q = Q$

KVL: $V_C + V_R = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C}q + R\frac{dq}{dt} = 0}$ (1) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}q \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_Q^q \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \Rightarrow \ln\frac{q}{Q} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{q = Q e^{-t/RC}} \quad (2)$$



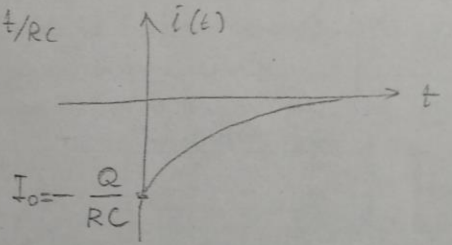
Ρεύμα στον αντιστάτη.

Αρχικά: $t \to 0$ $\quad q = Q$ και (1): $\frac{1}{C}Q + RI = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\frac{Q}{RC}} = I_0$$

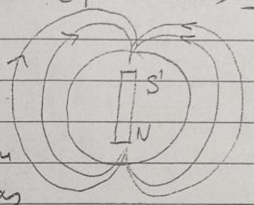
Τελικά $t \to \infty$ $\quad q = 0$ και (1): $\boxed{I \to 0}$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q}{RC}e^{-t/RC}$$



Μαγνητικό πεδίο – μαγνητικές δυνάμεις

- Μαγνητικά φαινόμενα: πριν 2,500 χρόνια στη Μαγνησία της Μ. Ασίας: αν ράβδος σιδήρου αγγίξει φυσικό μαγνήτη τότε μαγνητίζεται
- Πυξίδα: Β και Ν πόλος – πυξίδα δείχνει κατ/ση Β-Ν.
  [Προσοχή: ∄ μεμονωμένος μαγν. πόλος (μονόπολο)]
  γιατί ∃ μαγν. πεδίο της γης



- 1819: Ο Δανός Hans Christian Oersted ανακάλυψε ότι ένα σύρμα που διαρρέεται από ρεύμα προκαλεί απόκλιση της πυξίδας
- Παρόμοιες μελέτες από τον Ampère

- Michael Faraday & Joseph Henry → κίνηση μαγνήτη κοντά σε αγώγιμο βρόχο ⇒ ροή ρεύματος στο βρόχο

⇒ $\boxed{\text{∃ σύνδεση του μαγνητισμού με κινούμενα φορτία}}$

- Πριν την εισαγωγή του μαγν. πεδίου ανασκόπηση για το ηλ. πεδίο:

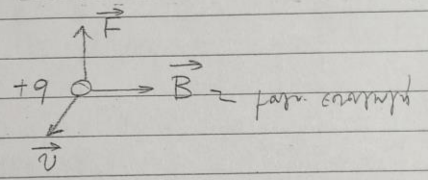
  - Μια κατανομή ηλ. φορτίων → δημιουργεί ηλ. πεδίο $\vec{E}$
  - Το ηλ. πεδίο ασκεί δύναμη $\vec{F} = q\vec{E}$ σε κάθε φορτίο q στο χώρο

Αντίστοιχα:
- Ένα κινούμενο ηλ. φορτίο ή ένα ηλ. ρεύμα δημιουργεί μαγν. πεδίο (επιπρόσθετα με το ηλ. πεδίο!)
- Το μαγν. πεδίο ασκεί δύναμη σε κάθε κινούμενο φορτίο ή ηλ. ρεύμα που βρίσκεται μέσα στο πεδίο

– Εσωτερικό των ατόμων ~ 10 T
– Στο εργαστήριο ~ 30 T
– Σε αστέρες νετρονίων ~ 10^8 T

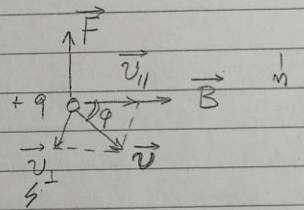
Μαγν. πεδίο : $\vec{B}$: Μονάδες :
(SI) Tesla $= 1\frac{N}{A\cdot m}$
(CGS) Gauss $= 10^{-4}$ T (~ έντ. μαγν. πεδίου της γης)

Δύναμη σε φορτίο q που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ } $\boxed{\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}}$ (1)

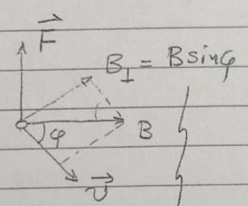


(1): $F = |q|\,vB\sin\varphi$
φ: γωνία μεταξύ $\vec{v}$, $\vec{B}$

Δηλαδή:



ή



$v_\perp = v\sin\varphi$
συνιστώσα της $\vec{v}$ ⊥ στο $\vec{B}$

συνιστώσα του $\vec{B}$ ⊥ στο $\vec{v}$

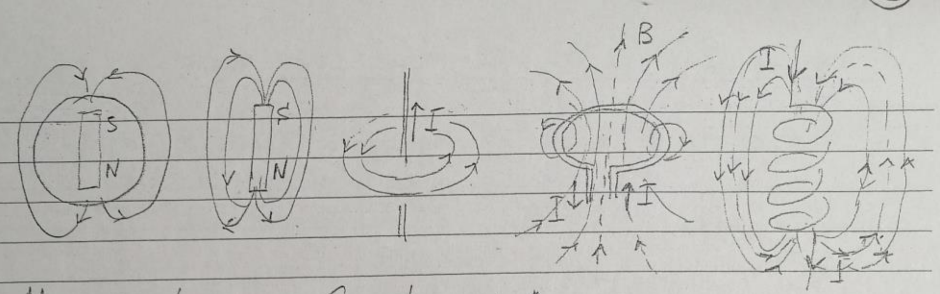
Όταν ένα φορτίο είναι σε περιοχή που ∃ και ηλ. και μαγν. πεδίο

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})}$$ δύναμη Lorentz

↳ συνολική ηλεκτρομαγνητική δύναμη.

Γραμμές μαγν. πεδίου :

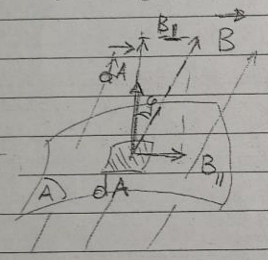
- Οι γραμμές σχεδιάζονται έτσι ώστε σε κάθε σημείο τους το $\vec{B}$ εφάπτεται στη γραμμή.
- Ο αριθμός των γραμμών / μονάδα επιφάνειας ∝ ένταση του πεδίου
- Κατεύθυνση γραμμών μαγν. πεδίου → κατ/ση που θα προσανατολιστεί η βελόνα μιας πυξίδας
- Οι γραμμές του μαγν. πεδίου <u>δεν</u> τέμνονται μεταξύ τους.



∴ Μαγν. ροή :

– Επιφάνεια : A

– στοιχειώδες εμβαδόν : dA



– Μαγν. ροή $d\Phi_B$ μέσα από την dA:

$$d\Phi_B = B_\perp dA = B\cos\varphi \cdot dA = \vec{B}\cdot d\vec{A}$$

$$B_\perp = B\cos\varphi$$

Άρα: $\boxed{d\Phi_B = \vec{B}\cdot d\vec{A}}$ (1) ⇒

συνολική μαγν. ροή : $\boxed{\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}}$

* Αν A: κλειστή επιφ.

$\boxed{\oint \vec{B}\cdot dA = 0}$

Νόμος του Gauss

Αν $\vec{B}$ ομογενές

⇓

$\Phi_B = B\cdot A\cdot \cos\varphi$; Αν $B \perp A \Rightarrow \cos\varphi = 1$ και $\Phi_B = B\cdot A$

▸ Μονάδα μαγν. ροής: Wb (από τον Wilhelm Weber)

και $1\,Wb = 1\,T\cdot m^2 = 1\,\frac{N}{A\cdot \cancel{m}}\cdot m^{\cancel{2}} = 1\,\frac{Nm}{A}$

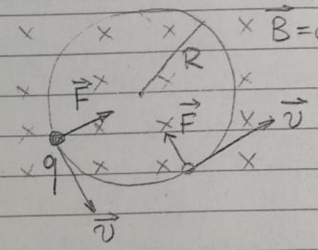
▸▸ Αν $B \perp A \Rightarrow B = B_\perp$ και $B_\perp \perp dA = A_\perp$

οπότε (1): $B = \frac{d\Phi_B}{dA_\perp} \Rightarrow$ $\boxed{\text{μαγν. πεδίο } B = \frac{\text{ροή}}{\text{μονάδα επιφάνειας}}}$

B : πυκνότητα μαγν. ροής

Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε μαγν. πεδίο

Έστω ομογενές μαγν. πεδίο και ένα φορτίο q που κινείται με $\vec{v}$. Αυτό δέχεται τη δύναμη $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$



Μέτρο: $F = qvB$

▷▷ Κατεύθυνση της $\vec{F} \perp \vec{v}$ ⇒

⇒ η $\vec{F}$ παίζει το ρόλο κεντρομόλου δύναμης που αναγκάζει το σωματίδιο να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ακτίνα R:

$$q\cancel{v}B = \frac{mv^{2}}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{mv}{qB}}$$

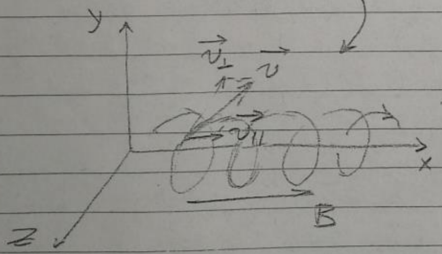
Επίσης $v = \omega R$

$$\Rightarrow \cancel{R} = \frac{m\omega \cancel{R}}{qB} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{qB}{m}} \text{ ή } \omega = \frac{|q|B}{m}$$

κυκλοτρονική συχνότητα

∘∘ Αν η ταχύτητα είναι $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ δηλ. $\vec{v}_{\parallel} // \vec{B}$, $\vec{v}_{\perp} \perp \vec{B}$ ⇒

⇒ η κίνηση είναι ελικοειδής → Ακτίνα της έλικας $= R = \frac{m v_{\perp}}{qB}$



Προσοχή: Έργο μαγν. δύναμης = 0

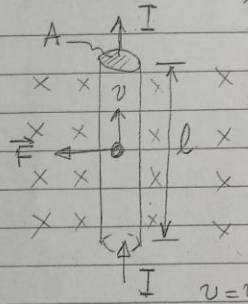
$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{x} = q(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}\,dt = 0$$

γιατί $\vec{v}\times\vec{B} \sim \vec{F} \perp \vec{v}$

ή η μαγν. δύναμη $\vec{F} \perp d\vec{x}$

Μαγν. δύναμη σε αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα

↳ Εφαρμογή: ένας ηλ. κινητήρας που περιστρέφεται λόγω δυνάμεων που ασκούνται σε αγωγό με ρεύμα



Έστω ένας αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα.

— Δύναμη σε ένα σωματίδιο:

$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

σταθ. μαγν. πεδίο στο οποίο βρίσκεται ο αγωγός

$v = v_d$ Ταχύτητα ολίσθησης $\perp \vec{B}$

drift

∴ Ψάχνουμε την ολική δύναμη σε όλα τα φορτία σε μήκος l

▷ Έστω n ≡ πυκνότητα των φορτίων = $\dfrac{\text{αριθμός φορτίων}}{\text{μονάδα όγκου}}$ ⇒

⇒ $n = \dfrac{\text{αρ. φορτίων}}{\underbrace{A}_{\text{διατομή του αγωγού}} \cdot \underbrace{l}_{\text{μήκος}}}$ ⇒ $\boxed{\text{αρ. φορτίων} = nAl}$

▷▷ Άρα: συνολική δύναμη: $F = (nAl)(qv_d B)$ ⇒

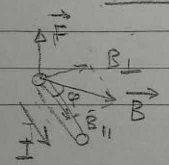
⇒ $F = \underbrace{(nqv_d)}_{J \,\equiv\, \text{πυκνότητα ρεύματος}}(AlB)$

$J \cdot A$ = ολικό ρεύμα I

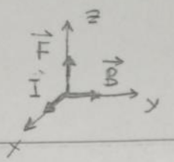
⇒ $\boxed{F = IlB}$ (*)

(*) Αν $\vec{B}$ δεν είναι κάθετο στο I: $\vec{B} = \underbrace{\vec{B}_\perp}_{B\sin\varphi} + \underbrace{\vec{B}_\parallel}_{B\cos\varphi}$

$B\cos\varphi$ δεν ασκεί δύναμη

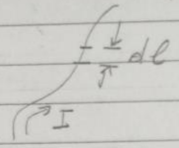


Τότε: $F = IlB_\perp = IlB\sin\varphi$



▷▷ Άρα γενικότερα: $\boxed{\vec{F} = I\,\vec{\ell} \times \vec{B}}$

▷▷ Αν ο αγωγός δεν είναι ευθύγραμμος → τον διαιρούμε σε απειροστά τμήματα $d\vec{\ell}$



⇒ Δύναμη $d\vec{F}$ στο τμήμα $d\vec{\ell}$ του αγωγού:

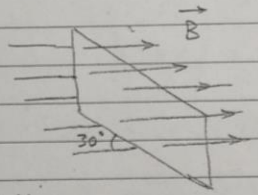
$$\boxed{d\vec{F} = I\, d\vec{\ell} \times \vec{B}} \Rightarrow \vec{F} = \int d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

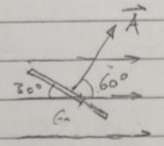
επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

~ o ~

Εφαρμογές

A. Μαγν. ροή: [Young p.778]



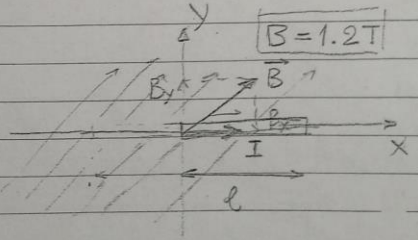


Έστω επίπεδη επιφάνεια εμβαδού 3cm² σε ομογενές B. Αν η μαγν. ροή είναι 0.9mWb να βρεθεί το B.

Απ. Είναι $\Phi_B = \underbrace{B A}_{3\times10^{-4} m^2} \cos\underbrace{\varphi}_{60^\circ} \Rightarrow B = \dfrac{\Phi_B}{A\cos\varphi} = \dfrac{0.9\times10^{-3}\,Wb}{3\times10^{-4}\,m^2 \times \underbrace{\cos 60}_{1/2}}$

$\Rightarrow \boxed{B = 6\,T}$

B. Μαγν. δύναμη



1. [Young p.787] Ευθύγραμμος αγωγός μήκους 1m διαρρέεται από ρεύμα 50A παρουσία ομογ. μαγν. πεδίου 1.2T (σχ.) Να βρεθεί η δύναμη (μέτρο + κατεύθυνση)

Απ.

- ▷ Επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων, x-y, όπως στο σχήμα.
- ▷ Είναι:

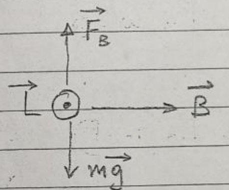
$$\vec{\ell} = (1m)\cdot\vec{i}$$
$$\vec{B} = |B|\hat{B} = (1.2T)\left[(\cos 45)\vec{i} + (\sin 45)\vec{j}\right]$$
$$\vec{F} = I\vec{\ell}\times\vec{B} \Rightarrow$$

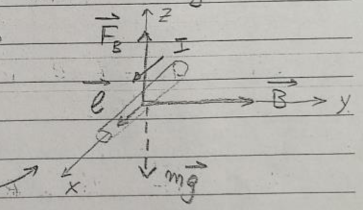
$$\Rightarrow \vec{F} = (50A)(1m)\vec{i}\times(1.2T)\left[(\cos 45)\vec{i} + (\sin 45)\vec{j}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{F} = (42.4N)\vec{k}$$ (αφού $\vec{i}\times\vec{i}=0$ και $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$).

2. [Halliday, p. 245] Ένα ευθύγραμμος οριζόντιος αγωγός διαρρέεται από ρεύμα 28A. Πόσο είναι το μέτρο κ' η κατεύθυνση του min μαγν. πεδίου που απαιτείται ώστε ο αγωγός να αιωρείται (να εξισορροπεί η βαρυτική δύναμη). Δίνεται η γραμμική πυκνότητα μάζας = 46.6 g/m

$\frac{m}{\ell}$





Απ. Επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων

Είναι: $\vec{F}_B = I\vec{\ell}\times\vec{B} = I(\ell\cdot\vec{i})\times(B\cdot\vec{j}) = I\ell B\vec{k}$

και πρέπει $\vec{F}_B = m\vec{g} \Rightarrow I\ell B\cancel{\vec{k}} = mg\cancel{\vec{k}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{m}{\ell}\right)\frac{g}{I} = 46.6\times10^{-3}\,\frac{kg}{m}\cdot\frac{9.8\,m/s^2}{28A} = 1.6\times10^{-2}\,T$$

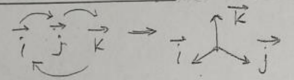
Πιο γενικά: επειδή $\vec{F}_B = I\vec{\ell}\times\vec{B} \Rightarrow F_B = I\ell B\sin\varphi$

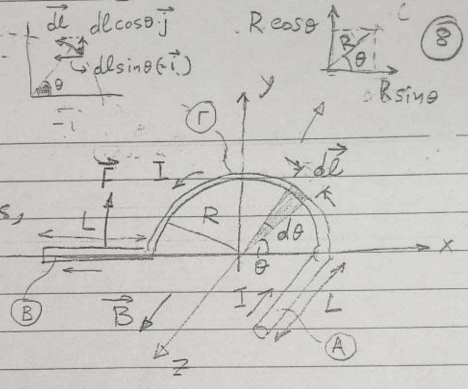
γωνία μεταξύ $\vec{\ell}$ και $\vec{B}$

και $I\ell B\sin\varphi = mg$ (στην κατεύθυνση $\vec{k}$)

$$\Rightarrow B = \left(\frac{m}{\ell}\right)\frac{g}{I}\frac{1}{\sin\varphi}$$

minimum B σημαίνει maximum $\sin\varphi \Rightarrow \varphi = 90^\circ$ όπως το κάναμε!





3. [Young p. 788] Να βρεθεί η ολική μαγν. δύναμη που ασκείται στον αγωγό του σχήματος, αν διαρρέεται από ρεύμα I.

Απ. Πρώτα τα ευθύγραμμα τμήματα (A) κ' (B):

▷ Για το (A): $\vec{F}_A = I\vec{\ell}\times\vec{B} = I[L(-\hat{k})]\times(B\cdot\hat{k}) = 0$ (γιατί $\hat{k}\times\hat{k}=0$)

γωνία μεταξύ $\vec{\ell}, \vec{B}$ $= 180°$

▷ Για το (B): $\vec{F}_B = I\vec{\ell}\times\vec{B}$

$= I[L(-\vec{i})]\times B\hat{k} = ILB\vec{j}$ (γιατί $-\vec{i}\times\vec{k}=\vec{j}$)

▷ Για το (Γ): Εδώ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε $d\vec{F} = I\,d\vec{\ell}\times\vec{B}$ γιατί ο αγωγός δεν είναι ευθύγραμμος

Εδώ: $d\ell = R\,d\theta$ και $d\vec{\ell} = (R\sin\theta\,d\theta)(-\vec{i}) + (R\cos\theta\,d\theta)\vec{j}$

μέτρο

Άρα: $d\vec{F}_\Gamma = I\left[(R\sin\theta\,d\theta)(-\vec{i}) + (R\cos\theta\,d\theta)\vec{j}\right]\times B\hat{k}$

$= IRB\left[\sin\theta(+\vec{j}) + \cos\theta\,\vec{i}\right]d\theta$

και η ολική δύναμη στο Γ: $\vec{F}_\Gamma = IRB\left[\int_0^\pi \cos\theta\,d\theta\,\vec{i} + \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\,\vec{j}\right]$

και $\int_0^\pi \cos\theta\,d\theta = \sin\theta\Big|_0^\pi = \sin\pi - \sin 0 = 0$

$\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta = -\cos\theta\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1)+1 = 2$

$\vec{F}_\Gamma = 2IRB\vec{j}$

Άρα $\vec{F}_{ολ} = \underbrace{\vec{F}_A}_{0} + \underbrace{\vec{F}_B}_{ILB\vec{j}} + \underbrace{\vec{F}_\Gamma}_{2ILBR\vec{j}} = IB(L+2R)\vec{j}$

Ως τώρα: ▷ ακίνητο φορτίο → δημιουργεί ηλ. πεδίο
▷ ηλ. πεδίο → ασκεί δύναμη σε ακίνητο φορτίο
▷ Επίσης: μαγν. πεδίο → ασκεί δύναμη σε κινούμενο φορτίο

Θα δούμε ότι:

κινούμενα φορτία → δημιουργούν μαγν. πεδία !

— o —

Μαγν. πεδίο κινουμένου φορτίου