# Το ηλεκτρικό πεδίο

▷ Ένα φορτισμένο σωματίδιο Α "τροποποιεί" (λόγω του φορτίου του) τον περιβάλλοντα χώρο, έτσι ώστε: ένα φορτισμένο σωματίδιο Β (λόγω του φορτίου του) "αισθάνεται" πως έχει τροποποιηθεί ο χώρος στη θέση που βρίσκεται ⇒ απόκριση: "αισθάνεται" τη δύναμη Coulomb.

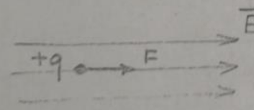
▷ Αν ένα "δοκιμαστικό" φορτίο τοποθετηθεί σε ένα σημείο και υποστεί ηλ. δύναμη ⇒ ∃ ηλ. πεδίο στο σημείο αυτό.

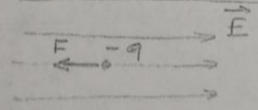
▷ Δύναμη: διάνυσμα ⇒ ηλ. πεδίο: διάνυσμα.

▷ Ορισμός ηλ. πεδίου: $\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}}$ (*) $\rightarrow [E] = \frac{N}{C}$

▷ Αν ξέρουμε το $\vec{E}$ ⇒ βρίσκουμε το $\vec{F}$ ◈

(*) ▷ Από τον ορισμό: $\boxed{\text{ηλ. πεδίο} = \text{δύναμη} / \text{θετικό φορτίο}}$:




Ηλ. δύναμη: ίδια κατ/ση με το ηλ. πεδίο

Ηλ. δύναμη: αντίθετη κατ/ση με το ηλ. πεδίο

◈ $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ θυμίζει την $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$

↓ Βαρυτική δύναμη / μονάδα μάζας

## Ηλ. πεδίο φορτισμένου σωματιδίου

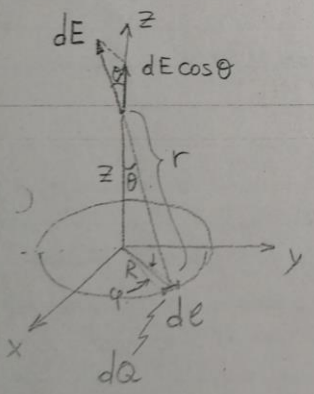
∴ Δύναμη από ηλ. φορτίο $q$ στο ηλ. φορτίο $q'$:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\hat{r}$$

⇒ Ηλ. πεδίο που δημιουργείται από το $q$ σε απόσταση $r$:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}} \rightarrow \boxed{\text{πεδίο σημειακού φορτίου}}$$

∴ <u>Παράδειγμα</u> [Ohanian, p.23]: Συνολική ποσότητα φορτίου $Q$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη σε λεπτό δακτύλιο ακτίνας $R$. Ποιό είναι το ηλ. πεδίο στον άξονα του δακτυλίου?




▷ Φορτίο/μονάδα μήκους $= \dfrac{Q}{2\pi R}$ = γρ. πυκνότητα

▷ Φορτίο στο στοιχειώδες τόξο $dl$: $dQ = \dfrac{Q}{2\pi R}dl$

▷ $dE = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dQ}{r^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q\,dl}{2\pi R}\dfrac{1}{z^2+R^2}$

Κατακόρυφη συνιστώσα του $dE$:

$$\left.\begin{array}{l} dE_z = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q\,dl}{2\pi R}\dfrac{\cos\theta}{z^2+R^2} \\ dl = R\,d\varphi\ ;\ \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\cancel{2\pi R}}\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\underbrace{\int_0^{2\pi} R\,d\varphi}_{\cancel{2\pi R}}$$

$$\left[\frac{2\pi R}{dl} = \frac{Q}{dQ} \Rightarrow dQ = \frac{Q}{2\pi r}dl\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{(z^2+R^2)^{3/2}}}$$

<u>Διανυσματικά</u>: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{z}$

▷ Στο όριο $z=0 \Rightarrow \vec{E}=0$

▷ Στο όριο $z \gg R \Rightarrow \underbrace{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z^2}\hat{z}}_{\boxed{\text{ηλ. πεδίο σημειακού φορτίου}}}$

Go to p. 8α

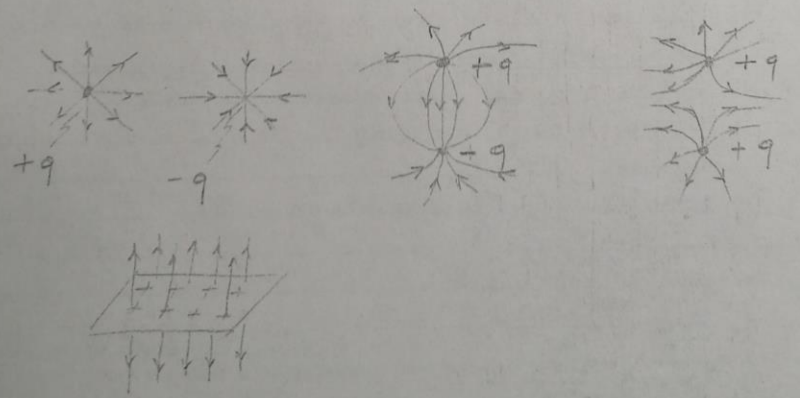
<u>Γραμμές ηλ. πεδίου</u> (δυναμικές γραμμές)

▷ Το ηλ. πεδίο αναπαρίσταται ως διάνυσμα →

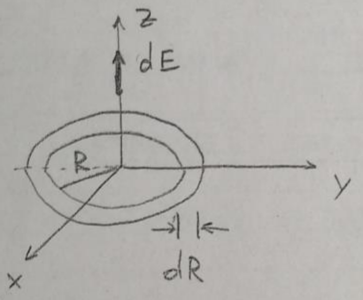
<u>δυναμική γραμμή</u>: σε οποιοδήποτε σημείο της, η εφαπτομένη στη γραμμή δείχνει τη δ/νση του ηλ. πεδίου

<u>Επίσης</u>: η <u>πυκνότητα</u> των γραμμών ~ μέτρο του πεδίου

▷ Οι δυν. γραμμές ξεκινούν από θετικό φορτίο και καταλήγουν σε αρνητικό, ή συνεχίζουν ως το ∞.
[όπως η δύναμη που θα ασκούνταν σε θετικά φορτισμένο σωμάτιο].



Ηλ. πεδίο επίπεδου φύλλου που φέρει ομοιόμορφο φορτίο πυκνότητας $\rho$ [C/m²].




▷ Το φύλλο θεωρείται ότι έχει διαστάσεις άπειρου μήκους

▷ Το φύλλο αποτελείται από ένα μεγάλο πλήθος διαδοχικών ομόκεντρων δακτυλίων.

▷ Θεωρούμε ένα τέτοιο δακτύλιο ακτίνας R και πλάτους dR.

Ο δακτύλιος έχει εμβαδόν $= 2\pi R\,dR$

——"—— φορτίο : $dQ = (2\pi R\,dr)\times\rho$

Άρα το κατακόρυφο ηλ. πεδίο που δημιουργεί είναι:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2\pi R\rho z\,dR}{(z^2+R^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

(R = ∞ ο μεγαλύτερος δακτύλιος)

$$\Rightarrow E = \frac{2\pi\rho z}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{R\,dR}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

(R = 0 ο μικρότερος δακτύλιος)

Για το ολοκλήρωμα:

$R^2 = u$, οπότε $\int_0^\infty \frac{R\,dR}{(z^2+R^2)^{3/2}} = \int_0^\infty \frac{\frac{1}{2}du}{(z^2+u^2)^{3/2}}$

$\Downarrow$

$\cancel{2}R\,dR = \frac{1}{2}du$

$$= \left.\frac{-1}{(z^2+u^2)^{1/2}}\right|_0^\infty = \frac{1}{z}$$

Άρα $E = \frac{2\pi\rho \cancel{z}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\cancel{z}} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}}$

και σε διανυσματική μορφή: $\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\hat{z}}$

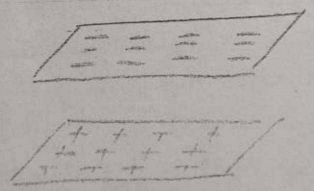
Συνεπώς: Το ηλ. πεδίο $\sim \rho$ (πυκνότητας φορτίου)

και είναι σταθερό $\Rightarrow$ ανεξάρτητο από την απόσταση από το φύλλο!

▷▷ Ισχύει προσεγγιστικά όχι μόνο για άπειρο φύλλο αλλά και για φύλλο πεπερασμένης διάστασης

{σε αποστάσεις $\ll$ από τις πλευρές και μακριά από τα άκρα}

▷ Στην πράξη: 2 φύλλα.



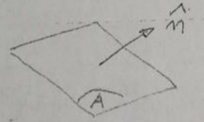
} πυκνωτής!

▷ Πεδίο μεταξύ των φύλλων (το ένα +, το άλλο −)

$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

▷ Πεδίο "εκτός" των φύλλων = 0.

## Ηλεκτρική ροή:




- Επιφάνεια: $\overset{\text{μέτρο} +}{\text{κατεύθυνση}}$ (δηλ. πάνω/κάτω)
- Η κατ/ση ορίζεται μέσω του $\hat{n}$

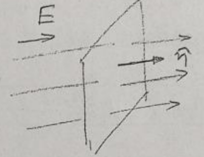
μοναδιαίο διάνυσμα $\perp$ επιφάνεια

$|\hat{n}| = 1$.

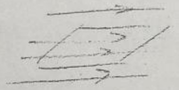
$\therefore$ Άρα: $\boxed{\vec{A} = A \cdot \hat{n}}$

Ηλεκτρική ροή: $\Phi_E = \begin{cases} E \cdot A, & \hat{n} \parallel \vec{E} \\ 0, & \hat{n} \perp \vec{E} \end{cases}$

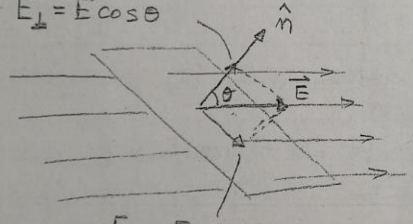
$\Phi_E = E \cdot A$




$\Phi_E = 0$



$E_{\perp} = E\cos\theta$




$E_{\parallel} = E\sin\theta$

Γενικά:

συνιστώσα του E που είναι $\parallel \hat{n}$ δηλ. $\perp$ επιφάνεια

$\Phi_E = E \cdot A \cos\theta$, δηλ.

$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$

και για οποιαδήποτε επιφάνεια

$$\boxed{\Phi_E = \int E\cos\theta \, dA = \int E_{\perp} \, dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

* { Ηλ. ροή σε μια επιφάνεια = αριθμό των γραμμών του πεδίου που τέμνονται από την επιφάνεια } *

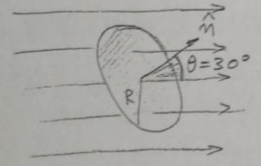
ή

* { Το ηλ. πεδίο = αριθμός δυν. γραμμών / μονάδα επιφανείας } *

## Παραδείγματα

### ① Ηλ. ροή διαμέσου ενός δίσκου. (ανοιχτή επιφάνεια)

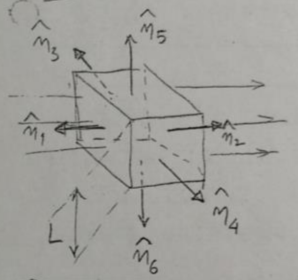
Δίσκος ακτίνας 0.1 m ; πεδίο $E = 2\times10^3 \frac{N}{C}$ ; Ροή = ?




$$\left.\begin{array}{l} \Phi_E = E\cdot A \cos\theta \\ A = \pi R^2 = \pi\,(0.1\,m)^2 = 0.0314\,m^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_E = 2\times10^3 \frac{N}{C} \times 0.0314\,m^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 54 \frac{N\cdot m^2}{C}.$$

### ② Ηλ. ροή διαμέσου ενός κύβου (κλειστή επιφάνεια χωρίς ηλ. φορτίο)



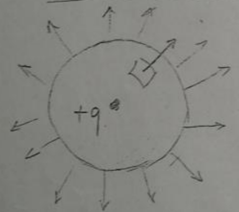

$$\Phi_E = \underbrace{\Phi_{E_1}}_{\underbrace{-E\cdot L^2}_{\substack{\cos\theta=\cos180^\circ \\ =-1}}} + \underbrace{\Phi_{E_2}}_{\underbrace{+E L^2}_{\substack{\cos\theta=\cos0 \\ =+1}}} + \underbrace{\Phi_{E_3} + \Phi_{E_4} + \Phi_{E_5} + \Phi_{E_6}}_{0}$$

γιατί $\hat{n} \perp \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{A} = E\,L^2 \cos 90^\circ = 0.$$

[Για κάθε έδρα: $\vec{A} = L^2 \hat{n}$]   Άρα: $\boxed{\Phi_E = 0.}$

### ③ Ηλ. ροή διαμέσου σφαίρας στο κέντρο της οποίας υπάρχει +q. (Κλειστή επιφάνεια με ηλ. φορτίο)




Ηλ. πεδίο του σημειακού φορτίου:

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}$ ⊥ στη σφαίρα και έχει την ίδια τιμή παντού πάνω στη σφαίρα.

$$\text{Άρα: } \Phi_E = \int E\,dA = \underbrace{E}_{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}}\underbrace{\int dA}_{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}4\pi R^2 \Rightarrow \boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$