HM-math – Διάλεξη (12/Μαρ./2024)

Κοσμάς Λ. Τσακμακίδης
Επίκ. Καθηγητής
(http://www.ktsakmakidis.com/)

1837 2017 ΧΡΟΝΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Ισοδυναμικές επιφάνειες

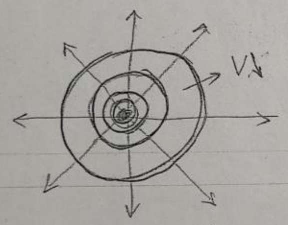
Ισοδυναμικές επιφάνειες : ηλ. δυναμικό = σταθ.

Στις ισοδ. επιφάνειες : αν κινείται ένα φορτισμένο σωματίδιο δεν παράγει έργο

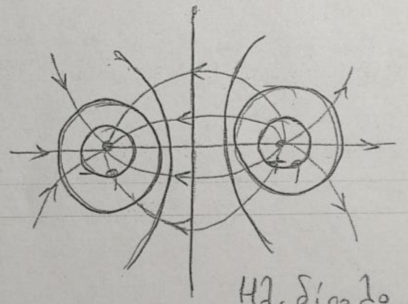
Άρα $\vec{F} = q_0 \vec{E}$

ηλ. δύναμη : πάντα $\perp$ στη μετατόπιση του φορτίου πάνω στην ισοδ. επιφάνεια

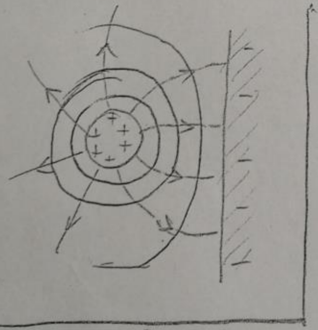
Άρα : $\boxed{\text{Δυναμικές γραμμές} \perp \text{ισοδυναμικές επιφάνειες}}$



Σημ. θετικό φορτίο



Ηλ. δίπολο, $\pm q$



Βαθμίδα δυναμικού

$$\left.\begin{aligned} V_\alpha - V_b &= \int_\alpha^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \\ V_\alpha - V_b &= \int_b^\alpha dV = -\int_\alpha^b dV \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int_\alpha^b dV = \int_\alpha^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -dV = \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E_x dx + E_y dy + E_z dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial V}{\partial z} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\nabla V} \rightarrow \boxed{\vec{F} = -\nabla U}$$

Χωρητικότητα - Πυκνωτές

- Δύο οποιοιδήποτε αγωγοί που διαχωρίζονται από ένα μονωτή αποτελούν ένα πυκνωτή.

- Στις εφαρμογές: κάθε αγωγός (οπλισμός) έχει αρχικά φορτίο μηδέν και μεταφέρονται ηλεκτρόνια από τον ένα αγωγό στον άλλο ⟶ φόρτιση του πυκνωτή

- Έτσι οι δύο αγωγοί έχουν φορτία με ίδιο μέτρο και αντίθετα πρόσημα ⟶ ολικό φορτίο = 0.

- Λέμε ότι ένας πυκνωτής φέρει φορτίο Q όταν
  * ο αγωγός με το υψηλότερο δυναμικό έχει +Q
  * ——〃—— χαμηλότερο ——〃—— −Q

- Ορίζουμε: $\boxed{C = \frac{Q}{V_{ab}}}$

  χωρητικότητα (C)

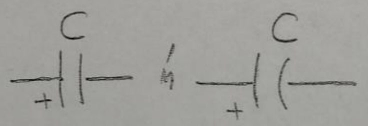
  ⟶ φορτίο του πυκνωτή (κάθε οπλισμού). (Q)

  ⟶ διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών (V_{ab})

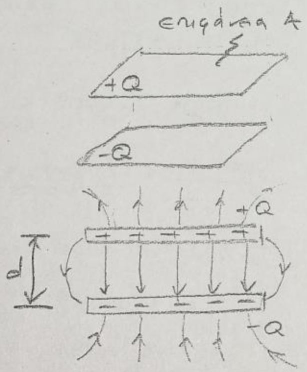
- Μονάδες: $1F = 1\,\frac{C}{V}$

  Farad (από τον Faraday)

- Σύμβολο πυκνωτή σε κυκλώματα



Υπολογισμοί χωρητικότητας



1) Παρ/λες αγώγιμες πλάκες.

$$E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_{ab} = Ed = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{Qd}{A} \\ \text{και επειδή } C = \dfrac{Q}{V_{ab}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}}$$ (χωρητικότητα στο κενό) — εξαρτάται μόνο από γεωμ. χαρακτ.

Π.χ. Αν ένας τέτοιος πυκνωτής έχει $C = 1F$ και $d = 1mm$ πόση είναι η επιφάνεια A ?

$$A = \frac{Cd}{\varepsilon_0} = \frac{1F \times 1\times10^{-3}\,m}{8.85\times10^{-12}\,\frac{F}{m}} \approx 1.1\times10^{8}\,m^2$$

~ τετράγωνο πλευράς 10km → los!

Άρα συνήθως στην πράξη χωρητικότητες ~μF, pF

Go to p. 31
Κυλινδρικός

Αποθηκευμένη ενέργεια:

Είναι: $V = \frac{Q}{C}$. όταν ο πυκνωτής είναι φορτισμένος.

Έστω q και v το φορτίο κ' η τάση σε κάποια στιγμή κατά τη διάρκεια της φόρτισης. Τότε το έργο dW για να μεταφερθεί επιπλέον φορτίο dq είναι:

$$\left.\begin{array}{l} dW = v\,dq \\ v = \dfrac{q}{C} \end{array}\right\} \Rightarrow dW = \frac{1}{C}\,q\,dq$$

και ολικό έργο:

$$W = \int_0^W dW = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C}.$$

Άρα δυναμική ενέργεια αποθηκευμένη στον πυκνωτή:

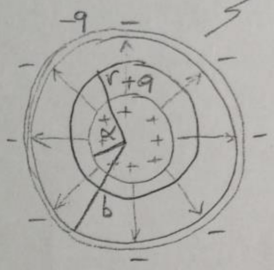
$$\boxed{U = \frac{Q^2}{2C} = \underline{\underline{\frac{1}{2}CV^2}} = \frac{1}{2}QV.}$$

<u>Ενέργεια ηλ. πεδίου:</u>

$$\left.\begin{array}{l} u_E = \text{πυκνότητα ενέργειας} = \dfrac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} \\[2ex] \text{Όμως } C = \varepsilon_0 \dfrac{A}{d} \quad \text{και} \quad V = E d \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_E = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{A}{d} E^2 d^2}{Ad} \Rightarrow \boxed{u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

2) Κυλινδρικός πυκνωτής



Διατομή κυλ. πυκνωτή μήκους L από δύο ομόκεντρους κυλίνδρους ακτίνων α και b.

Καθένας έχει φορτίο q.

- Επιφάνεια Gauss: κύλινδρος μήκους L και ακτίνας r.

- Νόμος Gauss: $\int_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (2\pi r L)E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L r}}$$

Άρα: $V_{r=\alpha} - V_{r=b} = -\int_b^\alpha \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \Rightarrow$ $\boxed{V = \int_-^+ \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}$

$$\Rightarrow V = -\int_b^\alpha \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\frac{dr}{r} \Rightarrow \boxed{V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)}$$

ολοκληρώνουμε ακτινικά προς τα μέσα

Συνεπώς: $C = \frac{q}{V} \Rightarrow \boxed{C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/\alpha)}}$

εξαρτάται μόνο από γεωμ. χαρακτηριστικά

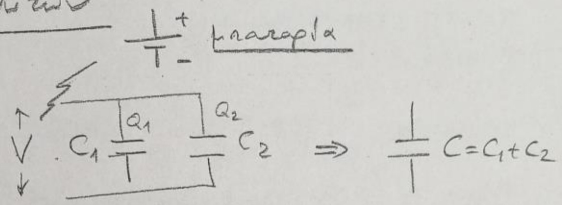
3) Σφαιρικός πυκνωτής

$$(4\pi r^2)E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

$$V = -\int_-^+ \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^\alpha \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{b}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-\alpha}{\alpha b}$$

Άρα $C = \frac{q}{V} \Rightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{\alpha b}{b-\alpha}\right)}$

Συνδυασμός πυκνωτών



α) Πυκνωτές παρ/λα

Είναι:

$V = \frac{Q_1}{C_1}$ και $V = \frac{Q_2}{C_2}$ ίδια διαφ. δυναμικού

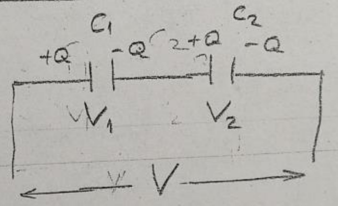
Ολικό φορτίο: $Q_{ολ} = Q_1 + Q_2 =$

$= VC_1 + VC_2 = V(C_1 + C_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{Q_{ολ}}{V} \longrightarrow$ ισοδύναμη χωρητικότητα!

$\boxed{C_{ολ} = C_1 + C_2} + \cdots$

β) Πυκνωτές σε σειρά



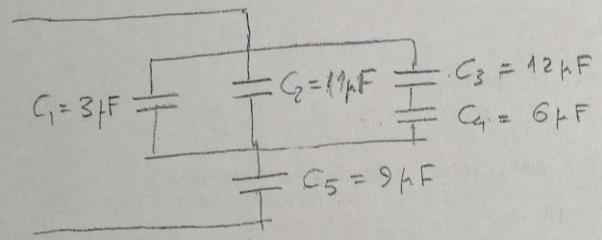
$V_1 = \frac{Q}{C_1}$ και $V_2 = \frac{Q}{C_2}$

Το φορτίο είναι το ίδιο γιατί αν ο C_1 έχει δεξιά $-Q$ τότε ο C_2 έχει αριστερά $+Q$ ...

Επίσης: $V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{C_{ολ}} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$

Δικτύωμα πυκνωτών



▷ C_3, C_4 : σε σειρά :
$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} =$$
$$= \frac{1}{12\mu F} + \frac{1}{6\mu F} \Rightarrow C' = 4\mu F$$

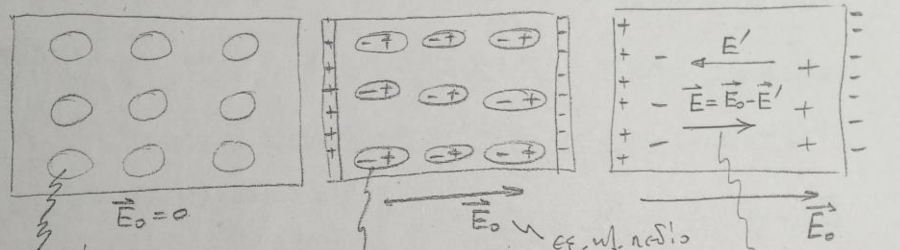
▷ C_1, C_2, C' : παρ/λα :

$$C'' = C_1 + C_2 + C' = (3 + 11 + 4)\mu F = 18\mu F$$

▷ C' και C_5 : σε σειρά :

$$\frac{1}{C_{o\lambda}} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C_5} = \frac{1}{18\mu F} + \frac{1}{9\mu F} \rightarrow \underline{C_{o\lambda} = 6\mu F}$$

Διηλεκτρικά (και πυκνωτές με διηλεκτρικά)



ηλ. ουδέτερα άτομα στο διηλεκτρικό

το πεδίο διαχωρίζει τα κέντρα θετικού κ' αρνητικού φορτίου

⇓

αρνητικά φορτία αριστερά
θετικά —״— δεξιά

⇓

επαγόμενα φορτία → πεδίο $\vec{E}'$ που αντιτίθεται στο $\vec{E}_0$ ⇒ νέο πεδίο $\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}'$

Το διηλεκτρικό ελαττώνει την ένταση του πεδίου!

Άρα μπορούμε να ορίσουμε μία ποσότητα

κ, K ή ε_r [κ: σχ. διηλ. σταθερά: $\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 \kappa}$] ***

που δείχνει πόσο ελαττώνεται το πεδίο στο διηλεκτρικό:

$$\boxed{E = \frac{1}{\kappa} E_0 \quad ; \quad \kappa \geq 1}$$

Προηγούμενη ανάλυση $\varepsilon_0 \to \varepsilon_0 \kappa$.

Π.χ. $\kappa = 1$ στο κενό, $\kappa = 1.00055$ (αέρας), $\kappa \approx 2.1$ (τεφλόν)
$\kappa = 3.5$ (νάυλον), $\kappa = 6$ (γυαλί), $\kappa = 80$ (νερό)

Ρεύμα – αντίσταση – ΗΕΔ.

<u>Ρεύμα</u>: οποιαδήποτε κίνηση φορτίου από μια χωρική περιοχή σε μια άλλη.

<u>Σε αγωγό</u>: ελεύθερα ηλεκτρόνια κινούνται τυχαία λόγω συγκρούσεων με τα σχεδόν ακίνητα ιόντα (μετά από κάθε σύγκρουση η κατ/ση κίνησης υφίσταται τυχαία μεταβολή).

▷ Αν επιβάλλουμε ένα συνεχές και σταθ. <u>ηλ. πεδίο $\vec{E}$</u>:

⇒ Τότε τα ηλεκτρόνια υφίστανται τη δύναμη $\underline{\vec{F}=q\vec{E}}$

⇒ <u>αργή</u> ολίσθηση των ηλεκτρονίων στην κατεύθυνση της $\vec{F}$

και η κίνηση αυτή περιγράφεται με τον όρο

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ταχύτητα ολίσθησης } \vec{v}_d \\ \text{των σωματιδίων} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{ρεύμα στον αγωγό}}$ ***

Η ταχύτητα ολίσθησης είναι πολύ μικρή

~ $10^{-4}\,\frac{m}{s}$ ή ~ $\frac{mm}{s}$ (όσο ένα σαλιγκάρι!) [βλ. παρακάτω]

<u>Όμως</u> όταν π.χ. ανάβουμε το φως →

→ το πεδίο εφαρμόζεται στο σύρμα με ταχύτητα ~ c

→ τα ηλεκτρόνια αρχίζουν να κινούνται σε όλο το μήκος του αγωγού <u>σχεδόν ταυτόχρονα</u>

→ χρόνος για ηλεκτρόνιο από το διακόπτη στη λάμπα ~ 0.

Ρεύμα: σε αγωγό $\rightarrow$ ηλεκτρόνια

σε ιονισμένο αέριο (πλάσμα) ή σε διάλυμα με ιόντα $\rightarrow$ φορτία $\begin{cases}\text{ηλεκτρόνια} \\ \text{ιόντα.}\end{cases}$

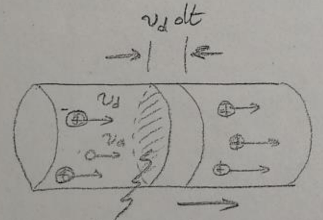
σε ημιαγωγό $\rightarrow$ $\begin{cases}\text{ηλεκτρόνια} \\ \text{οπές. (κίνηση κενών θέσεων από όπου λείπουν ηλεκτρόνια)}\end{cases}$

Σύμβαση: $\boxed{\text{ρεύμα } I \rightarrow \text{κατεύθυνση προς την οποία ρέει θετικό φορτίο.}}$

[συμβατική φορά του ρεύματος.]

Ορισμός: $\boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$ Μονάδα: $1\,A = \frac{C}{s}$.

Σύνδεση ρεύματος με την ταχύτητα ολίσθησης.



Επιφάνεια A
(εμβ. διατομής του αγωγού)

- ▷ Θεωρούμε κυλινδρικό αγωγό με εμβαδόν διατομής A.
- ▷ n: συγκέντρωση (πυκνότητα) φορτισμένων σωματιδίων $[m^{-3}]$
- ▷ Όλα τα σωματίδια κινούνται με v_d.

Στο διάστημα dt $\rightarrow$ μετατόπιση $= v_d dt$

Άρα στο στοιχειώδη κύλινδρο: όγκος $= A v_d dt$

αριθμός σωματιδίων $= n A v_d dt$

συνολικό φορτίο $= q n A v_d dt$

Άρα το φορτίο dQ που εξέρχεται από τον κύλινδρο σε χρόνο dt είναι:

$$dQ = qnAv_d dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dQ}{dt} = I = nqv_d A}$$

Μπορούμε να ορίσουμε πυκνότητα ρεύματος:

$$\boxed{J = \frac{I}{A} = nqv_d} \; [A/m^2]$$

Διανυσματικά: $\boxed{\vec{J} = nq\vec{v}_d}$

Παράδειγμα: Σε χάλκινο σύρμα διαμέτρου 1.02 mm, ρέει ρεύμα 1.67 A (π.χ. για λάμπα 200 W). Αν $n = 8.5\times10^{28}$ ηλεκτρόνια/m^3 να βρεθεί η v_d.

$$v_d = \underbrace{\frac{I}{A}}_{J}\frac{1}{nq} = \frac{1.67\,A}{8.17\times10^{-7}\,m^2}\cdot\frac{1}{8.5\times10^{28}\times(1.6\times10^{-19}\,C)}$$

$$\left[A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi\times(1.02\times10^{-3})^2}{4}\,m^2 = 8.17\times10^{-7}\,m^2\right]$$

και τελικά $v_d = 1.5\times10^{-4}\,\frac{m}{s} = 0.15\,\frac{mm}{s}$.

Ειδική αντίσταση

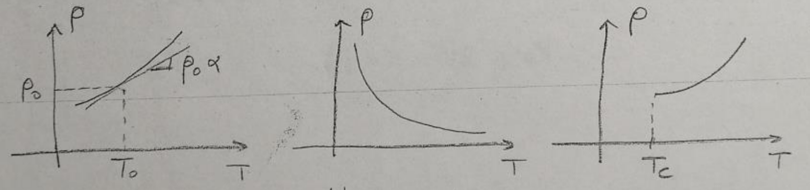
$$\rho = \frac{\overset{\text{μέτρο της έντασης του ηλ. πεδίου}}{E}}{\underset{\text{μέτρο της πυκνότητας ρεύματος}}{J}}$$

Ειδική αντίσταση ↗ καθώς θερμοκρασία T ↗

[Τα ιόντα ταλαντώνονται με μεγαλύτερο πλάτος
⇒ αυξάνεται η πιθανότητα σύγκρουσης ηλ/νίων-ιόντων]

$$\underbrace{\rho_0}_{\substack{\text{ειδ. αντίσταση} \\ \text{για } T=T_0}} \quad \rho \cong \rho_0\left[1+\underbrace{\alpha}_{\substack{\text{θερμικός συντελεστής} \\ \text{ειδ. αντίστασης}}}(T-T_0)\right]$$

$[T_0 = 0$ ή $20°C]$



μέταλλο — $\rho(T)$ ↗

Ημιαγωγός — $\rho(T)$ ↘

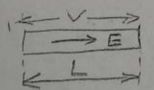
Υπεραγωγός — $\rho = 0$ για $T < T_c$

Αντίσταση

Για αγωγό: $\boxed{\vec{E} = \rho \vec{J}}$ → Ohm

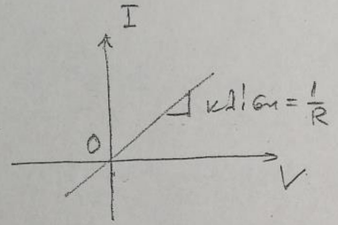
$\underbrace{I = J \cdot A}_{\text{ρεύμα vs. πυκν. ρεύματος}}$ $\quad \underbrace{V = E \cdot L}_{\text{τάση μεταξύ άκρων}}$ $\Rightarrow \frac{V}{L} = \rho \frac{I}{A} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \underbrace{\left(\rho \frac{L}{A}\right)}_{R\text{: αντίσταση}} I$

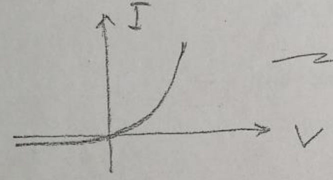


$\Rightarrow \boxed{V = RI}$

$$V = RI \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{R} V}$$



κλασσικός "αντιστάτης" με αντίσταση R.

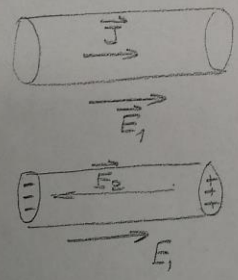


ημιαγωγική δίοδος.
Για μικρές τιμές της $V>0$
$I \sim V^2 \rightarrow$ <u>δεν</u> υπακούει το νόμο του Ohm.

<u>Ηλεκτρεγερτική δύναμη</u> (ΗΕΔ).

▷ Για να διαρρέεται ένας αγωγός από <u>σταθ. ρεύμα</u> πρέπει να αποτελεί μέρος <u>κλειστού βρόχου</u>
$\Rightarrow$ <u>κλειστού κυκλώματος</u>.

▷ Αν δεν ήταν έτσι, αν εφαρμόζαμε ηλ. πεδίο $\vec{E}_1$ θα άρχιζε να ρέει ρεύμα $\vec{J} = \frac{\vec{E}_1}{\rho}$



$\Rightarrow$ συσσωρεύονται θετικά φορτία στο ένα άκρο και αρνητικά στο άλλο άκρο
$\Rightarrow$ δημιουργείται ένα πεδίο $\vec{E}_2$ που μειώνει το $\vec{E}_1$
$\Rightarrow$ μειώνεται το $\vec{J}$ (ή το I)

Το σύστημα έρχεται σε ισορροπία: $\vec{E}_{ολ} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$
$\Rightarrow \vec{J} = 0$